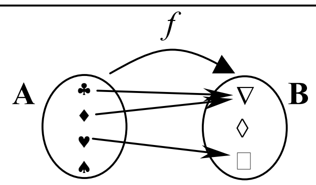
I. Rappels

Qu'est-ce que l'Analyse ?
On pourrait dire que l'analyse est l'algèbre des nombres infiniment petits et infiniment grands.
A cet effet, l'analyse étudie les propriétés des fonctions à l'aide de la notion de limite.

Définition : (Dirichlet 1837)

Une **fonction** est définie par :

1) Un ensemble A appelé **ensemble de départ**, ou **source**.



2) Un ensemble B appelé **ensemble d'arrivée**, ou **but**.

3) Une règle de correspondance, qui à chaque élément de l'ensemble de départ fait correspondre *zéro (aucun)* ou *un* élément de l'ensemble d'arrivée.

4) Si à chaque élément de l'ensemble de départ la règle de correspondance associe ***exactement un*** élément de l'ensemble d'arrivée, il s'agit d'une **application**.

Définitions :
Si ***a*** appartient à l'ensemble de départ et ***b*** est un élément de l'ensemble d'arrivée qui correspond à ***a***,
b est appelé l'**image de *a***. (***a*** possède au plus une image)
a est appelé une **préimage de *b***. (***b*** peut posséder zéro, une ou plusieurs préimages)

On désigne souvent une fonction ou une application par les lettres ***f***, ***g*** ou ***h***.

Si on désigne la fonction par ***f*** alors on note : ***f*(*a*)** l'image de ***a***.

On note une fonction : $\boxed{\begin{array}{l} f : A \to B \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array}}$ On parle d'une **fonction de *A* dans *B***.

Le **domaine de définition** d'une fonction ***f*** noté **Dom(*f*)** est *le sous-ensemble de l'ensemble de départ formé des éléments possédant une image.*

Nous étudierons surtout les **fonctions réelles**, c'est à dire les fonctions dont l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des sous-ensembles des nombres réels $\mathbb{R}$.

L'**ordonnée à l'origine** d'une fonction réelle ***f*** est l'image de 0. Elle se note : ***f*(0)**

Les **zéros** d'une fonction réelle ***f*** est l'ensemble des préimages de 0. Elle se note : **Zéros(*f*)**
Autrement dit, c'est l'ensemble des nombres ayant 0 comme image.

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est une **fonction réelle**.
$x \mapsto x^2 + 5x + 6$ $\quad$ $f(x) = x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3)$

L'**image** de 4 est $f(4) = 4^2 + 5\cdot 4 + 6 = 42$ (autre calcul : $f(4) = (4 + 2) \cdot (4 + 3) = 42$)

L'ensemble des **préimages** de 42 est $\{ 4 ; -9 \}$, car $f(4) = 42$ et $f(-9) = (-9)^2 + 5\cdot(-9) + 6 = 42$

Le **domaine de définition** de f est **Dom(*f*)** $= \mathbb{R}$. L'**ordonnée à l'origine** de f est $f(0) = 6$

Zéros(*f*) $= \{ -2 ; -3 \}$, car $f(-2) = 0$ et $f(-3) = 0$ sont les seules solutions de $(x + 2) \cdot (x + 3) = 0$.

II. Approche intuitive de la notion de limite

On a vu dans l'activité nommée "limites" quelques exemples de limites.

Pour une fonction réelle donnée $f(x)$, le calcul de "limite" consiste à déterminer vers quelle valeur tend $f(x)$ lorsque x se rapproche d'une valeur donnée.

Par exemple, si $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ et si x se rapproche de 1, alors $f(x)$ tend vers 2

Car $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=x+1$

On écrit : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=.....2.......$

On dit : "limite, lorsque *x* tend vers 1 de *f* de *x* égal".

On peut aussi s'intéresser au cas où x devient de plus en plus grand et chercher vers quelle valeur tends $f(x)$.

Par exemple, si $g(x)=\dfrac{x}{2x-1}$ et si x devient de plus en plus grand, alors

$g(x)$ tend vers 0,5

On écrit : $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=....0{,}5.....$

On dit : "limite, lorsque *x* tend vers l'infini de *g* de *x* égal".

Saurez-vous déterminer la limite suivante ? $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0{,}5$, elle est la même que précédemment.

Parfois, lorsque x tend vers un nombre, l'image $f(x)$ de x par f ne tend pas vers un nombre.

Par exemple, pour $h(x)=\dfrac{|x|}{x}$, si x se rapproche de 0, que peut-on dire du comportement de $h(x)$?

On écrit : $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=..-1.....$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=...1.......$

Autre exemple plus extrême : $k(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

si x se rapproche de 0, que peut-on dire du comportement de $k(x)$?

Cette fonction oscille tellement autour de x = 0, qu'elle ne se rapproche d'aucune valeur précise lorsque x se rapproche de 0.

Pour vous en convaincre, tentez de tracer le graphique de cette fonction autour de x = 0.

