Géométrie analytique dans l'espace

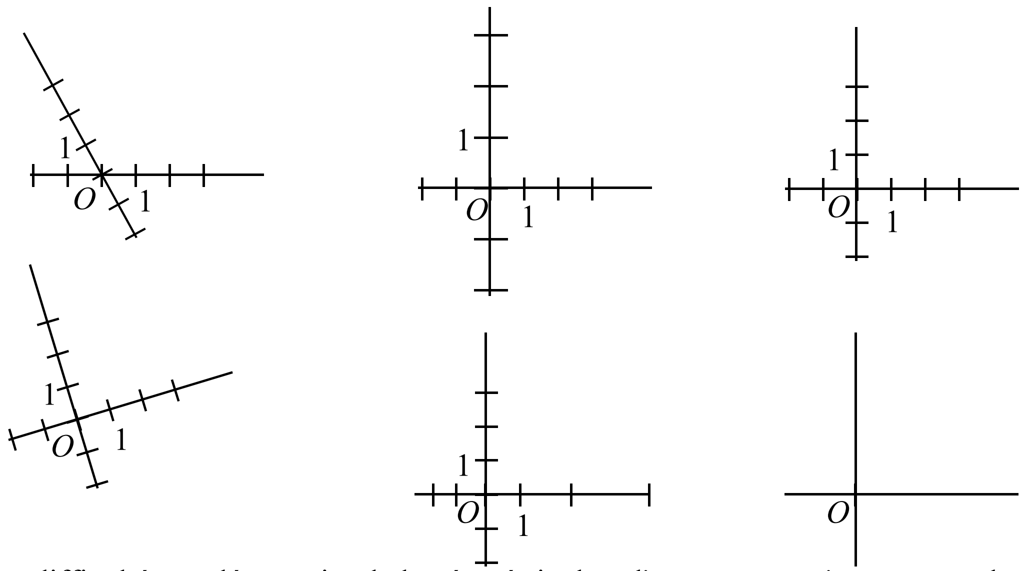
1. Introduction

L'étude de la géométrie fit un grand pas en avant lorsqu'on constata que les points du plan ou de l'espace peuvent être représentés par des couples ou des triplets de nombres et que les figures géométriques peuvent être représentées par des équations algébriques. Cette idée fut initiée par le mathématicien Français René Descartes (1596-1650) en 1637 dans l'appendice de son livre : "Discours de la méthode". Cette utilisation de l'algèbre par la géométrie se nomme : "**la géométrie analytique**".
L'idée de base de la géométrie analytique est que les études géométriques peuvent être réalisées au moyen de calculs algébriques. On peut dire pour simplifier que c'est de la géométrie sans dessin !

2. Repère orthonormé

Définition :
Un **repère orthonormé** dans un **plan** est un système de ***deux axes*** *perpendiculaires* et *la distance entre deux graduations successives, égale une unité de longueur.* L'intersection des deux axes est prise comme *origine*.
Un **repère orthonormé** dans l'**espace** est un système de ***trois axes*** *perpendiculaires* et *la distance entre deux graduations successives, égale une unité de longueur.* L'intersection des trois axes est prise comme *origine*.

Exercice 2.1 : Parmi les repères suivant, lesquels sont des repères orthonormés ?



Une difficulté supplémentaire de la géométrie dans l'espace, est qu'on ne peut plus dessiner les figures.

Dans la suite, l'espace sera muni d'un repère orthonormé.
Ainsi, chaque point P de l'espace peut être représenté par un triplet $\langle p_x \,;\, p_y \,;\, p_z \rangle$ de trois nombres réels qui se nomment les **coordonnées** du point P. Réciproquement, à chaque triplet de trois nombres réels correspond un point de l'espace.

Il y a donc une **correspondance bijective** entre les points de l'espace et les triplets de nombres réels.
C'est pour cette raison qu'on parle souvent de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Notations :
$P = \langle p_x \,;\, p_y \,;\, p_z \rangle$; $P = (p_x \,;\, p_y \,;\, p_z)$; $P\langle p_x \,;\, p_y \,;\, p_z \rangle$; $P(p_x \,;\, p_y \,;\, p_z)$.

