❶ D définie par : $\begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$. $A \in D \Leftrightarrow$ ses coordonnées satisfont les trois équations.

1.1 $\begin{cases} 3 = 5 - \lambda & \Leftrightarrow & \lambda = 2 \\ 5 = -1 + 3\lambda & \Leftrightarrow & \lambda = 2 \\ 2 = 1 + \lambda & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \end{cases}$ Il n'existe pas une valeur de λ qui satisfasse simultanément les 3 équations du système, donc $A \notin D$.

1.2 On donne les points $B = (1\,;6\,;0)$ et $C = (3\,;0\,;-2)$.

Un vecteur directeur de la droite (BC) est $\overrightarrow{BC} = (2;-6;-2)$.

Un vecteur directeur de la droite D est $\vec{d} = (-1\,;3\,;1)$ = les coefficients devant λ.

(BC) est parallèle à D $\Leftrightarrow$ $(2;-6;-2)$ est un multiple de $(-1\,;3\,;1)$, ce qui est bien le cas, car $(2;-6;-2) = -2\cdot(-1\,;3\,;1)$.

1.3 Une équation paramétrique de la droite (BC) est :
$(x\,;y\,;z)$ = coordonnées d'un point de la droite + λ · un vecteur directeur de la droite.

Exemple : $(x;y;z) = (1\,;6\,;0) + \lambda\cdot(2;-6;-2)$

Remarques :

1. au lieu du vecteur $\overrightarrow{BC} = (2;-6;-2)$, on a utilisé comme vecteur directeur $\vec{u}_D = (-1;3;1)$ qui est plus simple.
2. au lieu du point B, nous aurions pu utiliser alternativement le point C pour le vecteur position. Dans les deux alternatives, on aboutit à des équations paramétriques légèrement différentes, mais parfaitement identiques lorsqu'on élimine le paramètre, donc lorsqu'on écrit les équations cartésiennes.

---

❷ Soit D la droite passant par le point $A = (2\,;2\,;-4)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1\,;2\,;3)$

2.1 Equation paramétrique de D :

$(x\,;y\,;z) = (2\,;2\,;-4) + \lambda\cdot(1\,;2\,;3)$. Autre écriture : $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

2.2 $\begin{cases} 3 = 2 + \lambda & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \\ 4 = 2 + 2\cdot\lambda & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \\ -1 = -4 + 3\cdot\lambda & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \end{cases}$ donc $(3\,;4\,;-1)$ appartient à la droite D.

$\begin{cases} 4 = 2 + \lambda & \Leftrightarrow \lambda = 2 \\ 6 = 2 + 2\cdot\lambda & \Leftrightarrow \lambda = 2 \\ -2 = -4 + 3\cdot\lambda & \Leftrightarrow \lambda = 2/3 \end{cases}$ donc $(4\,;6\,;-2)$ n'appartient pas à la droite D.

Il n'existe pas une valeur qui satisfasse simultanément les trois équations.

$(-1\,;-4\,;-13) = (2\,;2\,;-4) - 3\cdot(1\,;2\,;3)$, ($\lambda = -3$), donc $(-1\,;-4\,;-13)$ appartient à la droite D.

2.3 Déterminez, s'ils existent les points suivants :

2.3.1 le point de D d'abscisse 5 $\begin{cases} 5 = 2+\lambda \iff \lambda = 3 \\ y = 2+2\cdot 3 = 8 \\ z = -4+3\cdot 3 = 5 \end{cases}$ donc le point $(5;8;5)$

2.3.2 le point d'ordonnée 10 $\begin{cases} x = 2+\lambda & \Rightarrow x = 6 \\ 10 = 2+2\cdot\lambda \iff \lambda = 4 & \\ z = -4+3\cdot\lambda & \Rightarrow z = 8 \end{cases}$ donc le point $(6;10;8)$

2.3.3 le point de cote 3 $\begin{cases} x = 2+\lambda & \Rightarrow x = 2+7/3 = 13/3 \\ y = 2+2\cdot\lambda & \Rightarrow y = 2+2\cdot 7/3 = 20/3 \\ 3 = -4+3\cdot\lambda \iff \lambda = 7/3 & \end{cases}$ donc le point $\left(\frac{13}{3};\frac{20}{3};3\right)$