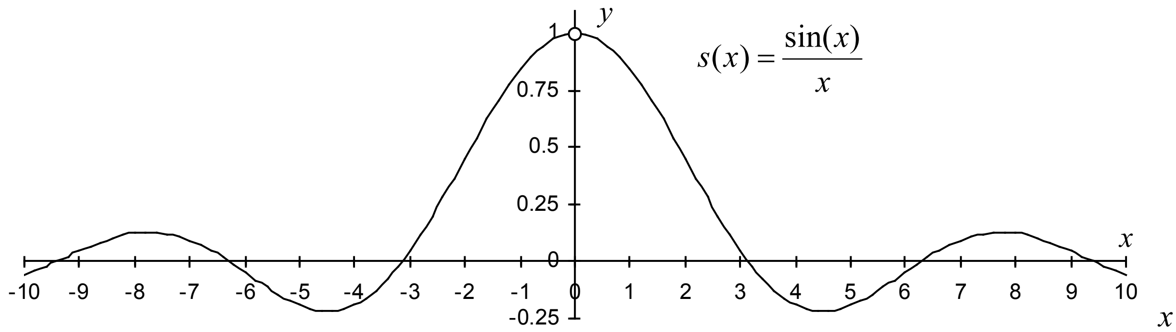
III. Intérêts de savoir calculer des limites

Le calcul de limites est très important dans de nombreux domaines scientifiques. Voici deux exemples.

Exercice III.1

Complétez le graphique de la fonction réelle définie par $s(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, (x exprimé en radians).

Dom(s) = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



La fonction s n'est pas définie en $x = 0$, mais il semble naturel de définir une autre fonction $\tilde{s}$ très voisine : $\tilde{s}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Dom($\tilde{s}$) = $\mathbb{R}$

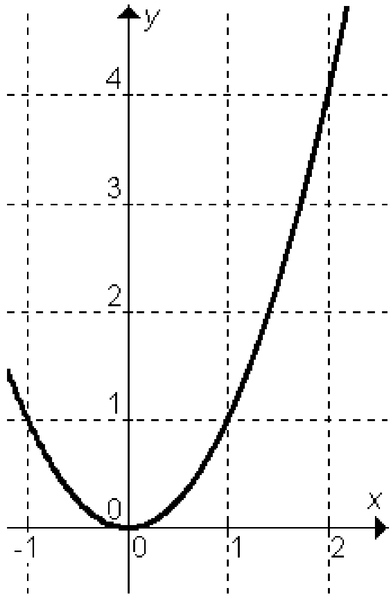
Le calcul de limite permet ainsi d'étendre naturellement le domaine de définition de certaines fonctions, pour obtenir une nouvelle fonction de domaine plus vaste.

Sans calculatrice, écrivez une approximation de :
(L'angle est en radians !)

$\sin(0{,}1) \approx 0{,}1$

$\sin(0{,}01) \approx 0{,}01$

Exemple III.2



Soit la fonction réelle : $f(x) = x^2$.

a) Calculez l'équation de la droite passant par les points $(1\,;f(1))$ et $(2\,;f(2))$.

Pente = (f(2) - f(1)) / (2 - 1) = (4 - 1) / 1 = 3

La droite passe par le point (1 ; 1), donc

y = 3·x - 2

b) Calculez l'équation de la droite passant par les points $(1\,;f(1))$ et $(t\,;f(t))$, où t est un nombre que l'on imagine voisin de 1.

Pente = (f(t) - f(1)) / (t - 1) = (t² - 1) / (t - 1) = (t + 1)·(t - 1) / (t - 1) = t + 1

La droite passe par le point (1 ; 1), donc

y = (t + 1) · x - t

Lorsque x = 1, on obtient bien y = 1.

c) Calculez l'équation de la droite passant par le point $(1\,;f(1))$, qui frôle la courbe de la fonction $f(x) = x^2$. Cette droite touche la courbe de la fonction f uniquement au point d'abscisse 1.

Ici, il faut prendre l'exemple b) et faire tendre t vers 1.

Cela donne une pente de 2 et la droite d'équation :

y = 2·x - 1

Cette droite est tangente à la parabole au point (1 ; 1).

On définira précisément ce que "tangente" signifie plus loin de le cours.

IV. Notion de limite

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction réelle de domaine de définition $\mathrm{Dom}(f)$.
Soit a un nombre appartenant à $\mathrm{Dom}(f)$ ou au bord de $\mathrm{Dom}(f)$.

Par exemple, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$, $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\,;1\}$

0 ; 1 ; $+\infty$ et $-\infty$ appartiennent au bord de $\mathrm{Dom}(f)$.

$+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres, mais des limites de nombres.

Définition :

$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=L}$ signifie : **lorsque *x* tend vers *a*, *f(x)* tend vers *L*.**(1)

Ceci se lit : **"Limite de *f(x)*, pour *x* tendant vers *a*, égale *L*".**

Parfois on ne s'intéresse qu'au cas où $x<a$.
On parle alors de "**la limite à gauche**". On écrit : $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=L}$
Remarquez qu'on a écrit a^- au lieu de a.

De manière similaire, on peut ne s'intéresser qu'au cas où $x>a$.
On parle alors de "**la limite à droite**". On écrit : $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)=L}$
Remarquez qu'on a écrit a^+ au lieu de a.