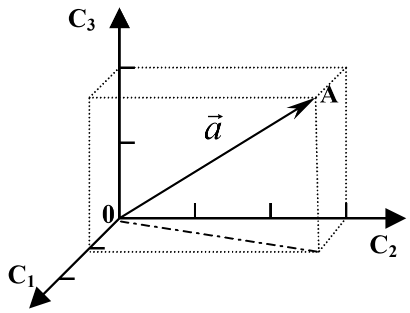
3. Vecteurs

<u>Définitions :</u>
Un **vecteur** est un objet mathématique caractérisé par **une direction**, **un sens** et **une norme**. Il est pratique de le représenter graphiquement par une flèche.
Les vecteurs sont des objets très utilisés en physique, pour représenter des forces, des vitesses, des accélérations; ils sont à différencier des **scalaires** (ou nombres réels), qui ont une norme, mais ni direction, ni sens.

Placé dans un **repère orthonormé**, tout point A de l'espace correspond à un vecteur $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$.

Les coordonnées du point A sont respectivement les **composantes** du vecteur $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$:

Si $\langle 1 \ ; \ 3 \ ; \ 2\rangle$ sont les coordonnées du point A, alors $\vec{a}=\langle 1 \ ; \ 3 \ ; \ 2\rangle$



<u>Opérations sur les vecteurs :</u>
Usuellement, on note $\langle a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ a_3\rangle$ les composantes d'un vecteur $\vec{a}$, où $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Le vecteur dont toutes les composantes sont nulles, est appelé **vecteur nul**, et noté $\vec{0}$.
Ainsi le vecteur $\vec{0}=\langle 0 \ ; \ 0 \ ; \ 0\rangle$ ne possède pas de direction, et naturellement pas de sens.
La **norme du vecteur** $\vec{a}$ est par définition la longueur du segment OA. Elle s'écrit : $\|\vec{a}\|$ ou $\|\overrightarrow{OA}\|$.

Si $\vec{a}=\langle 1 \ ; \ 3 \ ; \ 2\rangle$, calculez sa norme : $\|\vec{a}\|$ = ...

De manière générale, si $\vec{a}=\langle a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ a_3\rangle$ exprimez sa norme en fonction de ses composantes.

$\|\vec{a}\|$ = ...

L'**addition** de deux vecteurs est une *opération interne*. Elle est définie par :

$$\boxed{\vec{a}+\vec{b}=\langle a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ a_3\rangle+\langle b_1 \ ; \ b_2 \ ; \ b_3\rangle=\langle a_1+b_1 \ ; \ a_2+b_2 \ ; \ a_3+b_3\rangle}$$

On vérifie facilement la **relation de Chasle** : $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$

L'addition vectorielle est commutative, associative, possède un élément neutre qui est $\vec{0}$.

A tout vecteur correspond un unique « vecteur opposé » : $-\vec{a}=\langle -a_1 \ ; \ -a_2 \ ; \ -a_3\rangle$.

La **différence** de deux vecteurs est définie par : $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

La **multiplication par un scalaire** est une *opération externe*. Elle est définie par :

$$\boxed{\lambda\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\langle a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ a_3\rangle=\langle \lambda\cdot a_1 \ ; \ \lambda\cdot a_2 \ ; \ \lambda\cdot a_3\rangle} \quad \text{où } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Multiplier un vecteur par un scalaire revient à modifier sa norme, éventuellement son sens, mais ne modifie en aucun cas sa direction !

La relation de Chasle donne : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, donc $\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}$.

Exercice 3.1 :

On donne $A=\langle 1;3;5\rangle$; $B=\langle -2;1;-10\rangle$; $C=\langle 0;3;0\rangle$; $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$; $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$. Calculez :

$\vec{u}+\vec{v}=$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=$

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=$

$\overrightarrow{AB}=$

$\overrightarrow{AC}=$

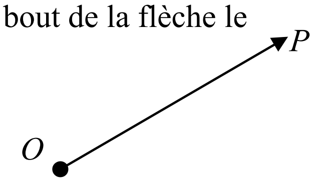
$\|\vec{u}\|=$

$\|-5\vec{u}\|=$

$\|\overrightarrow{AB}\|=$

4. L'espace $\mathbb{R}^3$.

Dans l'espace muni d'une origine O, à chaque point P, correspond le vecteur $\overrightarrow{OP}$.
De même à chaque vecteur correspond le point P de l'espace se trouvant au bout de la flèche le représentant et partant de l'origine O.



En conséquence :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé ayant comme origine le croisement des axes x ; y et z, il y a une **correspondance bijective** entre :
i) les **points de l'espace** ;
ii) les **triplets de nombres réels** ;
iii) les **vecteurs** (de dimension 3).