2.4 Intersection de D avec :

2.4.1 plan (xOy) $z = 0 \Rightarrow -4+3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2+\frac{4}{3} = \frac{10}{3} \\ y = 2+2\cdot\frac{4}{3} = \frac{14}{3} \end{cases}$ donc le point $\left(\frac{10}{3};\frac{14}{3};0\right)$

2.4.2 plan (xOz) $y = 0 \Rightarrow 2+2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2-1 = 1 \\ z = -4-3 = -7 \end{cases}$ donc le point $(1;0;-7)$

2.4.3 plan (yOz) $x = 0 \Rightarrow 2+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2-4 = -2 \\ z = -4-6 = -10 \end{cases}$ donc le point $(0;-2;-10)$

2.5 Intersection de D avec chacun des trois axes du repère orthonormé.
Tout point de l'axe Ox est tel que $y = 0$ et $z = 0$.
Un point de D est-il capable de satisfaire ces deux conditions ?

$$\begin{cases} x = 2+\lambda \\ 0 = 2+2\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \\ 0 = -4+3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \end{cases}$$

On constate que les deux conditions ne donnent pas le même λ, donc la droite D n'a aucun point commun avec l'axe Ox.

Tout point de l'axe Oy est tel que $x = 0$ et $z = 0$.
Un point de D est-il capable de satisfaire ces deux conditions ?

$$\begin{cases} 0 = 2+\lambda \Rightarrow \lambda = -2 \\ y = 2+2\lambda \\ 0 = -4+3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \end{cases}$$

On constate que les deux conditions ne donnent pas le même λ, donc la droite D n'a aucun point commun avec l'axe Oy.

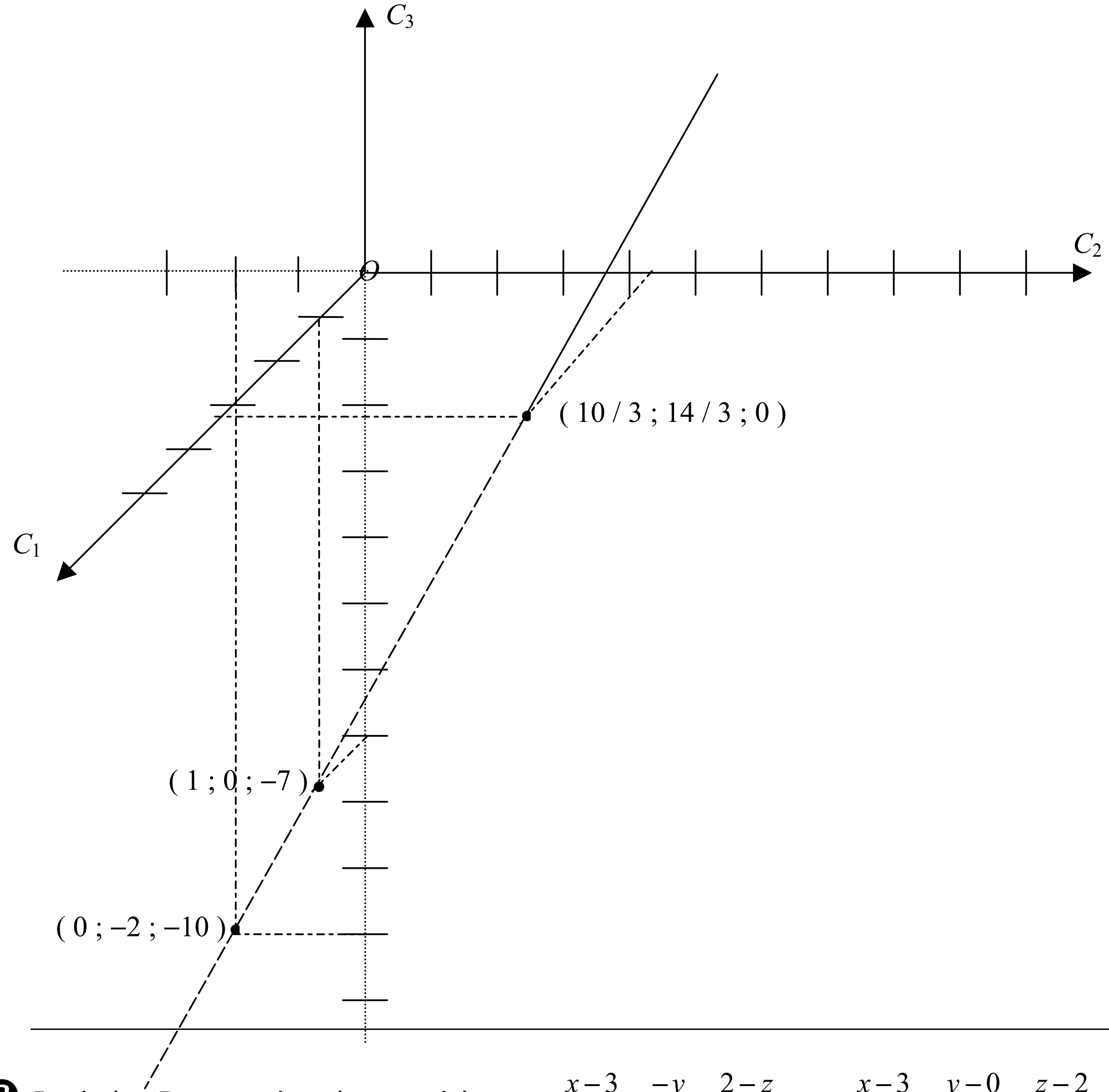
Tout point de l'axe Oz est tel que $x = 0$ et $y = 0$.
Un point de D est-il capable de satisfaire ces deux conditions ?