La valeur de la fonction $f(a)$ n'a aucune importance pour calculer les limites ci-dessus.

Remarque :

> Si la limite à gauche et la limite à droite existent et sont égales alors **la limite existe**.
> Dans ce cas : $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a} f(x)$

Extensions :

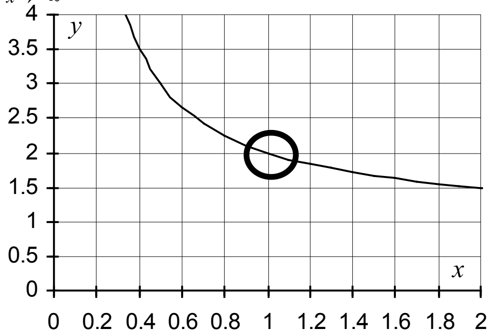
1) On rencontre aussi les limites :
   $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=L}$ lorsque x devient de plus en plus grand
   et
   $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=L}$ lorsque x devient de plus en plus petit.

2) Dans toutes les notations ci-dessus, L représente soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

(1) Voici la définition standard rigoureuse de la limite, mais nous ne l'utiliserons pas.
La limite de *f(x)* lorsque x tend vers a égale L, si et seulement si
Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que si $|x-a|<\delta$ et $x\neq a$, alors $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Exercice IV.1

i) Pour $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$, calculez $f(1)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

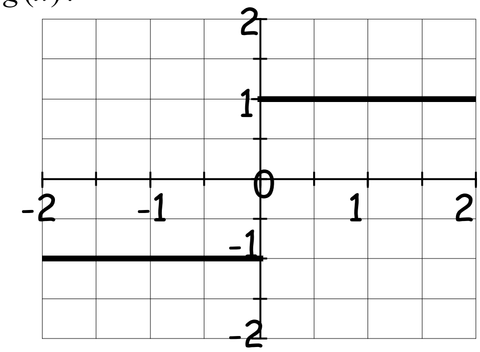


f (x) = $\dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x-1)}=\dfrac{x+1}{x}$ et f (x) = $1+\dfrac{1}{x}$ donc

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1+1}{1}=2$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1+0=1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1+0=1$

ii) Pour $g(x)=\dfrac{x}{|x|}$, calculez $g(0)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

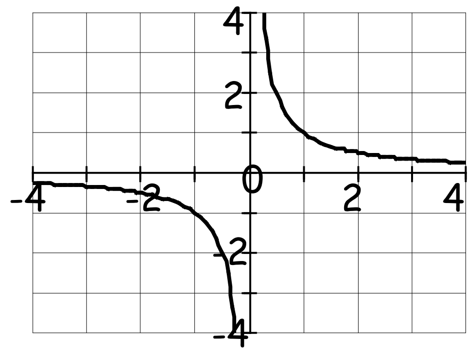


g (0) n'est pas défini. $0 \notin$ Dom(g).

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ n'est pas défini, car les limites à gauche et à droite sont différentes.

iii) Pour $h(x)=\dfrac{1}{x}$, calculez $h(0)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.



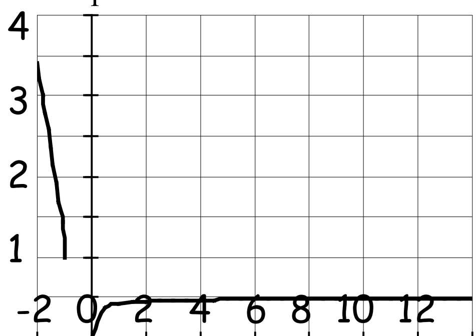
h (0) n'est pas défini. $0 \notin$ Dom(h).

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ n'est pas défini, car les limites à gauche et à droite sont différentes.

iv) Pour $j(x)=\sqrt{x^2+x}-x$, calculez $\lim\limits_{x\to +\infty} j(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} j(x)$.

Indication pour la première limite : multiplier $j(x)$ par $\dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$, puis simplifier le numérateur.

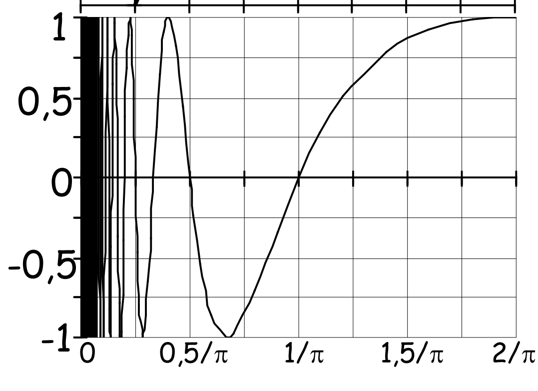


Pour $x>0$; $j(x)=$

$$\sqrt{x^2+x}-x\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} j(x)=0{,}5$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} j(x)=\infty$

v) Pour $k(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, calculez $\lim\limits_{x\to 0^+} k(x)$.



$\lim\limits_{x\to 0^+} k(x)$ n'existe pas, car $k(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ oscille de plus en plus lorsque x tend vers 0.

V. Règles de calculs de limites

<u>Remarque :</u>
Pour les calculs de limites, on peut envisager différents cas : (Quel exercice correspond à quel cas ?)