Cette remarque permet de confondre l'**espace**, les **triplets de nombres** et les **vecteurs** (de dimension 3).

Ainsi, à chaque vecteur correspond un unique triplet de nombres réels, à savoir les coordonnées $\langle p_x ; p_y ; p_z\rangle$ du point correspondant à ce vecteur.

Inversement, à chaque triplet $\langle p_x ; p_y ; p_z\rangle$ correspond le vecteur $\overrightarrow{OP}$, où P est le point de coordonnées $\langle p_x ; p_y ; p_z\rangle$.

Conventions et notations :

On écrira : $\vec{p}=\langle p_x ; p_y ; p_z\rangle$ pour désigner le vecteur $\overrightarrow{OP}$ correspondant au couple $\langle p_x ; p_y ; p_z\rangle$.
On écrira : $P=\langle p_x ; p_y ; p_z\rangle$ ou $P(p_x ; p_y ; p_z)$ pour désigner le point P correspondant au couple $\langle p_x ; p_y ; p_z\rangle$.
Les nombres p_x ; p_y et p_z sont appelés les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{OP}$.
$\mathbb{R}^3$ dénotera indifféremment les **triplets de nombres réels**, les **vecteurs** de dimension 3 et l'**espace**.

5. Angles et produit scalaire dans l'espace $\mathbb{R}^3$

<u>Exercice 5.1</u>

On donne $O=\langle 0\,;0\,;0\rangle$; $A=\langle 3\,;1\,;0\rangle$; $B=\langle 5\,;2\,;1\rangle$. Calculez :

$\|\overrightarrow{OA}\|^2 =$

$\|\overrightarrow{OB}\|^2 =$

$\overrightarrow{AB} =$

$\|\overrightarrow{AB}\|^2 =$

Calculez l'angle φ entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Un schéma et le théorème du cosinus aideront !

Théorème du cosinus : $c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)$

Exercice 5.2

Le but est de refaire l'exercice 5.1, entièrement littéralement, ce qui mènera à des grandes simplifications et à la définition du **produit scalaire**.

On donne $O=\langle 0;0;0\rangle$; $A=\langle a_1;a_2;a_3\rangle$; $B=\langle b_1;b_2;b_3\rangle$. Exprimez littéralement :

$\|\overrightarrow{OA}\|^2 =$

$\|\overrightarrow{OB}\|^2 =$

$\overrightarrow{AB} =$

$\|\overrightarrow{AB}\|^2 =$

Exprimez le cosinus de l'angle entre les vecteurs $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ en fonction de a_1 ; a_2 ; a_3 ; b_1 ; b_2 ; b_3. Nommez $\cos(\varphi)$ ce cosinus.

Un schéma et le théorème du cosinus aideront ! Théorème du cosinus : $c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)$

Développez le numérateur, de l'expression : $\cos(\varphi) = \dfrac{\ldots}{2\cdot\|\overrightarrow{OA}\|\cdot\|\overrightarrow{OB}\|}$, qui se simplifiera beaucoup.

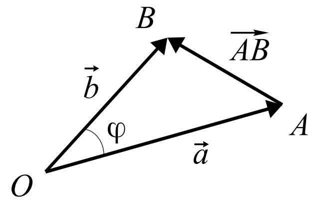
Ce qui précède, justifie les deux définitions du produit scalaire de la page suivante :

Définition :

Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$. Notons φ l'angle entre ces deux vecteurs.

On définit le **produit scalaire** de ces deux vecteurs par : $\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi)}$

Définition équivalente : $\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}$



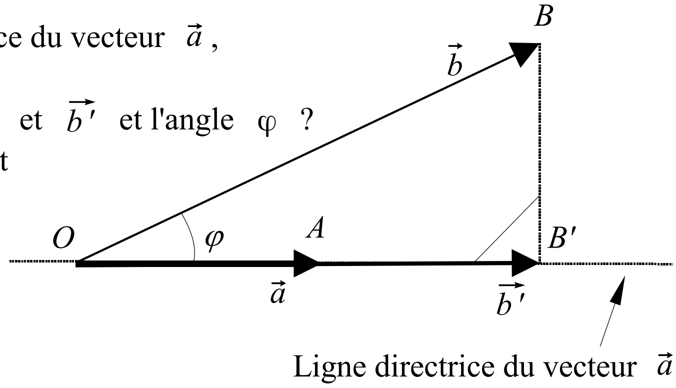
C'est un théorème.
Sa démonstration a été vu dans l'exercice 5.2 de la page précédente !