$$\begin{cases} 0 = 2+\lambda \Rightarrow \lambda = -2 \\ 0 = 2+2\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \\ z = -4+3\lambda \end{cases}$$

On constate que les deux conditions ne donnent pas le même λ, donc la droite D n'a aucun point commun avec l'axe Oz.

Ceci n'est pas surprenant car l'intersection de deux droites de l'espace est en général un ensemble vide, alors que l'intersection d'une droite et d'un plan est rarement vide (seulement si la droite et le plan sont parallèles).

Exercice 2, représentation graphique de la droite D .
Les intersections avec les plans (xOy), (xOz) et (yOz), sont représentés par des points noirs.



---

❸ La droite D a pour équations cartésiennes : $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{-y}{6}=\dfrac{2-z}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-0}{-6}=\dfrac{z-2}{-2}$.

3.1 Un vecteur directeur de D est : $\vec{d}=(3\,;-6\,;-2)$

3.2 système paramétrique de D $\begin{cases} x-3= & 3\lambda \\ y & =-6\lambda \\ z-2=-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3+3\lambda \\ y= \quad -6\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2-2\lambda \end{cases}$

3.3 droite Δ, parallèle à D et qui passe par le point $C(1;0;-2)$

On a : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\mu\cdot\vec{d} \quad \mu\in\mathbb{R}$

Equation paramétrique :

$(x;y;z)=(1;0;-2)+\lambda\cdot(3;-6;-2)$, autre écriture : $\begin{cases} x= \ 1+\ 3\lambda \\ y= \quad -6\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R} \\ z=-2-2\lambda \end{cases}$

Equations cartésiennes :

$(\lambda=)\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z-2}{-2}$

---

❹ La droite D a pour équations cartésiennes : $\dfrac{x-3}{-1} = y = \dfrac{z-4}{2}$.

4.1 Traces de D : $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-4}{2}$

Trace sur xOy $z=0$ donc $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{0-4}{2}(=-2) \Rightarrow \begin{cases} x-3=2 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$ Trace = $(5\,;-2\,;0)$