1) la limite existe et est un nombre réel ;
2) la limite est $\pm\infty$, ce n'est pas un nombre réel ;
3) les limites à gauche et à droite existent, mais sont de valeurs différentes, donc la limite n'existe pas.
4) les limites à gauche et/ou à droite n'existent pas, donc la limite n'existe pas.

<u>De manière triviale :</u>

1) $\lim\limits_{x\to a}(constante) = constante$ par exemple : $\lim\limits_{x\to 2}(13) = ...13...$
2) $\lim\limits_{x\to a}(x) = a$ par exemple : $\lim\limits_{x\to 4}(x) = ...4...$

<u>Propriétés des limites :</u>

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$, où L_1 et L_2 sont deux nombres réels,
alors :
1) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = L_1 + L_2$
2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big) = L_1 - L_2$
3) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = L_1 \cdot L_2$
4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$
5) $\lim\limits_{x\to a}\big(\lambda\cdot g(x)\big) = \lambda\cdot L_2$, où λ est une constante. C'est un cas particulier de 3) avec : $f(x) = \lambda$.

Les règles de calcul de limites quand $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ et/ou $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ sont plus complexes, car l'infini n'est pas un nombre.
Elles doivent être vues de cas en cas. Des exemples sont étudiés au chapitre suivant.

<u>Remarque :</u>

Ces propriétés seront utilisées intensivement dans les démonstrations des règles de dérivation au chapitre XII.

VI. Quelques techniques de calculs de limites

VI.1 Limites immédiates

Certaines limites se calculent facilement, en évaluant simplement la fonction en la valeur limite.

Exemples VI.1a :

1. $\lim\limits_{x\to 2} 3+x = 5$
2. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x}{2}+\sqrt{2x} = 2{,}5+\sqrt{10}$
3. $\lim\limits_{x\to -1} x^3\cdot\left(\frac{5+x}{1-x}\right) = -2$

Certaines limites lorsque x tend vers $\pm\infty$ valent $\pm\infty$ et sont simple à calculer.

Exemples VI.1b :

4. $\lim\limits_{x\to\infty} (3+x)\cdot(5x-7)=\infty$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot(8-3x)=-\infty$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} (3+x)\cdot(5x-7)=\infty$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\cdot(8-3x)=\infty$

VI.2 Limites quasi immédiates $\boxed{\frac{"1"}{0} \text{ et } \frac{"\ 1\ "}{\pm\infty}}$

Il suffit d'un peu de bon sens pour se rendre compte que :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

Remarque : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ n'existe pas, car les deux limites : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$ sont différentes.

Exemples VI.2 :

8a. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\pi}{x-1}=\infty$

8b. $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\pi}{x-1}=-\infty$

9a. $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x}{3-x}=-\infty$

9b. $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x}{3-x}=\infty$

10a. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+7}{\sin(x)}=\infty$

10b. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+7}{\sin(x)}=-\infty$

11a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$

11b. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$

12a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$

12b. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{0{,}1\cdot x-1'000'000}=0$

13a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

13b. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\ln(x)}=0$

VI.3 Limites de la forme indéterminée $\boxed{\frac{0}{0}}$

Dans ce cas, le numérateur et dénominateur ont un zéro en commun. Il faut les factoriser afin de simplifier la fraction avant de passer à la limite.

Exemples VI.3 :

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}{\cancel{(x-1)}\cdot x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1+1}{1}=2$

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x}{x^2-4x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x\cdot\cancel{(x-5)}}{(x+1)\cdot\cancel{(x-5)}}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{5}{6}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cancel{(x+1)}\cdot(x-3)}{\cancel{(x+1)}\cdot(x-4)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-3}{x-4}=\dfrac{-4}{-5}=\dfrac{4}{5}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5\cdot(x-3)^2}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5\cdot(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-3)}\cdot(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5\cdot(x-3)}{x+3}=0$

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x-5}}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^{1/3}}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^{2/3}}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}=\infty$

VI.4 Limites de la forme indéterminée $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

C'est un cas similaire au précédent. Il faut factoriser les puissances maximales du numérateur et du dénominateur afin de les simplifier la fraction avant de passer à la limite.

Exemples VI.4 :

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2-x+7}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^2}\cdot(3+\overbrace{2/x}^{\to 0}-\overbrace{1/x^2}^{\to 0})}{\cancel{x^2}\cdot(2-\underbrace{1/x}_{\to 0}+\underbrace{7/x^2}_{\to 0})}=\dfrac{3}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3+4x-1}{7x^3+10x^2-8}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cancel{x^3}\cdot(2+\overbrace{4/x^2}^{\to 0}-\overbrace{1/x^3}^{\to 0})}{\cancel{x^3}\cdot(7+\underbrace{10/x}_{\to 0}-\underbrace{8/x^3}_{\to 0})}=\dfrac{2}{7}$

8. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^2+x+1}{2x^3-x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cancel{x^3}\cdot(\overbrace{4/x+1/x^2+1/x^3}^{\to 0})}{\cancel{x^3}\cdot(2-\underbrace{1/x^2-1/x^3}_{\to 0})}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\overbrace{4/x+1/x^2+1/x^3}^{\to 0}}{2-\underbrace{1/x^2-1/x^3}_{\to 0}}=\dfrac{0}{2}=0$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-9x^2-7}{x^2+8x+9}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\cdot(1-9/x-7/x^3)}{x^2\cdot(1+8/x+9/x^2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot(1-9/x-7/x^3)}{1+8/x+9/x^2}=\dfrac{\infty\cdot 1}{1}=\infty$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-7}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot(1-7/x)}{\sqrt{x^2\cdot(1+1/x^2)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot(1-7/x)}{x\cdot\sqrt{1+1/x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-7/x}{\sqrt{1+1/x^2}}=1$

11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-7}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot(1-7/x)}{\sqrt{x^2\cdot(1+1/x^2)}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot(1-7/x)}{-x\cdot\sqrt{1+1/x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-7/x}{-\sqrt{1+1/x^2}}=-1$

VI.5 Limites de la forme indéterminée $\boxed{0\cdot\infty}$

En général, on peut se ramener à un des cas précédents.

Exemples VI.5 :

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\cdot\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot(1+1/x)}{x\cdot(1-1/x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+1/x}{1-1/x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-7)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}(x-7)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2\cdot(1+1/x^2)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-7}{x\cdot\sqrt{1+1/x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x\cdot}(1-7/x)}{\cancel{x\cdot}\sqrt{1+1/x^2}}=1$

VI.6 Limites de la forme indéterminée $\boxed{\infty-\infty}$

Il faut se ramener à un cas précédent par manipulation algébrique.

Exemples VI.6 :

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2-1'000x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\left[1-1'000/x\right]=\infty$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+2)^2-(x^2-2x)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2+4x+4-x^2+2x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[6x+4\right]=\infty$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{(x+2)^2}{x}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+4-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot(4+4/x)}{x}=4$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2\cdot(1+1/x)}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x\cdot(\sqrt{1+1/x}+1)}=\dfrac{1}{2}$

VI.7 Limites faisant intervenir la composition d'application

Exemple VI.7 :

7. $\lim\limits_{x\to3}\cos\left((x+3)\cdot\pi\right)=\cos\left((3+3)\cdot\pi\right)=\cos\left(6\cdot\pi\right)=1$

8. $\lim\limits_{x\to3}\cos\left(\dfrac{x^2-9}{x-3}\cdot\pi\right)=\cos\left(\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+3)\cdot(x-3)}{x-3}\cdot\pi\right)=\cos\left(\lim\limits_{x\to3}(x+3)\cdot\pi\right)=\cos\left(6\cdot\pi\right)=1$

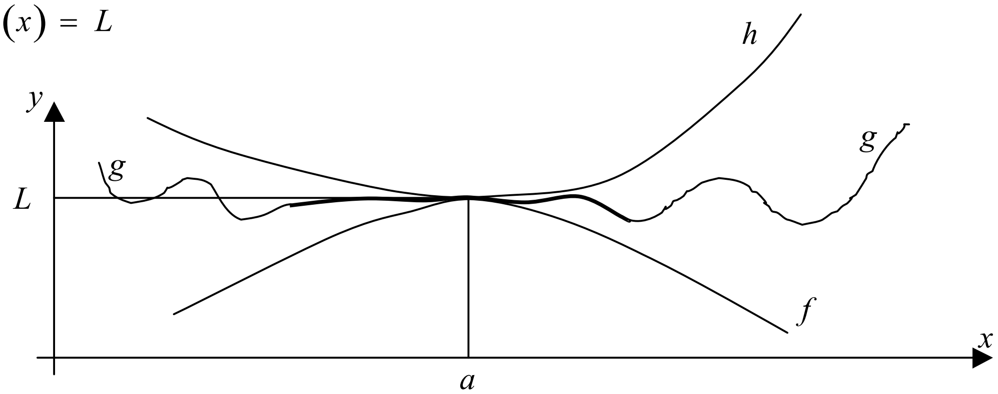
Le théorème suivant dit "**des deux gendarmes**" permet de calculer certaines limites.

Théorème des deux gendarmes :
Soit trois fonctions réelles f , g et h définies au voisinage de a, vérifiant les deux conditions :

- $f(x)\le g(x)\le h(x)$ pour tout x proche de a
- $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L=\lim\limits_{x\to a}h(x)$

alors $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$

Illustration :



Complétez le graphe de la fonction g satisfaisant : $f(x)\le g(x)\le h(x)$ pour tout x.
Où se lit la valeur de L ?

Un exemple d'application de ce théorème se trouve au chapitre "VIII. Une limite importante".

VII. Rappels de terminologie utilisée dans des théorèmes

Tout énoncé mathématique a une valeur : VRAI ou FAUX. Il n'y a pas d'autres valeurs.
Un énoncé qui n'est PAS VRAI est FAUX !
De nombreux théorèmes seront énoncés et démontrés dans ce cours.
Voici quelques rappels pour vous aider.

Un **théorème** est un énoncé que l'on peut démontrer être vrai.