Interprétation géométrique du produit scalaire :

Projetons orthogonalement $\vec{b}$ sur la ligne directrice du vecteur $\vec{a}$, pour obtenir le nouveau vecteur $\vec{b}\,' = \overrightarrow{OB}\,'$.

° Quel lien y a-t-il entre les normes des vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{b}\,'$ et l'angle φ ?

° Quel lien y a-t-il entre le produit scalaire $\vec{a} \bullet \vec{b}$ et les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}\,'$?



Propriétés :

Le résultat de ce produit est un scalaire, c'est-à-dire un nombre réel. D'où son nom !

Le produit scalaire est commutatif : $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$! pourquoi ?

Sous quelle(s) condition(s) le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est-il nul ?

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ ....

Sous quelle(s) condition(s) le produit scalaire de deux vecteurs est-il négatif ?

$\vec{a} \bullet \vec{b} < 0 \Leftrightarrow$ ....

Le produit scalaire se comporte comme une opération distributive : $\vec{a}\bullet(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{a}\bullet\vec{c}$.

L'addition dans le membre de gauche est une addition vectorielle, alors que dans le membre de droite, c'est une addition entre deux nombres !

Les parenthèses peuvent être déplacées : $(\lambda\cdot\vec{a})\bullet\vec{b} = \lambda\cdot(\vec{a}\bullet\vec{b})$

La norme d'un vecteur se calcule facilement à l'aide du produit scalaire : $\boxed{\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}}}$

Interprétez géométriquement l'inégalité : $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$.

En résumé :
Le produit scalaire de deux vecteurs s'obtient en effectuant la somme des produits « composante par composante » de chacun des deux vecteurs : $\boxed{\vec{a}\bullet\vec{b} = a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}$

Le produit scalaire permet de calculer l'angle φ entre deux vecteurs : $\boxed{\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}}$

Il possède des propriétés attendues.

Attention, cela n'a aucun sens de diviser par un vecteur !

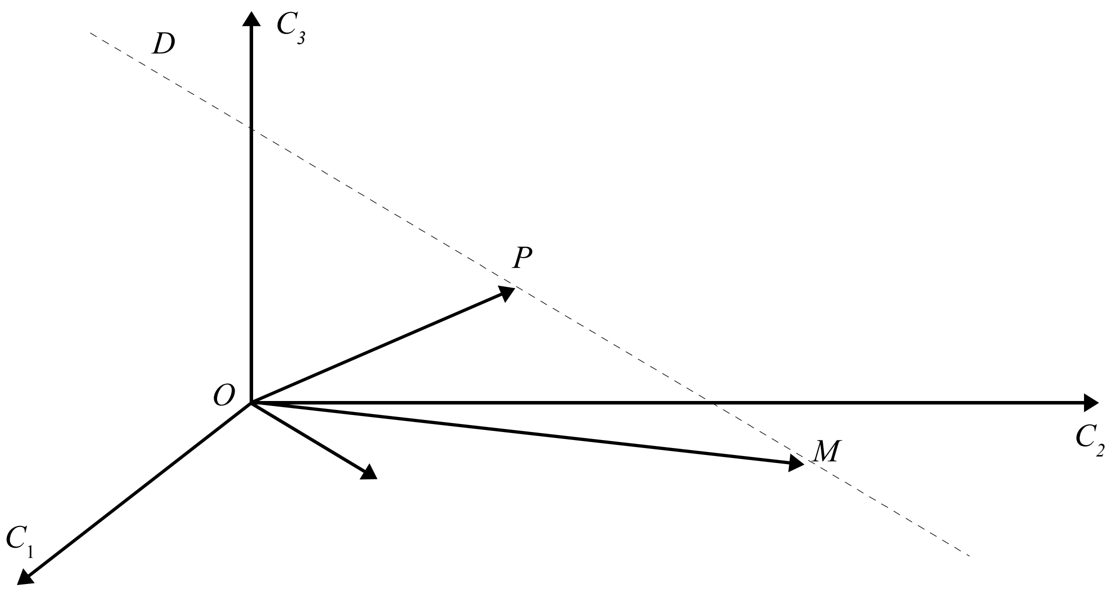
Exercice 5.3

On donne $\vec{a}=\langle 3;1;0\rangle$; $\vec{b}=\langle 5;2;1\rangle$. A l'aide du produit scalaire, calculez l'angle φ entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercice 5.4

Montrez à l'aide du produit scalaire que les deux vecteurs $\vec{a}=\langle 3;-5;6\rangle$ et $\vec{b}=\langle 7;3;-1\rangle$ sont perpendiculaires.