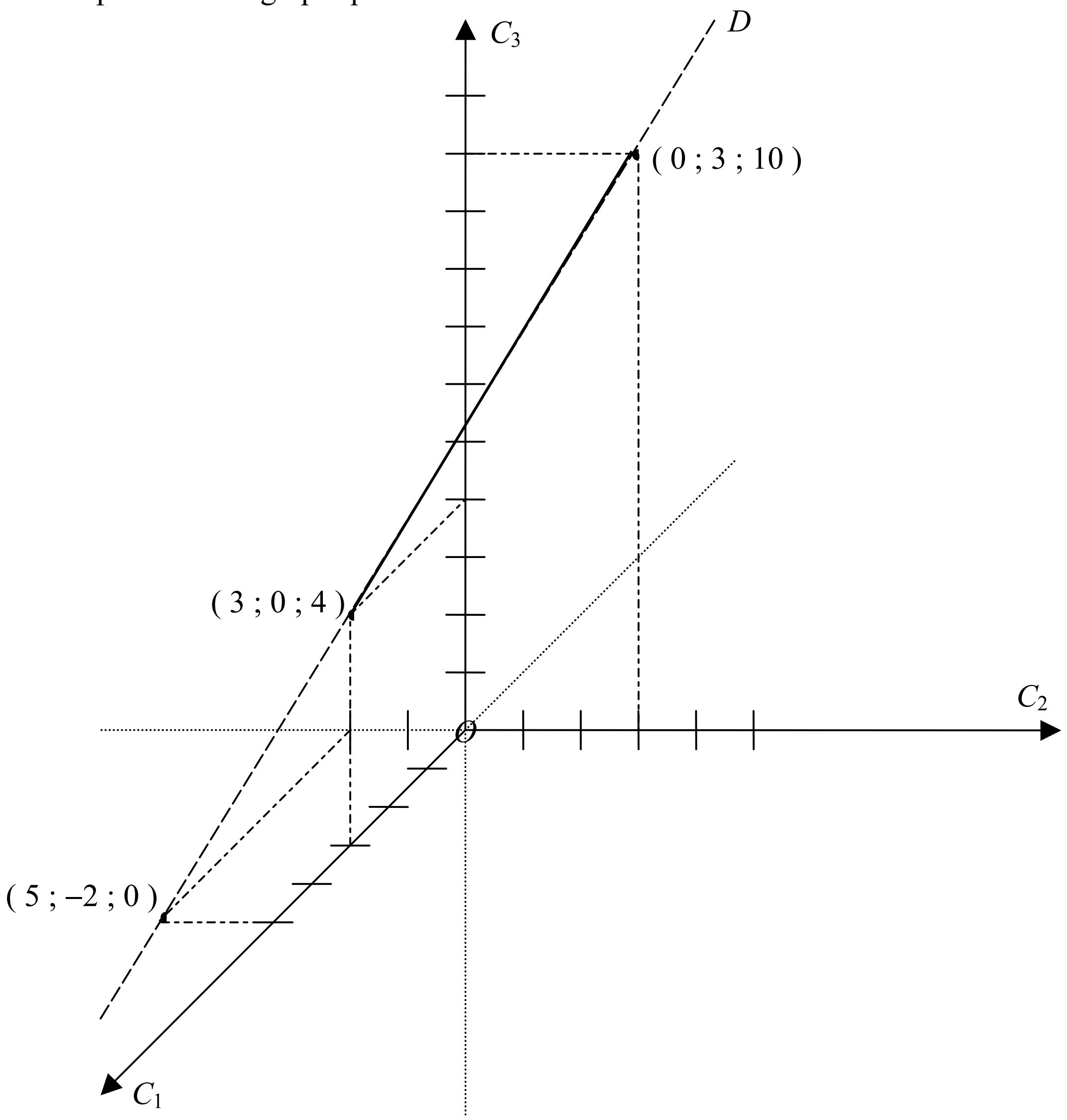
Trace sur xOz $y=0$ donc $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{0}{1}(=0) = \dfrac{z-4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ z=4 \end{cases}$ Trace = $(3\,;0\,;4)$

Trace sur yOz $x=0$ donc $\dfrac{0-3}{-1}(=3) = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-4}{2} \Rightarrow \begin{cases} z-4=6 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=10 \\ y=3 \end{cases}$ Trace = $(0\,;3\,;10)$

4.2 Donnez une représentation paramétrique de la droite D.

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-4}{2} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda + 3 \\ y = \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda + 4 \end{cases}$$

4.3 Représentation graphique :



❺ Mêmes questions pour la droite D d'équations cartésiennes : $x=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{4-z}{2}$.