La formulation habituelle d'un théorème est de la forme :

Si affirmation_1, **alors** affirmation _2. Que l'on note aussi : affirmation _1 $\Rightarrow$ affirmation _2.

L'affirmation _1 s'appelle **l'hypothèse** et l'affirmation _2 s'appelle **la conclusion**.

Cet énoncé signifie que si l'hypothèse est vraie, alors la conclusion est vraie.
!!! Mais si la conclusion est vraie, alors on ne peut rien conclure sur l'hypothèse. !!!
!!! Et si l'hypothèse est fausse, alors on ne peut rien conclure. !!!

Exemple d'un théorème :
"Si m est divisible par 9, alors m est divisible par 3."
L'hypothèse est : "m est divisible par 9".
La **conclusion** est : " m est divisible par 3".

La **réciproque** de l'énoncé : "**Si** affirmation _1, **alors** affirmation _2" est
Si affirmation _2, **alors** affirmation _1.
Dans la réciproque, l'hypothèse devient la conclusion et la conclusion devient l'hypothèse.
Exemple :
La réciproque de l'énoncé de l'exemple précédent est :
"Si m est divisible par 3, alors m est divisible par 9."

Pour montrer que l'énoncé "Si hypothèse, alors conclusion." est faux, il suffit de trouver un contre-exemple tel que l'hypothèse est vraie, mais la conclusion est fausse.
Exemple :
"Si m est divisible par 3, alors m est divisible par 9." est faux,
car pour $m = 6$, l'hypothèse est vraie, mais la conclusion est fausse.

Il existe aussi des théorèmes énoncés sous l'une des formes suivantes :
1) **Si** affirmation_1, **alors** affirmation _2 et **si** affirmation_2, **alors** affirmation _1.
2) **Si** affirmation_1, **alors** affirmation _2 et **réciproquement**.
3) affirmation_1 **si et seulement si** affirmation_2.
4) affirmation_1 $\Leftrightarrow$ affirmation_2.

Chacun de ces énoncés indique que l'affirmation_1 est équivalente à l'affirmation_2.

Exemple de théorème:
Dans un triangle de côtés a, b et c, c étant le côté le plus long,
1) **Si** $a^2 + b^2 = c^2$, **alors** le triangle est rectangle et **si** le triangle est rectangle, **alors** $a^2 + b^2 = c^2$.
2) **Si** $a^2 + b^2 = c^2$, **alors** le triangle est rectangle et **réciproquement**.
3) $a^2 + b^2 = c^2$ **si et seulement si** le triangle est rectangle.
4) $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow$ le triangle est rectangle.

- Cet énoncé signifie que si l'une des affirmations est vraie, alors l'autre est aussi vraie.
- Si l'une des affirmations est fausse, alors l'autre est aussi fausse.
- Pour montrer qu'un tel énoncé est faux, il suffit de trouver un exemple tel que l'une des deux affirmations "affirmation_1" ou "affirmation_2" soit vraie et l'autre fausse.

Les mathématiciens utilisent de nombreux symboles pour abréger leurs énoncés.
En voici quelques-uns.

symbole	signification :
$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres entiers plus grand ou égale à 0
$\mathbb{Z}$	l'ensemble des nombres entiers relatifs. Ils peuvent être positifs ou négatifs ou nul.
$\mathbb{Q}$	l'ensemble des nombres rationnels. Correspond aux nombres s'écrivant sous forme de fraction.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels. Correspond aux nombres avec ou sans virgules.
$\mathbb{R}_+$	l'ensemble des nombres réels positifs ou nul.
$\mathbb{R}_-$	l'ensemble des nombres réels négatifs ou nul.
$\mathbb{R}^*$	l'ensemble des nombres réels sauf le zéro.
$[a\,;b]$	l'intervalle fermé de a à b. Correspond à tous les nombres entre a et b, a et b compris.
$]a\,;b[$	l'intervalle ouvert de a à b. Correspond à tous les nombres entre a et b, a et b non compris.
$]-\infty; b]$	l'intervalle de moins l'infini à b. Correspond aux nombres plus petits ou égaux à b.
$[a\,;\infty[$	l'intervalle de a à plus l'infini. Correspond aux nombres plus grands ou égaux à a.