6. Droites dans l'espace $\mathbb{R}^3$.



Pour construire une droite D dans l'espace $\mathbb{R}^3$, il faut connaître 2 *types de données* :

° L'**orientation** de la droite D, fournie par un **vecteur directeur** $\vec{d}=\langle d_1 \ ; \ d_2 \ ; \ d_3\rangle$ et

° la **position** de la droite D, fournie par un **vecteur position** $\vec{p}=\langle p_1 \ ; \ p_2 \ ; \ p_3\rangle$.

Notons $\langle x \ ; \ y \ ; \ z\rangle$ les coordonnées d'un point quelconque M de la droite D.

La **relation de Chasles** permet d'écrire $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}$.

Or $\overrightarrow{PM}$ est un multiple du vecteur $\vec{d}$. Donc $\overrightarrow{PM} = \lambda\cdot\vec{d}$ pour un $\lambda\in\mathbb{R}$.

Notons $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$.

<u>Conséquence :</u> $\boxed{\vec{v} = \vec{p}+\lambda\cdot\vec{d}}$.

C'est l'**équation vectorielle** de la droite D , de vecteur position $\vec{p}$ et de vecteur directeur $\vec{d}$.

Lorsque le coefficient λ parcourt l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on obtient <u>tous</u> les points de la droite.

On parle d'**équation paramétrique** lorsqu'elle est écrite sous forme de composantes :

$$D \ : \ \begin{cases} x = p_1+\lambda\cdot d_1 \\ y = p_2+\lambda\cdot d_2 \\ z = p_3+\lambda\cdot d_3 \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R} .$$

<u>Remarques :</u>

1) Chaque droite possède une infinité de vecteurs directeurs, tous "colinéaires" ou "multiples".
2) Une droite possède également une infinité de vecteurs positions, correspondant chacun à un point connu de la droite.
3) La connaissance de deux points de la droite est suffisante pour la déterminer entièrement. En effet, si la droite D contient les points A et B, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de D et l'un des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{OB}$ peut jouer le rôle de vecteur position.

Si l'on isole le paramètre dans chacune des équations paramétriques de D, on obtient

les équations cartésiennes de la droite D : $(\lambda =)$ $\boxed{\dfrac{x-p_1}{d_1}=\dfrac{y-p_2}{d_2}=\dfrac{z-p_3}{d_3}}$

Naturellement, une même droite peut être déterminée par des équations cartésiennes différentes, selon le choix d'un vecteur directeur et d'un vecteur position.

Exercice 6.1 :

Considérons la droite définie par : $D_1\ :\ x-2=\dfrac{3-y}{2}=\dfrac{z+1}{4}$.

Donnez un vecteur directeur et un vecteur position de cette droite :

Cette droite contient-elle les points $A=\langle 1\ ;\ 5\ ;\ -5\rangle$ et $B=\langle 5\ ;\ -3\ ;\ 7\rangle$?

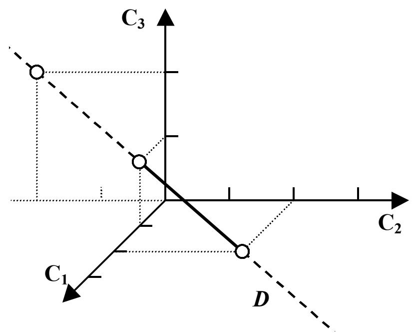
Donnez une équation vectorielle de la droite D_2, parallèle à D_1, et passant par $\langle 0\ ;\ 0\ ;\ 3\rangle$.

Graphiquement :

Pour représenter une droite D dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on calcule et dessine **ses traces**, c'est-à-dire les coordonnées de ses points d'intersection avec les plans du repère.

Exemple :

Soit la droite d'équation $D : \vec{v} = \lambda\cdot\langle\ 1\ ;\ 2\ ;-1\ \rangle + \langle\ 4\ ;\ 6\ ;\ -2\ \rangle$; vérifiez que sa forme cartésienne est $D : \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$.