5.1 Traces de D : $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-(-2)}{2}=\dfrac{z-4}{-2}$

Trace sur xOy $z=0$ donc $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{4-0}{2}(=2)\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y+2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ Trace = $(2\,;2\,;0)$

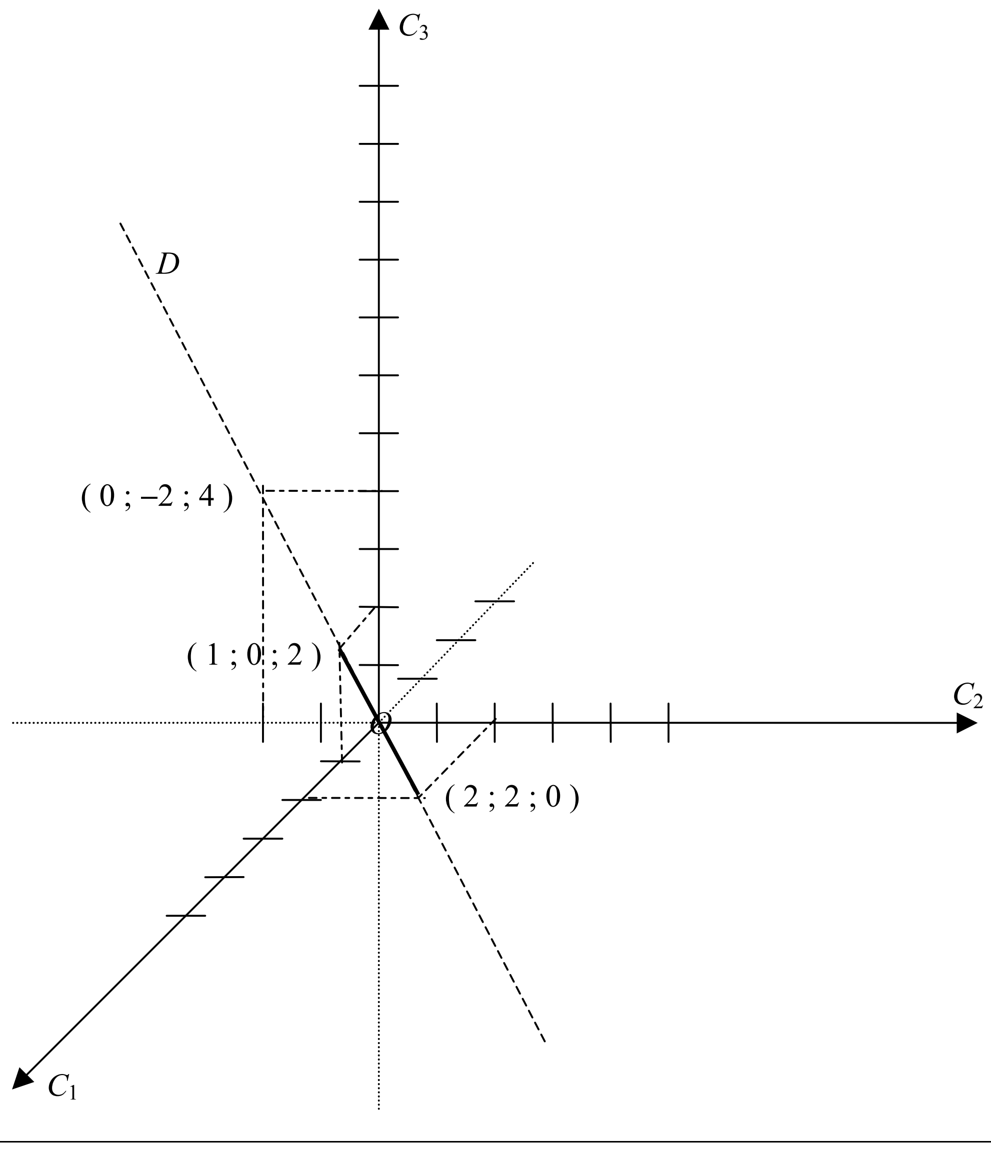
Trace sur xOz $y=0$ donc $\dfrac{x}{1}=\dfrac{0+2}{2}(=1)=\dfrac{4-z}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\4-z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\z=2\end{cases}$ Trace = $(1\,;0\,;2)$

