❶ Calculez l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

I = II = III

$D: \quad \frac{x-3}{2} = -y-1 = \frac{z-1}{3}$ sur cette ligne, il y a deux équations : I = II et II = III ou I = III !!!

$D': \quad -x = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4}$ même remarque.

Il s'agit de résoudre un système à trois inconnues, formé de <u>quatre</u> équations.
Ce système peut admettre :

- aucune solution (**système incompatible**, droite parallèles ou gauches)
- une **solution unique** qui donnera les coordonnées du point unique commun à D et D'
- une **infinité de solutions** dans les cas où D et D' sont des droites confondues.

Des équations de D', on tire : $y-3=-3x$ et $z-2=-4x$, ce qui donne : $\boxed{y=-3x+3}$ et $\boxed{z=-4x+2}$

Injectons ces expressions dans les équations de D : $\frac{x-3}{2} = -(-3x+3)-1 = \frac{(-4x+2)-1}{3}$

et vérifions si ces deux équations admettent la même solution :

I = II donne : $\frac{x-3}{2} = 3x-4 \Rightarrow x-3 = 6x-8 \Rightarrow 8-3 = 6x-x \Rightarrow 5 = 5x \Rightarrow x = 1$

II = III donne : $3x-4 = \frac{-4x+1}{3} \Rightarrow 9x-12 = -4x+1 \Rightarrow 13x = 13 \Rightarrow x = 1$.

C'est bien le cas, donc le système est compatible et admet une solution unique :
$x=1 \quad y=-3\cdot 1+3=0 \qquad z=-4\cdot 1+2=-2$

Donc les deux droites D et D' sont sécantes : $D \cap D' = \left\{ \left(1\,;0\,;-2\right) \right\}$

Vérification : remplacer x, y et z dans les équations de D et D'.
Une **autre méthode** (plus simple ?) est décrite en page 5.

---

❷ Calculez l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

$D: \quad 1-x = y-3 = \frac{z-3}{4}$

$D': \quad \frac{x}{3} = 2-y = \frac{z+19}{2}$

Même principe que l'exercice précédent.
Isolons, à partir des équations de D , y et z en fonction de x :

$1-x = y-3 \Rightarrow 4-x = y \Rightarrow \boxed{y=4-x}$

$1-x = \frac{z-3}{4} \Rightarrow 4-4x = z-3 \Rightarrow \boxed{z=7-4x}$

Injectons ces expressions dans les équations de D' : $\frac{x}{3} = 2-(4-x) = \frac{(7-4x)+19}{2}$

et vérifions si ces deux équations admettent la même solution :

La 1ère égalité de D' donne : $\frac{x}{3} = 2-(4-x) \Rightarrow \frac{x}{3} = x-2 \Rightarrow x = 3x-6 \Rightarrow 6 = 2x \Rightarrow x = 3$

La 2ème égalité de D' donne : $2-(4-x) = \frac{(7-4x)+19}{2} \Rightarrow x-2 = 12-2x \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$

Nous constatons que les équations de D' ne peuvent pas être satisfaites par des valeurs $x, y\, z$ qui satisfont simultanément les équations de D. Ceci signifie simplement que les deux droites n'ont pas un point commun dont les coordonnées pourraient satisfaire toutes les contraintes posées par les quatre équations : $D \cap D' = \{\ \}$.

Donc D et D' sont gauches ou strictement parallèles. Comment préciser laquelle de ces deux éventualités est la bonne ?

En regardant le vecteur directeur de chaque droite :
$D\ :\ \vec{V}_D = (-1\,;1\,;4)$ et $D\ :\ \vec{V}_{D'} = \left(3\,;-1\,;2\right)$
Ces deux vecteurs directeurs n'étant pas colinéaires, les deux droites ne sont pas parallèles.
Elles sont donc gauches.
Une **autre méthode** (plus simple ?) est décrite en page 5.

---

❸ Calculez l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

$D: \quad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-(-1)}{1} = \dfrac{z-(-3)}{4} \qquad \vec{V}_D = (1\,;1\,;4)$

$D': \quad \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-1}{4} \qquad \vec{V}_{D'} = (1\,;1\,;4)$

On pourrait chercher à résoudre le système de quatre équations, mais si l'on veut gagner du temps, on peut remarquer que les deux droites admettent le même vecteur directeur (en fait, si les deux vecteurs directeurs étaient différents mais colinéaires, ce serait suffisant) : $\vec{V}_D = 1 \cdot \vec{V}_{D'}$.

Donc les deux droites sont strictement parallèles ou confondues. Comment déterminer laquelle de ces deux éventualités est la bonne ? En testant si un point appartenant à D appartient également à D'.
Proposons par exemple le point $P = (1\,;-1\,;-3)$; il appartient à D car c'est un vecteur position de D.
Appartient-il aussi à D' ? $1-5 \overset{?}{=} -1-7 \overset{?}{=} \dfrac{-3-1}{4}$? Non, ces égalités sont fausses, donc les deux droites D et D' sont parallèles et distinctes (strictement parallèles) : elles ne possèdent aucun point commun et $D \cap D' = \{\ \}$.

