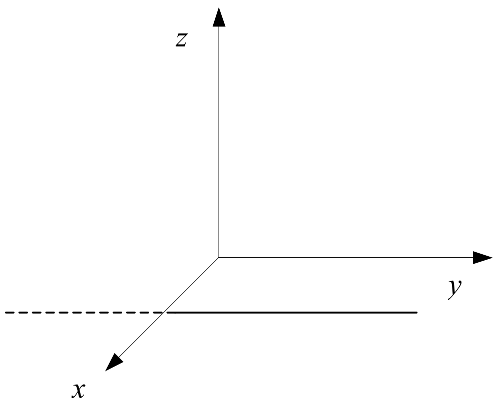
❶ Déterminez, dans chacun des 3 cas suivants, l'ensemble des points $M=(x\,;y\,;z)$ de l'espace tels que :

1.1 $x=1$ Plan parallèle à yOz, à une distance de 1 de ce plan : $1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=1$.

1.2 $z=0$ Plan xOz : $0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=0$

1.3 $x=1$ et $z=0$ Droite d'intersection dans xOz (parallèle à Oy) : $x=1;\ y\in\mathbb{R};\ z=0$



❷ Ensemble de tous les vecteurs normaux au plan $x+6y-z+7=0$: Ensemble = $\left\{\lambda\cdot(1;\,6;\,-1)\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}^*\right\}$

❸

3.1 Déterminez l'équation paramétrique et l'équation cartésienne du plan passant par les points $A=(1\,;-1\,;0)$; $B=(2\,;3\,;-4)$ et $C=(-3\,;0\,;1)$.

$\overrightarrow{AB}=(1;\,4;\,-4)$ et $\overrightarrow{AC}=(-4;\,1;\,1)$ ne sont pas colinéaires, ni nuls, et serviront de vecteurs directeurs.

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\mu\cdot\overrightarrow{AC}$ donne l'équation paramétrique suivante :

$\vec{v}=(1\,;-1\,;0)+\lambda\cdot(1\,;4\,;-4)+\mu\cdot(-4\,;1\,;1)\qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

3.2 Il faut vérifier que le vecteur $\vec{n}=(8\,;15\,;17)$ est perpendiculaire à deux vecteurs directeurs non parallèle du plan Π. On a :

$\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=(8\,;15\,;17)\bullet(1\,;4\,;-4)=8\cdot1+15\cdot4+17\cdot(-4)=0$ et

$\vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=(8\,;15\,;17)\bullet(-4\,;1\,;1)=8\cdot(-4)+15\cdot1+17\cdot1=0$. Donc $\vec{n}$ est perpendiculaire à Π.

3.3 L'équation cartésienne est donc : $8\cdot x+15\cdot y+17\cdot z=-7$. -7 est obtenu par :

$-7=8\cdot1+15\cdot(-1)+17\cdot0$ et aussi $-7=8\cdot2+15\cdot3+17\cdot(-4)$ et aussi $-7=8\cdot(-3)+15\cdot0+17\cdot1$

3.4 Le point $R=(7\,;-3\,;10)$ appartient-il à ce plan ?

$8\cdot7+15\cdot(-3)+17\cdot10=-7$ Faux : $R\notin plan$.

3.5 Le point $S=(-6\,;5\,;-2)$ appartient-il à ce plan ?

$8\cdot(-6)+15\cdot5+17\cdot(-2)=-7$ Juste : $R\in plan$.

❹ Déterminez l'équation cartésienne du plan qui passe par le point $A=(1\,;2\,;3)$ et qui admet le vecteur normal $\vec{n}=(1\,;0\,;1)$.

$1\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=\delta$ et $A\in plan: 1\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 3=\delta \Rightarrow \delta=4 \Rightarrow x+z=4$

---

❺ Déterminez l'intersection des deux plans P et P' dans les cas suivants :

5.1 $\begin{cases} x+2y-z=-6 & \cdot(-2) \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4y+2z=12 \\ 3x+\ y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow x-3y=11 \Leftrightarrow \dfrac{x-11}{3}=y$

$\begin{cases} x+2y-z=-6 & \cdot(-3) \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-6y+3z=18 \\ 3x+\ y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow -5y+z=17 \Leftrightarrow \dfrac{z-17}{5}=y$

Les équations cartésiennes de la droite d'intersection sont : $\dfrac{x-11}{3}=y=\dfrac{z-17}{5}$.

Une équation paramétrique de cette droite est : $(x\,;y\,;z)=(11\,;0\,;17)+\lambda\cdot(3\,;1\,;5) \quad \lambda\in\mathbb{R}$

On peut vérifier que le vecteur directeur de la droite (3 ; 1 ; 5) est bien perpendiculaire aux deux vecteurs normaux des plans. $(3\,;1\,;5)\bullet(1\,;2\,;-1)=0$ et $(3\,;1\,;5)\bullet(3\,;1\,;-2)=0$

5.2 $\begin{cases} 0,5x-\ y+2z=\ 1 & \| \cdot 2 \\ -x+2y-4z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+4z=\ 2 \\ -x+2y-4z=-2 \end{cases} \Rightarrow 0=0$

Ces deux plans sont les mêmes, donc l'intersection est le plan lui-même.

5.3 $\begin{cases} 3x-\ y-\ z=-2 & \| \cdot 2 \\ -6x+2y+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y-2z=-4 \\ -6x+2y+2z=3 \end{cases} \Rightarrow 0=-1$

Il n'y a pas de solutions communes aux deux équations.