Trace sur yOz $x=0$ donc $\dfrac{0}{1}(=0)=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{4-z}{2}\Rightarrow\begin{cases}y=-2\\z=\ \ 4\end{cases}$ Trace = $(0\,;-2\,;4)$

5.2 Donnez une représentation paramétrique de la droite D.

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-(-2)}{2}=\frac{z-4}{-2}=\lambda\Rightarrow\begin{cases}x=\ \ \lambda\\y=\ \ 2\lambda-2\quad\lambda\in\mathbb{R}\\z=-2\lambda+4\end{cases}$$

5.3 Représentez graphiquement la droite D (esquisse soigneuse !).



❻ Mêmes questions pour la droite D d'équations cartésiennes : $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{2-z}{2}$.

6.1 Traces de D : $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-0}{-6}=\dfrac{z-2}{-2}$

Trace sur xOy $z=0$ donc $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{2-0}{2}(=1)\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=-6\end{cases}$ Trace = $(6\,;-6\,;0)$

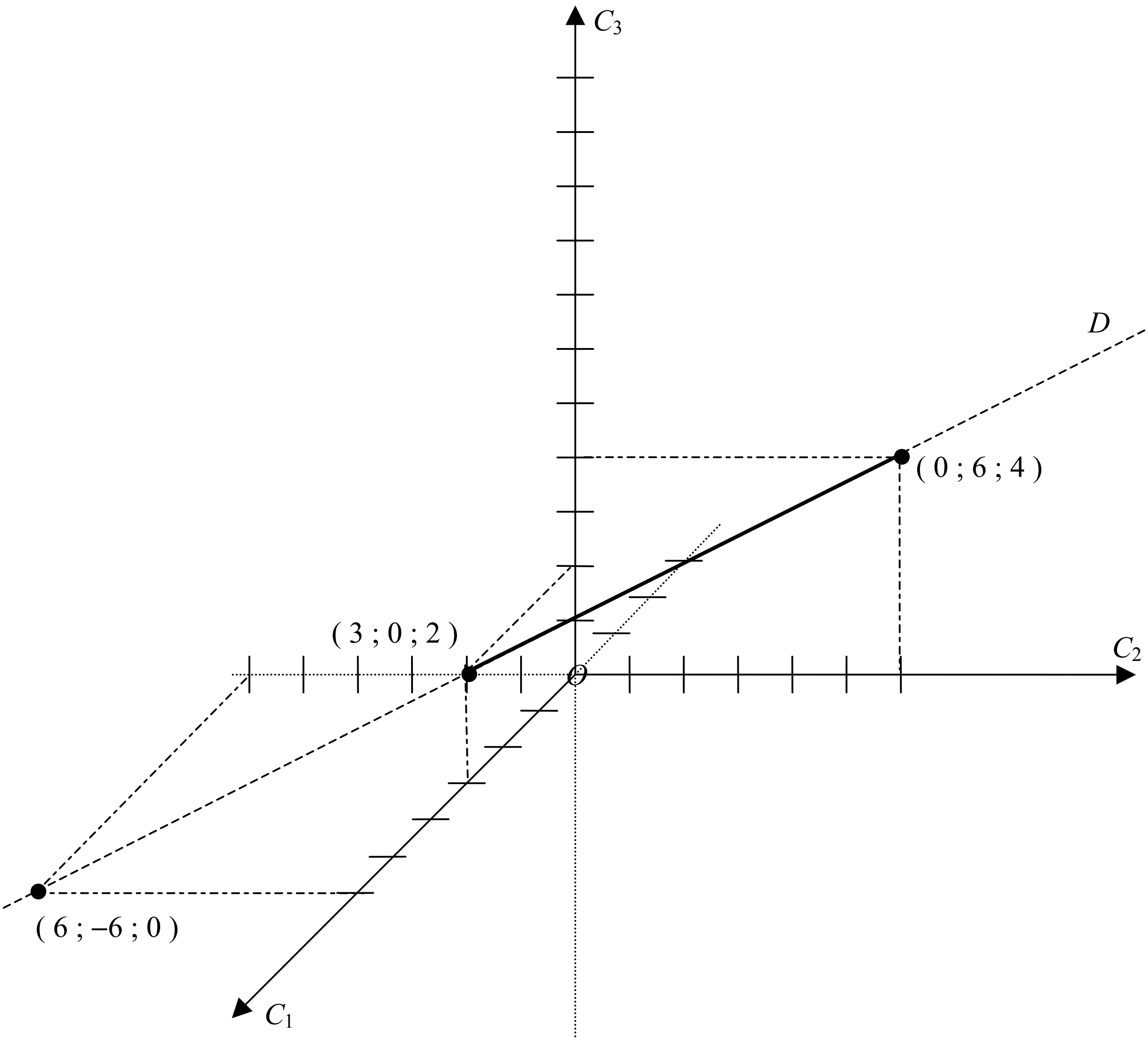
Trace sur xOz $y=0$ donc $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{0}{-6}(=0)=\dfrac{2-z}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\z=2\end{cases}$ Trace = $(3\,;0\,;2)$