<u>Au cas où vous n'avez pas remarqué la colinéarité des vecteurs directeurs</u>, résolution par la méthode du système :

$D: \quad x-1 = y+1 = \dfrac{z+3}{4}$ donne $\boxed{x = y+2}$ et $4y+4 = z+3 \Rightarrow \boxed{z = 4y+1}$.

Injectons ces expressions dans les équations de D' :

$y+2-5 = y-7 = \dfrac{4y+1-1}{4}$ ou encore $y-3 = y-7 = y$

et vérifions si ces deux équations admettent la même solution :
$y-3 = y-7 \ \Rightarrow\ -3 = -7$ égalité fausse ; impossible de trouver une valeur réelle pour y.
(La seconde égalité donnerait également une égalité impossible : $-7 = 0$.)
Nous avons constaté que le système est **incompatible** :
aucun point ne peut satisfaire simultanément les quatre équations.
Il faudrait encore déterminer si les droites D et D' sont gauches ou strictement parallèles :
Elles ont des vecteurs directeurs colinéaires, donc elles sont strictement parallèles.

❹ Calculez l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

$D: \quad x-1 = y+1 = \dfrac{z+3}{4} \qquad \vec{V}_D = (1\,;1\,;4)$

$D': \quad x-13 = y-11 = \dfrac{z-45}{4} \qquad \vec{V}_{D'} = (1\,;1\,;4)$

Le système est très proche de celui du problème ❸ : les droites sont parallèles, strictement ou non, car leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Reprenons le point $P = (1\,;-1\,;-3)$; il appartient à D car c'est un vecteur position de D.

Appartient-il aussi à D' ? $1-13 \stackrel{?}{=} -1-11 \stackrel{?}{=} \dfrac{-3-45}{4}$? Ces égalités sont vraies, D et D' ont un point commun, donc les deux droites D et D' sont **parallèles et confondues** : $D \cap D' = D = D'$.

Comment peut-on expliquer que **deux expressions différentes des équations cartésiennes** définissent en définitive **la même droite** ? C'est une difficulté habituelle en mathématique. Ici, il existe une infinité de vecteurs positions que l'on peut utiliser pour définir les équations cartésiennes (ou paramétriques) de la droite $D = D'$.

<u>Au cas où vous n'avez pas remarqué la colinéarité des vecteurs directeurs</u>, résolution par la méthode du système :

$D: \quad x-1 = y+1 = \dfrac{z+3}{4}$ donne $\boxed{x = y+2}$ et $4y+4 = z+3 \Rightarrow \boxed{z = 4y+1}$.

Injectons ces expressions dans les équations de D' : $\quad y+2-13 = y-11 = \dfrac{4y+1-45}{4}$ ou encore

$y-11 = y-11 = y-11$

Clairement, ces deux équations admettent le même ensemble de solutions : $y \in \mathbb{R}$.

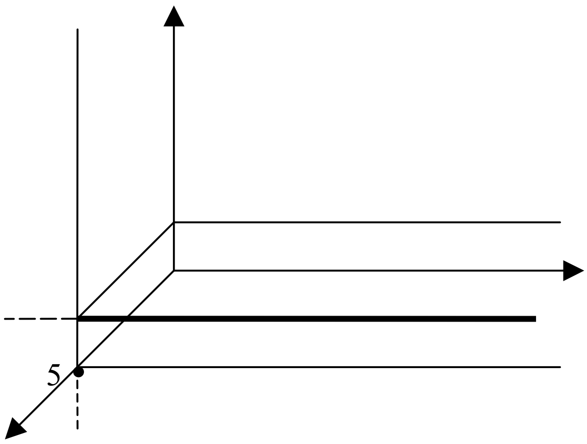
Quant à x et z, ils sont fixés par les relations $\boxed{x = y+2}$ et $\boxed{z = 4y+1}$ en fonction de y, exactement comme le prescrivent les équations de D et/ou D' : tout point $(y+2\,;y\,;4y+1)$ appartient à $D = D' = D \cap D'$.

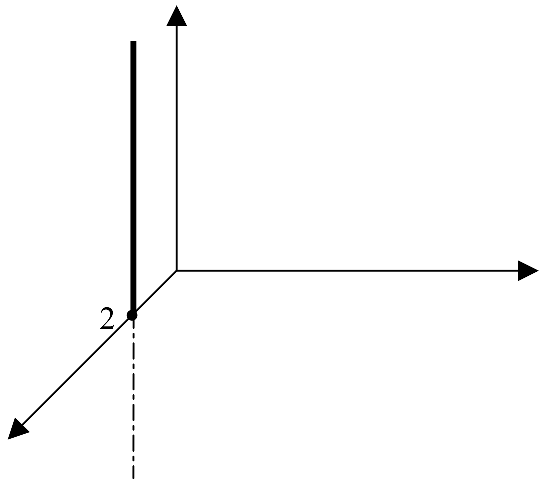
❺ Déterminez les équations paramétriques et cartésiennes de la droite :

