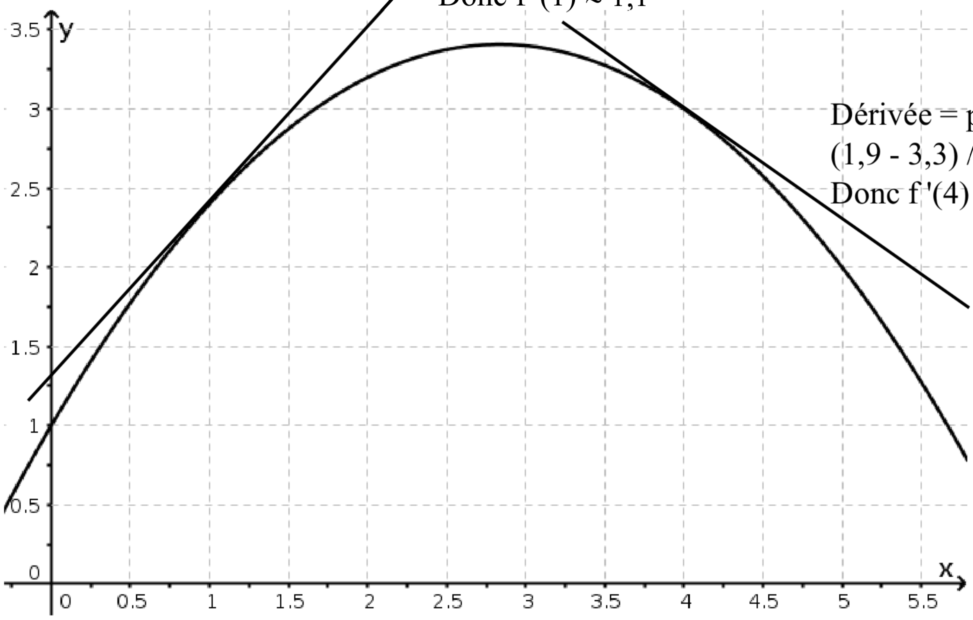
❶ Déterminez géométriquement au mieux la dérivée de la fonction donnée graphiquement ci-dessous, en x = 1 et en x = 4.