On peut remarquer que leur vecteur normaux sont colinéaire, donc les plans sont parallèles, mais différents. Donc il n'ont aucune intersection.

$P\cap P'=\{\ \}$

---

❻ Déterminez l'intersection du plan $P : 2x + y - 5z + 3 = 0$ avec la droite $D : \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

La droite peut :

- couper le plan en un point : il faut résoudre le système $D : \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \quad \text{ou} \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \\ 2x + y - 5z + 3 = 0 \end{cases}$,
- ou être parallèle au plan : dans ce cas le vecteur directeur de la droite $\overrightarrow{v_D} = (2\,;-1\,;1)$ est orthogonal au vecteur normal au plan $\overrightarrow{n_P} = (2\,;1\,;-5)$, ce qui n'est pas le cas, car : $(2;-1;1)\bullet(2;1;-5) = -2 \neq 0$.
  Donc D n'est pas parallèle à P.

$$D : \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \\ 2x + y - 5z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 14 + 4t - 1 - t - 10 - 5t + 3 = 0 \Rightarrow -2t = -6 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = -4 \\ z = 5 \end{cases}$$

Ce point $(13\,;-4\,;5)$ satisfait bien l'équation du plan et le système paramétrique de la droite !

$D \cap P = \{(13\,;-4\,;5)\}$

---

❼ Déterminez l'intersection des trois plans P_1 , P_2 et P_3 d'équations respectives :

$P_1 :\ 2x + y - 3z + 7 = 0 \ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_{P1}} = (2\,;1\,;-3)$

$P_2 :\ -x + 3y + 4z - 10 = 0 \ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_{P2}} = (-1\,;3\,;4)$

$P_3 :\ 3x + y - 2z = 0 \ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_{P3}} = (3\,;1\,;-2)$

Ces trois plans peuvent :

- être parallèles $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{\ \}$ si leurs vecteurs normaux sont colinéaires, mais ce n'est pas le cas ici
- être confondus $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = P_1 = P_2 = P_3$ si leurs vecteurs normaux sont colinéaires, mais ce n'est pas le cas ici, et s'ils possèdent au moins un point commun
- être sécants en un seul point qui est seul à satisfaire les 3 équations données $\begin{cases} 2x + y - 3z + 7 = 0 \\ -x + 3y + 4z - 10 = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$
- être sécants selon une droite (infinité de points) comme les pages d'un livre le sont à la charnière, auquel ca la résolution du système d'équations admettra pour solution les équations d'une droite.

Essayons de résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x+y-3z+7=0 \\ -x+3y+4z-10=0 \\ 3x+y-2z=0 \Rightarrow y=2z-3x \Rightarrow \begin{cases} 2x+2z-3x-3z+7=0 \\ -x+6z-9x+4z-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-z+7=0 \\ -10x+10z-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-z+7=0 \\ -x+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \end{cases}$$

$-2x+6=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow z=4 \Rightarrow y=-1$

Le point $(3;-1;4)$ satisfait les trois équations des plans : $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{(3;-1;4)\}$

---

❽ Déterminez l'intersection des trois plans P_1 , P_2 et P_3 sachant que :

P_1 passe par le point $A=(1;1;4)$ et admet le vecteur normal $\overrightarrow{n_1}=(1;-1;1) \Rightarrow$

$P1:[x-y+z=\alpha \text{ et } 1-1+4=\alpha] \Rightarrow P1: x-y+z=4$

P_2 passe par le point $B=(-1;0;0)$ et admet le vecteur normal $\overrightarrow{n_2}=(1;1;1) \Rightarrow$

$P2:[x+y+z=\alpha \text{ et } -1+0+0=\alpha] \Rightarrow P2: x+y+z=-1$

P_3 : $3x+y+3z=2$

Donc le système à résoudre (ces plans ne sont pas parallèles) est : $\begin{cases} x-y+z=4 \\ x+y+z=-1 \\ 3x+y+3z=2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x-y+z=4 \\ x+y+z=-1 \\ 3x+y+3z=2 \end{cases} \Rightarrow (1)+(2) \text{ donne } 2x+2z=3 \Rightarrow x+z=1,5 \Rightarrow \text{ (en injectant dans (3)) :}$$

$$3\cdot(x+z)+y=2 \Rightarrow 3\cdot 1,5+y=2 \Rightarrow y=-2,5 \Rightarrow \begin{cases} (1)\ x+2,5+z=4 \\ (2)\ x-2,5+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ x+z=1,5 \\ (2)\ x+z=1,5 \end{cases}$$

Ce dernier système qui, en fait contient deux fois la même équation, admet une infinité de solutions : par exemple, on fixe x arbitrairement et on calcule z en fonction de la valeur choisie pour x.

Comment interpréter géométriquement cette situation ?
Les deux plans se coupent en point d'ordonnée $y=-2,5$ selon une droite d'équation $z=-x+1,5$.
Cette droite est dans un plan vertical parallèle au plan xOz ; ses traces sont les points :

$z=0 \Rightarrow x=1,5 \Rightarrow$ point $(1,5;-2,5;0)$ = trace sur le plan xOy
$x=0 \Rightarrow z=1,5 \Rightarrow$ point $(0;-2,5;1,5)$ = trace sur le plan yOz
$y=0$ n'est pas possible, pas de trace sur le plan xOz