5.1 parallèle à l'axe Oy et passant par le point $(5\,;4\,;1)$

Vecteur directeur = $(0\,;1\,;0)$

$$\overrightarrow{OM}=(5\,;4\,;1)+\lambda\cdot(0\,;1\,;0)\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=4+\lambda\\z=1\end{cases}\Rightarrow \text{ Equations cartésiennes : } x=5\,;\ z=1\,;\ y\in\mathbb{R}$$





5.2 parallèle à l'axe Oz et passant par le point $(2\,;0\,;-7)$

$$\overrightarrow{OM}=(2\,;0\,;-7)+\lambda\cdot(0\,;0\,;1)\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\\z=-7+\lambda\end{cases}\Rightarrow \text{ Equations cartésiennes : } x=2\,;\ y=0;\ z\in\mathbb{R}$$

5.3 parallèle à la droite d'équations $\dfrac{x-(-4)}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-5}$ et passant par le point $(1\,;-4\,;6)$

Vecteur directeur = $(2\,;1\,;-5)$

$$\overrightarrow{OM}=(1\,;-4\,;6)+\lambda\cdot(2\,;1\,;-5)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=-4+2\lambda\\y=\ \ 3+\ \lambda\\z=\ \ 2-5\lambda\end{cases}.\ \text{ Equations cartésiennes : } \frac{x-1}{2}=\frac{y-(-4)}{1}=\frac{z-6}{-5}$$

5.4 parallèle à la droite d'équations $\dfrac{x-(-4)}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-0}{9}$ et passant par le point $(11\ ;-2\,;0)$.

Vecteur directeur = $(2\,;-4\,;9)$

$$\overrightarrow{OM}=(11\,;-2\,;0)+\lambda\cdot(2\,;-4\,;9)\Rightarrow\begin{cases}x=\ 11+2\lambda\\y=-2-4\lambda\\z=\qquad 9\lambda\end{cases}\Rightarrow \text{ Equations cartésiennes : } \frac{x-11}{2}=\frac{y-(-2)}{-4}=\frac{z}{9}$$

❶ Autre méthode pour calculer l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

$$D: \quad \frac{x-3}{2} = -y-1 = \frac{z-1}{3}$$

$$D': \quad -x = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-0}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4}$$

Cette méthode consiste à écrire une équation paramétrique de l'une des deux droites, puis à substituer $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans l'équation cartésienne de l'autre droite.

Equation paramétrique de D' : $(x\,;y\,;z) = (0\,;3\,;2) + \lambda \cdot (-1\,;3\,;4), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Donc $x = -\lambda$; $y = 3 + 3\lambda$; $z = 2 + 4\lambda$

Substituons ces trois égalités dans l'équation cartésienne de D :

$$D: \quad \frac{-\lambda-3}{2} = -(3+3\lambda)-1 = \frac{(2+4\lambda)-1}{3}$$

C'est un système de 2 équations à une inconnue (λ).

Il y a une intersection si et seulement si ce système possède une solution.

Résolvons : $\begin{cases} \dfrac{-\lambda-3}{2} = -4-3\lambda \\ -4-3\lambda = \dfrac{1+4\lambda}{3} \end{cases}$

$-\lambda - 3 = -8 - 6\lambda \quad \text{et} \quad -12 - 9\lambda = 1 + 4\lambda$

$5\lambda = -5 \quad \text{et} \quad -13 = 13\lambda$

$\lambda = -1 \quad \text{et} \quad -1 = \lambda$; c'est la solution du système, donc les deux droites ont une intersection en :

$(x\,;y\,;z) = (0\,;3\,;2) + (-1)\cdot(-1\,;3\,;4)$, c'est à dire en : (1 ; 0 ; –2).

---

❷ Autre méthode pour calculer l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

$$D: \quad 1-x = y-3 = \frac{z-3}{4}$$

$$D': \quad \frac{x}{3} = 2-y = \frac{z+19}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-0}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-(-19)}{2}$$

Même méthode que ci-dessus :

Equation paramétrique de D' : $(x\,;y\,;z) = (0\,;2\,;-19) + \lambda \cdot (3\,;-1\,;2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Donc $x = 3\lambda$; $y = 2 - \lambda$; $z = -19 + 2\lambda$

Substituons ces trois égalités dans l'équation cartésienne de D :

$$D: \quad 1-3\lambda = 2-\lambda-3 = \frac{-19+2\lambda-3}{4}$$

C'est un système de 2 équations à une inconnue (λ).

Il y a une intersection si et seulement si ce système possède une solution.

Résolvons : $\begin{cases} 1-3\lambda = -\lambda-1 \\ -\lambda-1 = \dfrac{-22+2\lambda}{4} \end{cases}$

$2 = 2\lambda \quad \text{et} \quad -4\lambda - 4 = -22 + 2\lambda$

$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad 18 = 6\lambda$

$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \lambda = 3$; Il n'y a pas une solution satisfaisant les deux équations en même temps, donc les deux droites n'ont pas d'intersection.