symbole	se lit :	exemples :
$\in$	"appartient à"	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $\sqrt{2}$ appartient aux nombres réels.
$\notin$	"n'appartient pas à"	$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\sqrt{2}$ n'appartient pas aux nombres rationnels.
$\subset$	"est inclus dans"	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ qui est inclus dans $\mathbb{Q}$ qui est ...
$\Rightarrow$	"implique" ou "donc" ou "si ... alors ..."	"n est divisible par 4 $\Rightarrow$ n est divisible par 2". "n est divisible par 4 implique n est divisible par 2" ou "Si n est divisible par 4 alors n est divisible par 2".
$\Leftrightarrow$	"si et seulement si" ou "est équivalent à"	"$n \in \mathbb{Z}$ et n^2 est divisible par 2 $\Leftrightarrow$ n est divisible par 2". "$n \in \mathbb{Z}$ et n^2 est divisible par 2 si et seulement si n est divisible par 2".
$\forall$	"pour tout" "quel que soit"	$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \in \mathbb{R}_+$. Pour tout nombre réel x, x^2 appartient aux réels positifs ou nul.
$\exists$	"il existe un"	$\exists\, x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$. Il existe un nombre réel x, tel que $x^2 = 2$.
∞	"l'infini"	x tend vers ∞. x tend vers l'infini. x devient de plus en plus grand.
$-\infty$	"moins l'infini"	x tend vers $-\infty$. x tend vers moins l'infini. x devient de plus en plus négatif.
$\pm$	"plus ou moins"	x tend vers $\pm\infty$. x tend vers plus l'infini ou moins l'infini.
$<$	"est plus petit que"	$3{,}14 < \pi$. 3,14 est plus petit que π.
$>$	"est plus grand que"	$3{,}15 > \pi$. 3,15 est plus grand que π.
$\geq$	"est plus grand ou égal à"	$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$. Pour tout nombre réel x, x^2 est plus grand ou égal à 0.
$\leq$	"est plus petit ou égal à"	$\forall\, x \in [0\,;1],\ x^2 \leq x$. Pour tout nombre x entre 0 et 1, x^2 est plus petit ou égal à x.
$\approx$	"est environ égal à"	$3{,}14 \approx \pi$. 3,14 est environ égal à π.
$\{...\}$	"l'ensemble"	$\{-1\,;0\,;1\}$. L'ensemble contenant -1, 0 et 1.
$\backslash$	"sauf"	$\mathbb{R} \setminus \{-1\,;0\,;1\}$. L'ensemble des réels, sauf l'ensemble { -1, 0 et 1}. $\mathbb{R} \setminus [2\,;3]$. L'ensemble des réels, sauf l'intervalle [2 ; 3].
α, β	alpha, beta	l'utilisation de lettres grecs est courante en mathématiques. En voici la liste : $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta\ \eta\ \theta\ \iota\ \kappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \xi\ o\ \pi\ \rho\ \sigma\ \tau\ \upsilon\ \varphi\ \chi\ \psi\ \omega$.

Donnons encore la définition suivante, utilisée plusieurs fois par la suite.
Un voisinage d'un nombre c est un intervalle ouvert contenant ce nombre c.

La définition exacte est légèrement plus générale, mais n'apporte rien de plus.

VIII. Une limite importante

Montrons que : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1}$, x est exprimé en radians !

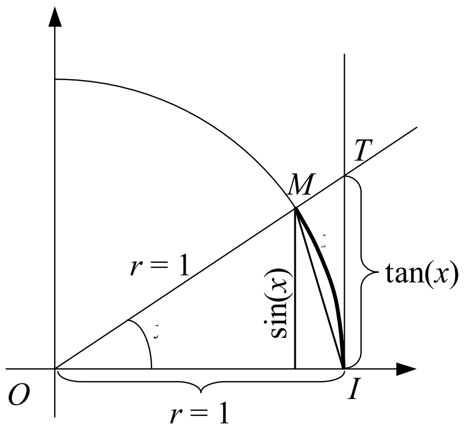
En utilisant la calculatrice, cette limite a déjà été abordée en début de cours. Maintenant, nous voulons montrer rigoureusement que cette limite est exacte.

Montrons que $\frac{\sin(x)}{x}$ prend la même valeur si on remplace x par $-x$.

$\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin(x)}{-x}=\frac{\sin(x)}{x}$. La première égalité vient d'une propriété de la fonction sinus.

En conséquence, il suffit d'étudier $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}$.

Voici le premier quadrant du cercle trigonométrique :



Si x mesure l'angle au centre en radians :

° la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ est : $r\cdot x=x$, car

longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{2\cdot\pi}\cdot x=x\cdot r$

° l'aire du secteur $\widehat{OIM}$ est : $\frac{r^2\cdot x}{2}=\frac{x}{2}$, car

aire du secteur $\widehat{OIM}=\frac{\pi\cdot r^2}{2\cdot\pi}\cdot x=\frac{x\cdot r^2}{2}$

<u>Calcul de la limite.</u>

La limite s'obtient en comparant les aires des triangles $\widehat{OIM}$ et $\widehat{OIT}$ avec celle du secteur $\widehat{OIM}$.

Remarquez que :

l'aire du triangle $\widehat{OIM}$ $\leq$ l'aire du secteur $\widehat{OIM}$ $\leq$ l'aire du triangle $\widehat{OIT}$ pour $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

$$\text{Donc : }\quad \frac{1\cdot\sin(x)}{2}\leq\frac{1^2\cdot x}{2}\leq\frac{1\cdot\tan(x)}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \sin(x)\leq x\leq\tan(x)$$

$$\Rightarrow\quad 1\leq\frac{x}{\sin(x)}\leq\frac{\tan(x)}{\sin(x)}=\frac{1}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow\quad 1\geq\frac{\sin(x)}{x}\geq\cos(x)$$

Ainsi le rapport $\frac{\sin(x)}{x}$ est toujours plus petit ou égale à 1 <u>et</u> plus grand ou égale à $\cos(x)$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=1$, le théorème des deux gendarmes implique que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ CQFD.

