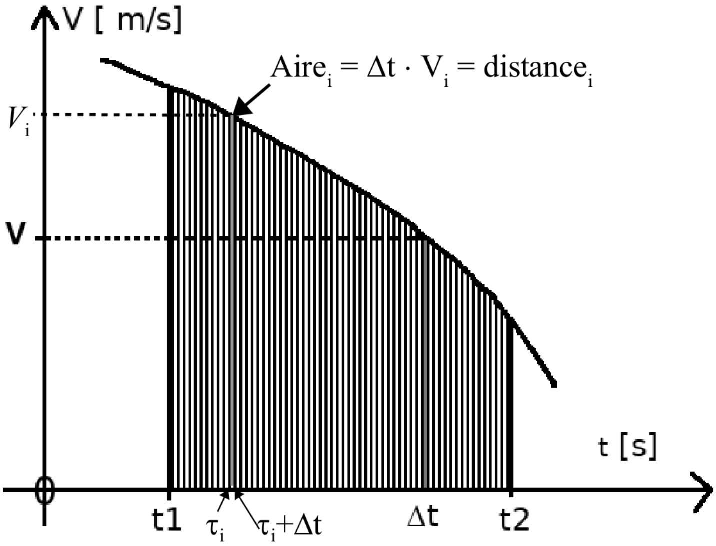
❶ **Lien entre l'aire et la distance parcourue.**

Le but est de montrer que l'aire hachurée est égale à la distance parcourue entre les temps t1 et t2.

Utilisez la méthode de Cavalieri et découpez l'intervalle de temps [t1 ; t2] en petits intervalles pour montrer que l'aire hachurée est égale à la distance parcourue entre les temps t1 et t2.



Sur chaque petit intervalle de temps Δt, la distance parcourue = vitesse · Δt.

<u>Résolution :</u>

On découpe l'intervalle de temps [t1 ; t2] en N petits intervalles $[\tau_i\,;\,\tau_i + \Delta t]$, i varie de 1 à N.

Remarque : $\tau_i+\Delta t = \tau_{i+1}$

L'aire hachurée =

la somme des aires ayant pour base l'intervalle $[\tau_i\,;\,\tau_i + \Delta t]$ = $\left(\sum_{i=1}^{N} \Delta t \cdot V_i \right)$ =

la somme des distances parcourues durant l'intervalle de temps $[\tau_i\,;\,\tau_i + \Delta t]$ =

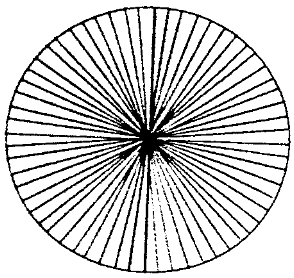
la distance parcourue entre les temps t1 et t2.

Ceci montre l'affirmation que l'aire hachurée est égale à la distance parcourue entre les temps t1 et t2.

---

❷ **Méthode de Kepler pour montrer que l'aire d'un disque =** $\frac{1}{2}\cdot r\cdot$ **périmètre du disque.**

Dans le cours on décrit comment Johannes Kepler justifie le lien entre l'aire d'un disque et le périmètre de ce disque.
Expliquez et détaillez le raisonnement de Kepler.



On découpe le périmètre du disque en N petits segments, qui forment chacun la base d'un petit triangle de hauteur presque r.
La somme des aires de ces triangles est d'autant plus proche de l'aire du disque que N est grand.

La longueur la base de chaque triangle est : $\ell = \frac{\textit{périmètre}}{N}$

L'aire de chaque triangle est : $Aire = \frac{1}{2}\cdot \ell \cdot r = \frac{1}{2}\cdot\frac{\textit{périmètre}}{N}\cdot r$

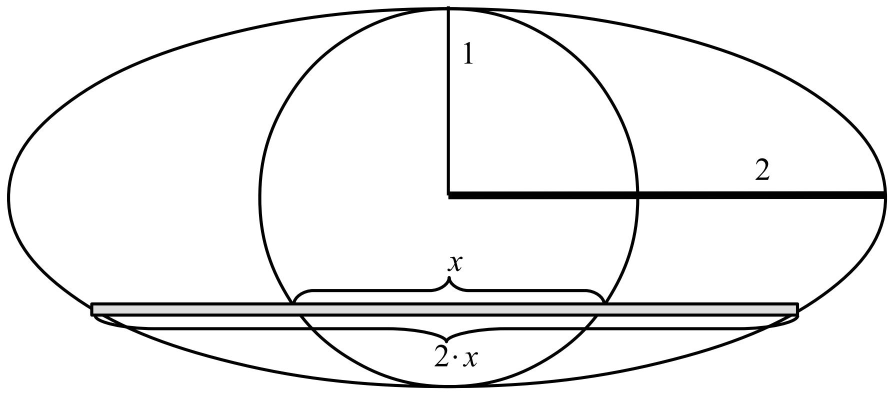
Il y a N triangle, donc l'aire du disque = l'aire totale = $N\cdot Aire = \frac{1}{2}\cdot \textit{périmètre}\cdot r$

Si on sait que le périmètre vaut : $2\cdot\pi\cdot r$, on obtient : Aire du disque = $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot r = \pi\cdot r^2$.