Dérivée = pente ≈ (3,5 - 1,3) / (2 - 0) = 1,1
Donc f '(1) ≈ 1,1



Dérivée = pente ≈
(1,9 - 3,3) / (5,5 - 3,5) = –0,7
Donc f '(4) ≈ –0,7

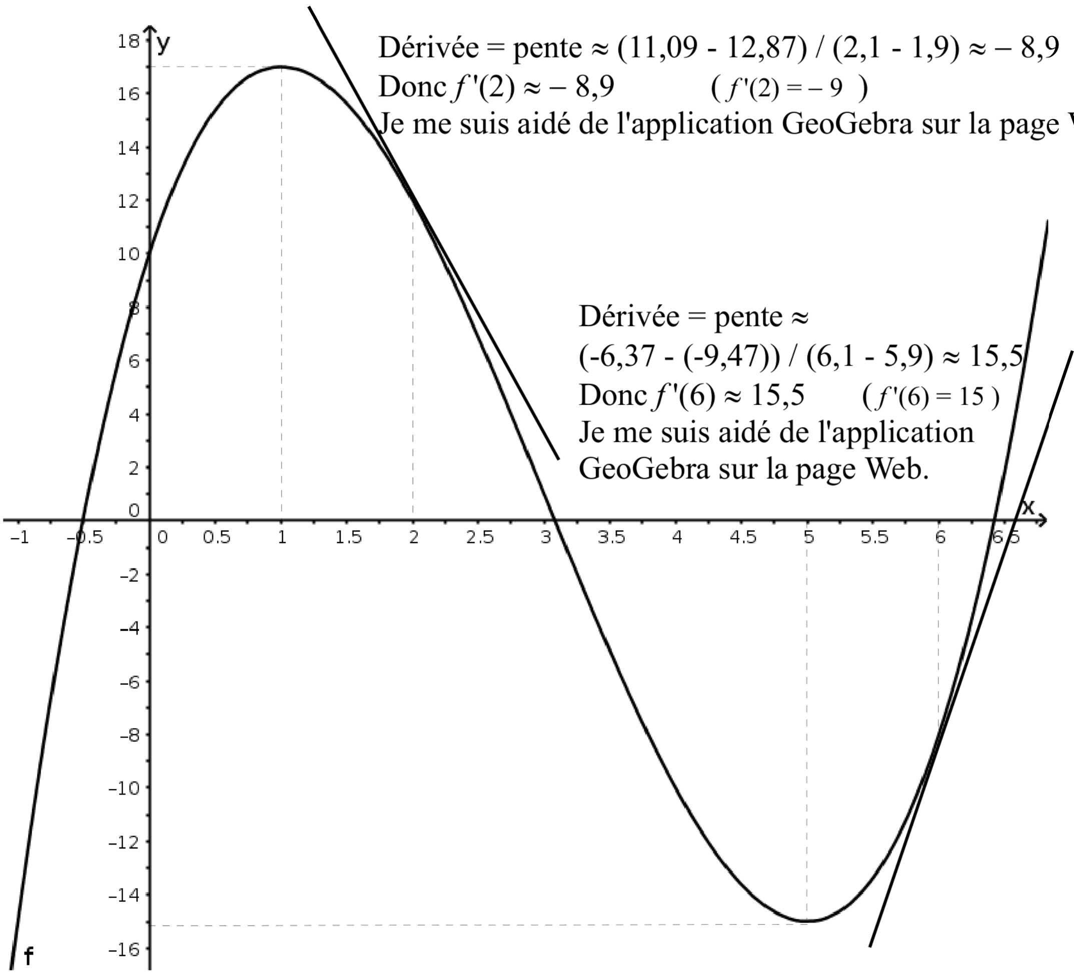
---

❷ a) La fonction f est croissante sur les intervalles [-1,1 ; 1] et [5 ; 6,7].
La réponse : f est croissante sur les intervalles]– ∞ ; 1] et [5 ; ∞[est aussi valable.
Elle est décroissante sur l'intervalle [1 ; 5].

b. les coordonnées des extremums de f sont : (1 ; 17) et (5 ; - 15).

c.

Dérivée = pente ≈ (11,09 - 12,87) / (2,1 - 1,9) ≈ – 8,9
Donc $f\,'(2) \approx -8{,}9$ ($f\,'(2) = -9$)
Je me suis aidé de l'application GeoGebra sur la page Web.



Dérivée = pente ≈
(-6,37 - (-9,47)) / (6,1 - 5,9) ≈ 15,5
Donc $f\,'(6) \approx 15{,}5$ ($f\,'(6) = 15$)
Je me suis aidé de l'application GeoGebra sur la page Web.

❸ À l'aide des règles de dérivation, calculez les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f'(x)=(3x^6-11x^3+x^2-8x-3)'=18x^5-33x^2+2x-8$

b) $f'(x)=\left(\frac{2}{5}x^5-\frac{8}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)'=\left(\frac{2}{5}x^5-8\cdot x^{-1}-5\cdot x^{-2}+x^{-3}\right)'=2x^4+\frac{8}{x^2}+\frac{10}{x^3}-\frac{3}{x^4}$

c) $f'(x)=(x\cdot\sqrt{x})'=\left(x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}$

d) $f'(x)=\left(x^2\cdot\sqrt[5]{x^3}\right)'=\left(x^2\cdot x^{\frac{3}{5}}\right)'=\left(x^{\frac{13}{5}}\right)'=\frac{13}{5}\cdot x^{\frac{13}{5}-1}=\frac{13}{5}\cdot x^{\frac{8}{5}}=\frac{13}{5}\cdot\sqrt[5]{x^8}$

