Corrigé de l'épreuve de mathématique sur les limites, du 27 septembre 2005. 3ème Niveau 1.

1.1 $f(0{,}1) \approx -0{,}4996$; $f(0{,}01) \approx -0{,}499996$; $f(0{,}001) \approx -0{,}5$; $f(0{,}0001) \approx -0{,}5001$
La calculatrice donne $f(0{,}00001) \approx 0$. Elle se trompe, car on atteint les limites de précisions !
On remarque que les valeurs se rapprochent de $-0{,}5$, donc il semble que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -0{,}5$.

1.2 $g(100) \approx 2{,}982$; $g(1'000) \approx 2{,}9982$; $g(10'000) \approx 2{,}99982$; $g(100'000) \approx 2{,}999982$
On remarque que les valeurs se rapprochent de 3, donc il semble que : $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 3$.

(4 points) (6 minutes)

---

2. En "lisant" le graphique, on en déduit que :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, car la courbe monte sur la gauche.

b) $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x) = -2$ c) $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = 1$

d) $\lim\limits_{x \to -3,5} f(x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 2$, car si x est proche de -2, $f(x)$ est proche de 2. Mais $f(-2) = 0{,}5$.

f) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 3$

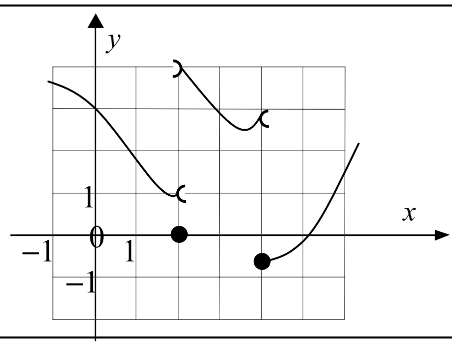
g) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \approx 3{,}25$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \approx 1{,}5$. Donc la limite à droite est différente de la limite à gauche, donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ n'existe pas.

h) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3{,}5$

(10 points) (12 minutes)

---

3. Sur le graphique suivant, dessinez une fonction f satisfaisant les conditions ci-dessous :
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$; $f(2) = 0$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$;
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$ et $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ n'existe pas.



(6 points) (12 minutes)

---

4. Il est faux que : "Si $f(2) = 7$, alors $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$ ".

Pour que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$, il faut que lorsque x est proche de 2 mais différent de 2, $f(x)$ doit être proche de 7. La valeur de $f(2)$ n'a aucune influence sur le résultat de la limite.

(4 points) 8 minutes

---

5. Calculs de limites...

1.	$\lim\limits_{x\to10} \sqrt{x}+x^3 = \sqrt{10}+1'000$	/2
2.	$\lim\limits_{x\to7} \dfrac{10}{(x-7)^2}=+\infty$. Le dénominateur est toujours > 0 et il tend vers 0, alors que le num. = 10.	/2
3.	$\lim\limits_{x\to7} \dfrac{10}{x-7}=\begin{cases}+\infty & \text{si } x\to7^+\\ -\infty & \text{si } x\to7^-\end{cases}$ lim. gauche $\neq$ lim. droite donc la limite n'existe pas !	/3
4.	$\lim\limits_{x\to7} \dfrac{x^2-8x+7}{x^2-49}=\lim\limits_{x\to7}\dfrac{(x-1)\cdot(x-7)}{(x-7)\cdot(x+7)}=\lim\limits_{x\to7}\dfrac{(x-1)}{(x+7)}=\dfrac{6}{14}=\dfrac{3}{7}$	/3
5.	$\lim\limits_{x\to5} \dfrac{2x^3-5x^2-28x+15}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)\cdot(2x^2+5x-3)}{(x-5)\cdot(x+5)}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(2x^2+5x-3)}{(x+5)}=\dfrac{72}{10}=\dfrac{36}{5}$ Par division polynomiale	/4
6.	$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10}{10^3-x}=0^-$ car le dénominateur devient $-\infty$	/1
7.	$\lim\limits_{x\to-\infty} (7-2x)\cdot(x+3)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$	/2
8.	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{15x^4-9x^2+10}{7x^3+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4\cdot\left(15-\frac{9}{x^2}+\frac{10}{x^4}\right)}{x^3\cdot\left(7+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot\left(15-\frac{9}{x^2}+\frac{10}{x^4}\right)}{\left(7+\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{-\infty\cdot15}{7}=-\infty$	/3
9.	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^3+1}{1-2x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\cdot(7+1/x^3)}{x^3\cdot(1/x^3-2)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(7+1/x^3)}{(1/x^3-2)}=\dfrac{7}{-2}=-3,5$	/2
10.	$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x^2}\bullet\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)-(x^2+x+1)}{x^2\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{x^2\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\dfrac{-1}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$	/4
11.	$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-5}{\sqrt{x^2+25}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot\left(2-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{25}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot\left(2-\frac{5}{x}\right)}{\lvert x\rvert\cdot\sqrt{\left(1+\frac{25}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot\left(2-\frac{5}{x}\right)}{x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{25}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{25}{x^2}}}=2$	/3
12.	Comme en 11 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-5}{\sqrt{x^2+25}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot(2-5/x)}{\sqrt{x^2\cdot(1+25/x^2)}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot(2-5/x)}{\lvert x\rvert\cdot\sqrt{1+25/x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot(2-5/x)}{-x\cdot\sqrt{1+25/x^2}}=\dfrac{2}{-1}=-2$	/1

(30 points) 45 minutes

---

6. C'est la courbe g qui représente le logarithme.

On constate que : $g(1)=0$; $g(2)=1$; $g(2^2)=2$; $g(2^3)=3$; $g(2^4)=4$;

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=-\infty$ et il semble que $g(2^{-1})=-1$ et $g(2^{-2})=-2$.

Ce sont toutes des caractéristiques de la fonction logarithme en base 2.

Donc $g(x)=\log_2(x)$. Rappelons que : $\boxed{y=\log_a(x) \leftrightarrow x=a^y \quad ; \quad x\in\mathbb{R}_+^* \quad y\in\mathbb{R}}$.

(1 point + 3 points de bonus)

Barème :

1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
0..6	7..13	14..19	20..26	27..32	33..37	38..41	42..45	46..50	51..55