Trace sur yOz $x=0$ donc $\dfrac{0-3}{3}(=-1)=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{2-z}{2}\Rightarrow\begin{cases}y=6\\z=4\end{cases}$ Trace = $(0\,;6\,;4)$

6.2 Donnez une représentation paramétrique de la droite D.

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-0}{-6}=\frac{z-2}{-2}(=\lambda)\Rightarrow\begin{cases}x=3+3\lambda\\y=\quad-6\lambda \qquad \lambda\in\mathbb{R}\\z=2-2\lambda\end{cases}$$

6.3 Représentez graphiquement la droite D (esquisse soigneuse !).



❼ Pour toutes les questions, nous trouverons les équations demandées dans l'ordre le plus simple, avec la notation :
$\vec{d} =$ vecteur directeur, $\vec{p} =$ vecteur position.

7.1 $\vec{p} = (3;0;2)$ $\vec{d} = (0;1;0)$

$(x;y;z) = (3;0;2) + \lambda(0;1;0)$ ou encore $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ équations paramétriques

$y \in \mathbb{R}$; $x = 3$; $z = 2$ équations cartésiennes **(situation particulière : $\vec{d}$ // $axe\ Oy$)**

7.2 $\vec{p} = (3;0;2)$ $\vec{d} = (0;-5;2)$

$(x;y;z) = (3;0;2) + \lambda(0;-5;2)$ ou encore $\begin{cases} x = 3 \\ y = -5\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ équations paramétriques

$(\lambda =)\ \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z-2}{2}$; $x = 3$ équations cartésiennes **(situation particulière : $\vec{d}$ // $plan\ yOz$)**

7.3 $\vec{p} = (3;0;2)$ $\vec{d} = (0;5;0) - (3;0;2) = (-3;5;-2)$

$(x;y;z) = (3;0;2) + \lambda(-3;5;-2)$ ou encore $\begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ équations paramétriques

$(\lambda =)\ \dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-2}{-2}$ équations cartésiennes

---

7.4 $\vec{p} = (3;0;2)$ $\vec{d} = (3;0;2) - (0;5;2) = (3;-5;0)$

$(x;y;z) = (3;0;2) + \lambda(3;-5;0)$ ou encore $\begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -5\lambda \\ z = 2 \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ équations paramétriques

$(\lambda =)\ \dfrac{y}{-5} = \dfrac{x-3}{3}$; $z = 2$ équations cartésiennes **(situation particulière : $\vec{d}$ // $plan\ xOy$)**

7.5 $\vec{p} = (3;5;0)$ $\vec{d} = (0;0;1)$

$(x;y;z) = (3;5;0) + \lambda(0;0;1)$ ou encore $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = \lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ équations paramétriques

$z \in \mathbb{R}$; $x = 3$; $y = 5$ équations cartésiennes **(situation particulière : $\vec{d}$ // $axe\ Oz$)**

7.6 $\vec{p} = (0;0;0)$ $\vec{d} = (3;5;0)$

$(x;y;z) = (0;0;0) + \lambda(3;5;0) = \lambda(3;5;0)$ ou encore $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ équations paramétriques

$z = 0$; $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5}$ équations cartésiennes **(situation particulière : $\vec{d} \subset$ $plan\ xOy$)**