e) $f'(x)=\left(\frac{3x^3+2x^6}{6x^4}\right)'=\left(\frac{1}{2}\cdot x^{-1}+\frac{1}{3}\cdot x^2\right)'=-\frac{1}{2}\cdot x^{-2}+\frac{2}{3}\cdot x=-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3}\cdot x$ Quand c'est possible, simplifiez

f) $f'(x)=\left((5x^2-7x)^3\right)'=3\cdot(5x^2-7x)^2\cdot(5x^2-7x)'=3\cdot(5x^2-7x)^2\cdot(10x-7)$

g) $f'(x)=\left(\frac{2x^4+x}{x^3}\right)'=\left(2x+x^{-2}\right)'=2-2\cdot x^{-3}=2-\frac{2}{x^3}$ Quand c'est possible, simplifiez

h) $f'(x)=\left(\frac{x^2-25}{x+5}\right)'=\left(\frac{(x-5)\cdot(x+5)}{x+5}\right)'=(x-5)'=1$ Quand c'est possible, factorisez et simplifiez

i) $f'(x)=\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'=\frac{\sin'(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot\cos'(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$

$f'(x)=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}$

$f'(x)=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$ est une autre solution identique.

j) $f'(x)=\left(\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)'=(1)'=0$

k) $f'(x)=\left(4\cdot\cos^3(x)\right)'=4\cdot3\cdot\cos^2(x)\cdot(\cos(x))'=12\cdot\cos^2(x)\cdot(-\sin(x))=-12\cdot\cos^2(x)\cdot\sin(x)$

l) $f'(x)=\left(4\cdot\cos(x^3)\right)'=4\cdot(-\sin(x^3))\cdot(x^3)'=-4\cdot\sin(x^3)\cdot3\cdot x^2=-12\cdot\sin(x^3)\cdot x^2=-12\cdot x^2\cdot\sin(x^3)$

m) $f'(x)=\left(\sin^4(x^2)\right)'=4\cdot\sin^3(x^2)\cdot\left(\sin(x^2)\right)'=4\cdot\sin^3(x^2)\cdot\cos(x^2)\cdot(x^2)'=8\cdot x\cdot\cos(x^2)\cdot\sin^3(x^2)$

n) $f'(x)=\left(\sqrt{x^4-7x}\right)'=\left((x^4-7x)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot(x^4-7x)^{-\frac{1}{2}}(x^4-7x)'=\frac{1}{2}\cdot(x^4-7x)^{-\frac{1}{2}}(4x^3-7)$

