❶ $A(2;-1;3)$, $B(3;2;1)$ et $C(4;8;-2)$.

Composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}=(1\,;3\,;-2)$ ; $\overrightarrow{AC}=(2\,;9\,;-5)$ ; $\overrightarrow{BC}=(1\,;6\,;-3)$
et $2\cdot\overrightarrow{AB}-3\cdot\overrightarrow{AC}=(2\,;6\,;-4)+(-6\,;-27\,;15)=(-4\,;-21\,;11)$.

---

❷ Dans chacun des cas suivants, indiquez si les points $A$ ; $B$ et $C$ sont alignés :

1. $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$ ; $\overrightarrow{AC}=(2\,;-5\,;-7)\neq\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$ pour tout $\lambda$ $\Rightarrow$ non colinéaires $\Rightarrow$ non alignés.
2. $\overrightarrow{AB}=(1;0;-5)$ ; $\overrightarrow{AC}=(8\,;0\,;-39)\neq\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$ pour tout $\lambda$ $\Rightarrow$ non colinéaires $\Rightarrow$ non alignés.
3. $\overrightarrow{AB}=(2;1;-1)$ ; $\overrightarrow{AC}=(-4\,;-2\,;2)=-2\cdot\overrightarrow{AB}$, donc $A$ ; $B$ et $C$ sont alignés.

---

❸ 1. $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{EE'}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{BG'}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{G'F}=\overrightarrow{B'F}$

$\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AD}$ ou $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{FG}=-\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AD}$

2. $\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BG}$ par définition du point $I$.

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AE}$. CQFD

---

❹ $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}\ \Rightarrow\ I=F$
$\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EC}\ \Rightarrow\ J=C$
$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AC}\ \Rightarrow\ K=C$

---

❺ $\left\|\overrightarrow{OA}\right\|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=\sqrt{9+16}=5$
$\left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\sqrt{0^2+(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=5$
$\left\|\overrightarrow{OC}\right\|=\sqrt{0^2+0^2+5^2}=5$
$\left\|\overrightarrow{OD}\right\|=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{4+12+9}=5$
Tous les points sont équidistants de l'origine O, à une distance 5, donc ils sont sur une sphère centrée en $O$ et de rayon $R=5$.