Sa trace sur le sol C_1C_2 se calcule en posant :

$z=0 \quad\Rightarrow\quad$ trace = $\langle 2\ ;\ 2\ ;\ 0\rangle$

Sa trace sur la fenêtre C_1C_3 se calcule en posant :

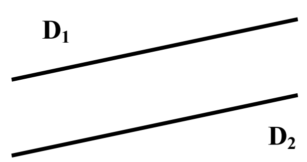
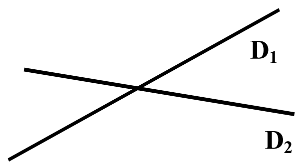
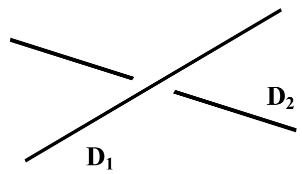
$y=0 \quad\Rightarrow\quad$ trace = $\langle 1\ ;\ 0\ ;\ 1\rangle$

Sa trace sur le tableau C_2C_3 se calcule en posant :

$x=0 \quad\Rightarrow\quad$ trace = $\langle 0\ ;\ -2\ ;\ 2\rangle$

Une droite possède-t-elle toujours trois traces ?

Etudions à présent les *positions relatives* de deux droites placées dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Parallèles $D_1 \neq D_2$	**Sécantes**	**Gauches**
		
• $\overrightarrow{V}_{dir}$ colinéaires	• $\overrightarrow{V}_{dir}$ non colinéaires	• $\overrightarrow{V}_{dir}$ non colinéaires
• **aucun** $\overrightarrow{V}_{pos}$ **commun**	• **exactement un** $\overrightarrow{V}_{pos}$ **commun**	• **aucun** $\overrightarrow{V}_{pos}$ **commun**
• $D_1 \cap D_2 = \emptyset$	• $D_1 \cap D_2 = \{(p_1;p_2;p_3)\}$	• $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

7. Plans dans l’espace $\mathbb{R}^3$.

Pour construire un plan π dans l’espace $\mathbb{R}^3$, il faut connaître 2 *types de données* :

- L’**orientation** du plan π, donnée par deux **vecteurs directeurs** $\vec{d}$ **et** $\vec{e}$, non nuls et non colinéaires.
- La **position** du plan π, donnée par un **vecteur position** $\vec{p}=\langle p_1 \ ; \ p_2 \ ; \ p_3\rangle$.

Notons $\langle x \ ; \ y \ ; \ z\rangle$ les coordonnées d’un point quelconque M du plan π.

La **relation de Chasles** permet d'écrire $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}$.

Le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est contenu dans le plan π. Donc il est une combinaison linéaire des deux vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{e}$: $\overrightarrow{PM} = \lambda\cdot\vec{d}+\mu\cdot\vec{e}$, pour un $\lambda\in\mathbb{R}$ et un $\mu\in\mathbb{R}$.

Notons $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$.

<u>Conséquence :</u> $\boxed{\vec{v} = \vec{p}+\lambda\cdot\vec{d}+\mu\cdot\vec{e}}$.

C'est l’**équation vectorielle** du plan π, de vecteur position $\vec{p}$ et de vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{e}$. Lorsque les coefficients λ et μ parcourent l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on obtient <u>tous</u> les points du plan π.

On parle d'**équation paramétrique** lorsqu'elle est écrite sous forme de composantes :

$$\pi \ : \begin{cases} x = p_1+\lambda\cdot d_1+\mu\cdot e_1 \\ y = p_2+\lambda\cdot d_2+\mu\cdot e_2 \\ z = p_3+\lambda\cdot d_3+\mu\cdot e_3 \end{cases} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

<u>Remarques :</u>

La connaissance de trois points <u>non alignés</u> du plan est suffisante. En effet, si un plan contient les points A, B et C, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ peuvent jouer le rôle de vecteurs directeurs, tandis que le vecteur position peut être à choix $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ou $\overrightarrow{OC}$.

Il est possible de faire disparaître les paramètres λ et μ de ce système, pour n'obtenir plus qu'une seule équation en x, y et z. C'est l'**équation cartésienne** du plan π.

<u>Exercice 7.1 :</u>

Soit le plan π, passant par les trois points :

$A=\langle 1 \ ; \ 2 \ ; \ 1 \rangle$; $B=\langle -1 \ ; \ 1 \ ; \ 3 \rangle$ et $C=\langle 3 \ ; -4 \ ; -5\rangle$.