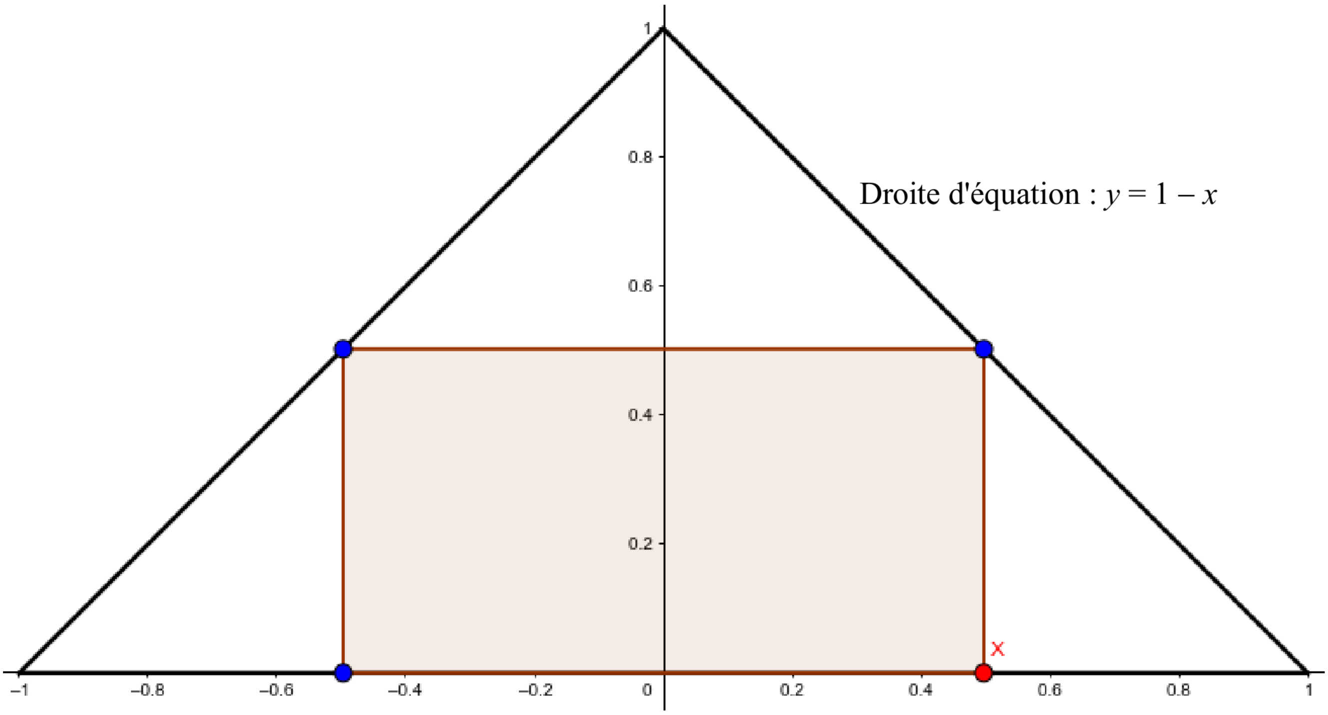
$f'(x)=\frac{4x^3-7}{2\cdot\sqrt{x^4-7x}}$

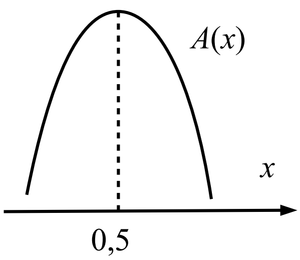
o) $f'(x)=\left(9\cdot e^{x^2}\right)'=9\cdot e^{x^2}\cdot(x^2)'=9\cdot e^{x^2}\cdot2x=18\cdot x\cdot e^{x^2}$

p) $f'(x)=\left(\ln(x^4+7x^2)\right)'=\frac{1}{x^4+7x^2}\cdot(x^4+7x^2)'=\frac{4x^3+14x}{x^4+7x^2}=\frac{4x^2+14}{x^3+7x}$

❹ Déterminez les dimensions du rectangle d'aire maximale, qui est inclus dans le triangle rectangle isocèle dessiné ci-dessous.
(Si X = 0,8, la largeur de la base est de 1,6, la hauteur de 0,2, donc l'aire du rectangle vaut 0,32 unité^2)
(Si X = 0,6, la largeur de la base est de 1,2, la hauteur de 0,4, donc l'aire du rectangle vaut 0,48 unité^2)

La page Web : http://www.juggling.ch/gisin/geogebra/Optimisation_rectangle_dans_triangle.html peut aider.





Longueur de la base du rectangle $2\,x$
Hauteur du rectangle = $1 - x$
Aire du rectangle = $A(x) = 2 \cdot x \cdot (1 - x) = 2 \cdot x - 2 \cdot x^2$
L'aire est maximale lorsque $A'(x) = 0$
$A'(x) = 2 - 4 \cdot x$. Cela s'annule en $x = 0{,}5$.
C'est bien un maximum, car $A'(x) > 0$ si $x < 0{,}5$ et $A'(x) < 0$ si $x > 0{,}5$.
Le rectangle a une base de longueur 1 et une hauteur de 0,5 unité.
Sont aire est de 0,5 unité^2, soit la moitié de l'aire du triangle.