Une démonstration animée se trouve sous la référence : "Le camembert d'Archimède" de la page Web : http://www.juggling.ch/gisin/coursmath1ere/index.html
Lien direct : http://www.juggling.ch/gisin/coursmath1ere/Le_theoreme_aire_disque.mp4

---

❸ **Méthode de découpe en fine tranches pour déterminer l'aire d'une ellipse.**
Pour chaque tranche horizontale, grise sur le dessin ci-dessous, si la longueur qui intersecte le disque est x, alors la longueur qui intersecte l'ellipse est $2 \cdot x$.



En s'inspirant de la méthode de Bonaventura Cavalieri, on découpe l'ellipse en une multitude de fines tranches horizontale. L'aire de chaque tranche est 2 fois plus grande que l'aire de la tranche correspondante qui découpe le disque.
Donc la somme des aires des tranches est 2 fois plus grande que l'aire du disque.
Cette somme des aires correspond à l'aire de l'ellipse, qui vaut donc :
aire de l'ellipse = 2 · aire du disque = $2 \cdot \pi$.

Le symbole $\sum$ **pour noter des sommes.** Référez-vous à la page 7 du cours !

❹ Calculez les sommes suivantes :

a) $\sum_{i=1}^{5} 0,1 \cdot i^2 = 0,1 \cdot 1^2 + 0,1 \cdot 2^2 + 0,1 \cdot 3^2 + 0,1 \cdot 4^2 + 0,1 \cdot 5^2 = 5,5$

b) $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \approx 1,83333333$

c) $\sum_{i=4}^{8} \frac{1}{i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \approx 0,88452381$

d) $\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} + \sum_{i=4}^{8} \frac{1}{i}$ = la somme des deux résultats précédents ≈ 2,717857143

---

❺ En appliquant la définition relative au symbole $\sum$ et les propriétés des nombres réels, démontrez les trois propriétés suivantes (très utiles en statistiques), avec $N \in \mathbb{N}$; $\lambda, k \in \mathbb{R}$:

a) $\sum_{i=1}^{N} (x_i + y_i) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + ... + x_N + y_N$ écriture développée

$= x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_N + y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_N$ par commutativité

$= \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} y_i$ écriture avec le symbole $\sum$

b) $\sum_{i=1}^{N} (\lambda \cdot x_i) = \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 + \lambda \cdot x_3 + ... + \lambda \cdot x_N$ écriture développée

$= \lambda \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_N)$ mise en évidence

$= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$ écriture avec le symbole $\sum$

c) $\sum_{i=1}^{N} k = \underbrace{k + k + k + ... + k}_{N \text{ fois}}$ écriture développée

$= N \cdot k = k \cdot N$ définition de la multiplication.

---

❻ Soit la somme . $S_N = \sum_{i=1}^{N} i$

$S_3 = 1+2+3=6$; $S_4 = 1+2+3+4=10$; $S_5 = 1+2+3+4+5=15$

$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100$.

$S_{100} = 100 + 99 + 98 + 97 + ... + 3 + 2 + 1$ On additionne verticalement par colonne

$2 \cdot S_{100} = 101 + 101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101 + 101 = 101 \cdot 100$

Donc $S_{100} = \frac{101 \cdot 100}{2} = 101 \cdot 50 = 5'050$.

---

❼ Par curiosité,

Montrez que $S_{2,N} = \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N\cdot(N+1)\cdot(2N+1)}{6}$ pour n'importe quelle valeur de . $N \in \mathbb{N}$

Voici une astuce ingénieuse pour calculer la somme désirée :

N $N-1$ $N-2$ ... 3 2 1		N N ... N N N		1 2 3 ... N−1 N		$2N+1$ $2N+1$ ..... $2N+1$ $2N+1$ $2N+1$
N $N-1$ $N-2$ ... 3 2		$N-1$ $N-1$ ... $N-1$ $N-1$		2 3 ... $N-1$ N		$2N+1$ $2N+1$ ..... $2N+1$ $2N+1$
N $N-1$ $N-2$ ... 3	+	$N-2$ $N-2$ $N-2$	+	3 ... $N-1$ N	=	$2N+1$ $2N+1$ ..... $2N+1$
... $N-2$		...		...		...
N $N-1$		2 2		$N-1$ N		$2N+1$ $2N+1$
N		1		N		$2N+1$

Dans le cas $N = 4$, les blocs donnent :

Voici une astuce ingénieuse pour calculer la somme désirée :

4 3 2 1		4 4 4 4		1 2 3 4		9 9 9 9
4 3 2		3 3 3		2 3 4		9 9 9
4 3	+	2 2 2	+	3 4	=	9 9
4		1		4		9

Chacun des trois bloques triangulaires du membre de gauche correspond à la somme cherchée.
Le membre de droite vaut $(2N + 1)$ fois une somme vue dans l'exercice précédent.
L'égalité entre les deux membres permet d'exprimer simplement la somme cherchée en fonction de N.

Le membre de droite vaut $(2N + 1) \cdot (1 + 2 + 3 + ... + N)$, qui vaut $(2N+1)\cdot\frac{N\cdot(N+1)}{2}$.

L'égalité entre les deux membres permet d'exprimer simplement la somme cherchée en fonction de N.

Donc $3\cdot S_{2,N} = \frac{(2N+1)\cdot N\cdot(N+1)}{2}$.

On a donc montré l'égalité désirée $S_{2,N} = \frac{N\cdot(N+1)\cdot(2N+1)}{6}$.