- Vérifiez que $\vec{v} = \langle 1 \ ; \ 2 \ ; \ 1 \rangle+\lambda\cdot\langle -2 \ ; -1 \ ; \ 2 \rangle+\mu\cdot\langle 2 \ ; -6 \ ; -6 \rangle$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ est une équation vectorielle de ce plan. (Les valeurs correspond aux points A, B et C de λ et μ sont simples.)
- Vérifiez que $9x-4y+7z = 8$ est l'équation cartésienne ce de plan.
- Vérifiez que le vecteur $\vec{n} = \langle 9 \ ; -4 \ ; \ 7\rangle$ est perpendiculaire à ce de plan.

Comment déterminer l'équation cartésienne d'un plan ?

Soit un plan π d'équation vectorielle : $\vec{v} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{d} + \mu \cdot \vec{e}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et
d'équation cartésienne : $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z = \delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

<u>Montrons que le vecteur $\vec{n} = \langle \alpha , \beta , \gamma \rangle$ est perpendiculaire au plan π.</u>

L'équation cartésienne s'écrit aussi sous la forme : $\vec{n} \bullet \vec{v} = \delta$, car $\vec{v} = \langle x , y , z \rangle$.
Puisque : $\vec{v} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{d} + \mu \cdot \vec{e}$, on a : $\vec{n} \bullet \left(\vec{p} + \lambda \cdot \vec{d} + \mu \cdot \vec{e} \right) = \delta$.

Donc $\vec{n} \bullet \vec{p} + \lambda \cdot \vec{n} \bullet \vec{d} + \mu \cdot \vec{n} \bullet \vec{e} = \delta$ = constante, quels que soient les valeurs de λ et de μ .

Ceci n'est possible que si $\vec{n} \bullet \vec{d} = 0$ et $\vec{n} \bullet \vec{e} = 0$.
Donc le vecteur $\vec{n}$ est perpendiculaire au deux vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{e}$ du plan π .

<u>Conclusion :</u>
Le vecteur $\boxed{\vec{n} = \langle \alpha , \beta , \gamma \rangle}$ **est perpendiculaire au plan π .**

Pour trouver l'équation cartésienne du plan π, il faut trouver un vecteur perpendiculaire à ce plan !

<u>Exercice 7.2 :</u>
Soit le plan π, passant par les trois points :
$A = \langle 1 \; ; \; 0 \; ; \; 0 \rangle$; $B = \langle 0 \; ; \; 1 \; ; \; 0 \rangle$ et $C = \langle 0 \; ; \; 0 \; ; \; 1 \rangle$.

- Déterminez deux vecteurs directeurs de ce plan.
- Déterminez un vecteur perpendiculaire à ce plan.
- Déterminez l'équation cartésienne de ce plan.

<u>Représentation graphique précise d'un plan :</u>

Soit le plan π : $\vec{v} = \lambda \cdot \langle -1 \,;\, 3 \,;\, 0 \rangle + \mu \cdot \langle 0 \,;\, 3 \,;\, -2 \rangle + \langle 2 \,;\, 0 \,;\, -2 \rangle$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ou encore, mis sous forme cartésienne : $6x + 2y + 3z = 6$

Calculons les points d'intersection du plan π avec chacun des trois axes du repère :

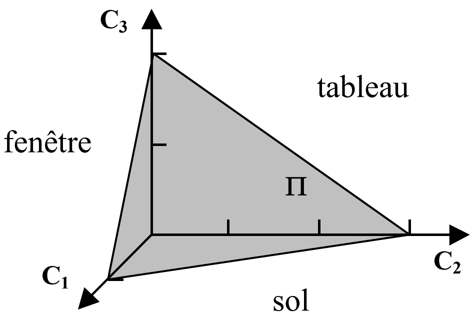
sur l'axe C_1 , on a $y = 0$ et $z = 0$, d'où : $6x = 6 \Rightarrow x = 1$ donc $\Pi \cap C_1 = \{ \langle 1 \,;\, 0 \,;\, 0 \rangle \}$.

sur l'axe C_2 , on a ....

sur l'axe C_3 , on a ....

Placez ces trois points sur le repère ci-dessous !

Pour représenter le plan π dans l'espace $\mathbb{R}^3$, calculons et dessinons **ses traces,**
qui sont par définition les droites d'intersection entre le plan π et les plans du repère.



Sa trace sur le "*sol*" C_1C_2 se calcule en posant :
$z = 0$; $3x + y = 3$.

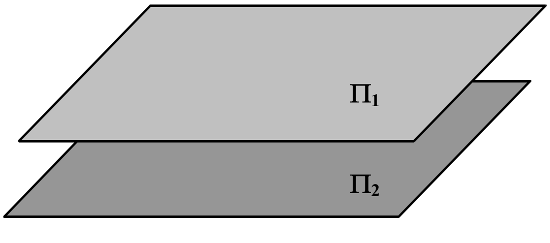
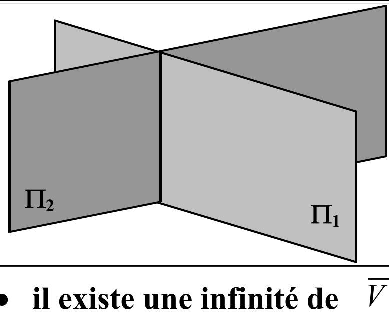
Sa trace sur la "*fenêtre*" C_1C_3 est :

....

Sa trace sur le "*tableau*" C_2C_3 est:

....

Etudions à présent les *positions relatives* de deux plans placés dans l'espace $\mathbb{R}^3$!

Parallèles	**Sécants**
	
• **aucun $\overrightarrow{V_{pos}}$ commun** • $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$	• **il existe une infinité de $\overrightarrow{V_{pos}}$ communs** • $\Pi_1 \cap \Pi_2$ = droite

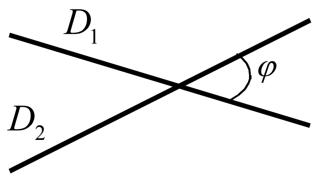
8. Angles dans l'espace $\mathbb{R}^3$

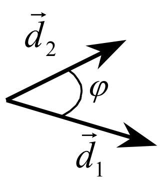
Rappel :
La définition du **produit scalaire** de deux vecteurs non nuls permet de déterminer l'**angle** qu'ils forment.
Cet angle est celui qui se trouve dans un plan engendré par ces vecteurs :

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \quad \text{donc} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right).$$

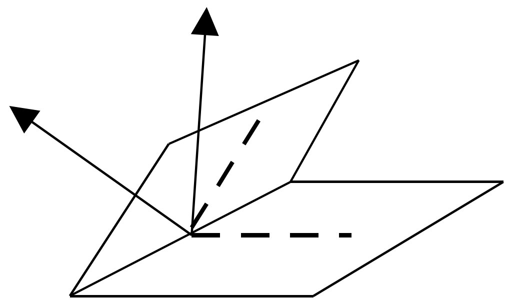
Cette formule permet de déterminer, lorsqu'ils existent :

L'angle entre **deux droites** :
Il faut calculer l'angle entre les vecteurs directeurs des droites… après s'être assuré qu'elles sont bien sécantes !

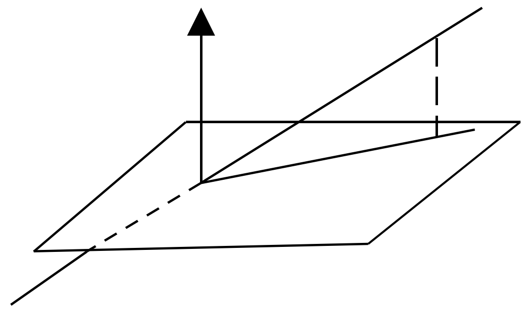




L'angle entre **deux plans** :
Comment peut-on vérifier que deux plans sont ou ne sont pas parallèles ?
L'angle entre deux plans est par définition l'angle entre deux vecteurs respectivement normaux aux plans.



L'angle entre **une droite** et **un plan** :
Il faut calculer l'angle entre un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan…puis prendre l'angle complémentaire !



Note :
Lorsque l'on détermine un angle, il peut s'agir soit de l'angle aigu, soit de l'angle obtus selon le sens choisi pour les vecteurs utilisés. Ces deux réponses décrivent la même figure et sont naturellement toutes deux correctes.

Exercice 8.1 :
Déterminez l'angle, au centième de degré près, entre les deux plans définis par les équations cartésiennes :
$6x+2y+3z=6$ et $-2x+3y+z=13$.