Conséquence : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1}$

Car : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\cdot\cos(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}=1\cdot 1=1$

On a utilisé la définition tan(x) = sin(x) / cos(x), une propriété des fractions et la propriété que la limite d'un produit égale le produit des limites quand elles existent.

IX. Asymptotes verticales, horizontales et obliques

IX.1 Asymptotes verticales :

Définition :

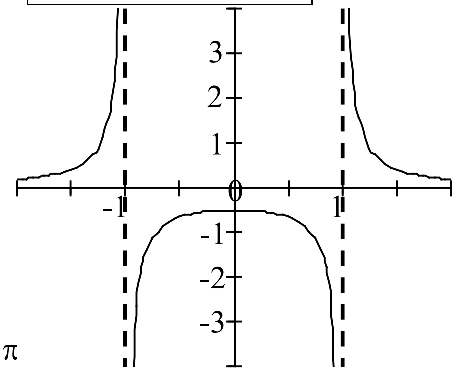
Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un point a, sauf éventuellement en ce point (« *trou* » *du domaine…*).

Elle possède une ***asymptote verticale*** d'équation $x = a$ si et seulement si : $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \left| f(x) \right| = +\infty}$

Exemple :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Cette fonction possède une asymptote verticale d'équation $x = -1$ et une autre asymptote verticale d'équation $x = 1$.



Exercice IX.1 :

Indiquez les équations des asymptotes verticales des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = \dfrac{1}{x - \pi}$ Il y a une asymptote verticale d'équation : x = π

2) $f_2(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ Il y a deux asymptotes verticales d'équations : x = 3 et x = -3.

3) $f_3(x) = \tan(x)$ Il y a une infinité d'asymptotes verticales d'équations :

$x = \pi/2 + k\cdot\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

IX.2 Asymptotes horizontales :

Définition :

Soit f une fonction réelle.

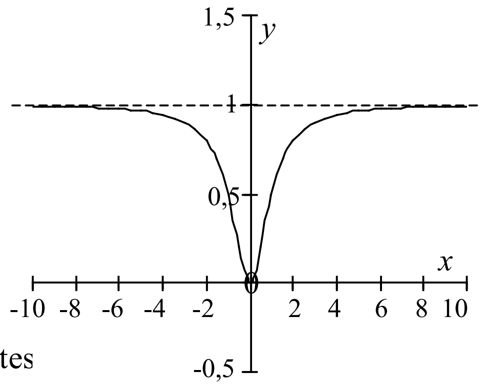
Elle possède une ***asymptote horizontale*** d'équation $y = b$ si et seulement si :

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b}$

Exemple :

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

Cette fonction possède une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.



Exercice IX.2 :

Indiquez les équations des asymptotes horizontales des fonctions suivantes

1) $f_1(x) = \dfrac{5x}{x - \pi}$ Il y a une asymptote horizontale d'équation y = 5, car $f_1(x) \to 5$ si $x \to \infty$.

2) $f_2(x) = \dfrac{3x - 2}{|x| + 1}$ Il y a deux asymptotes horizontales d'équations : y = –3 et y = 3.

IX.3 Asymptotes obliques :

Définition :

Soit f une fonction réelle.

Elle possède une ***asymptote oblique*** d'équation $y = ax + b$ si et seulement si on peut écrire la fonction sous la forme $\boxed{f(x) = ax + b + \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0 \quad \text{ou bien} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \varepsilon(x) = 0}$:

Cela signifie que pour de grandes valeurs positives ou négatives de x,
la fonction se rapproche de plus en plus de l'application affine $y = ax + b$.

Exemple :

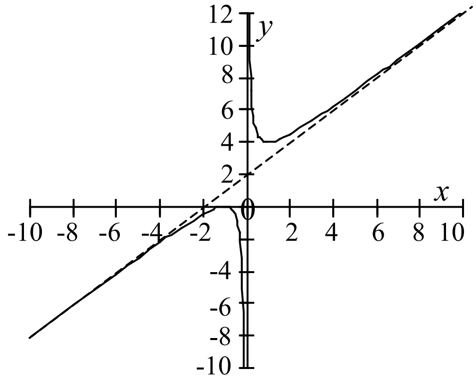
1) $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x}$

Dans cette exemple, $\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x}$,

qui tend bien vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.

Cette fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = x + 2$.

Remarquez qu'elle possède aussi l'asymptote verticale $x = 0$.



Comment déterminer les deux coefficients a et b de l'asymptote oblique ?

L'écriture $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ s'obtient généralement par division polynomiale.

Exercice IX.3 :

Indiquez les équations des asymptotes obliques des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x} = x + 3 + \dfrac{5}{x}$. Ici $\varepsilon(x) = \dfrac{5}{x}$.

Donc f_1 possède une asymptote oblique d'équations : $y = x + 3$.

2) $f_2(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{x^2 + 2x + 2}$

Par division polynomiale : $f_2(x) = 2x - 1 + \dfrac{-6x + 7}{x^2 + 2x + 2}$. Ici $\varepsilon(x) = \dfrac{-6x + 7}{x^2 + 2x + 2}$.

donc f_2 possède une asymptote oblique d'équations : $y = 2x - 1$.

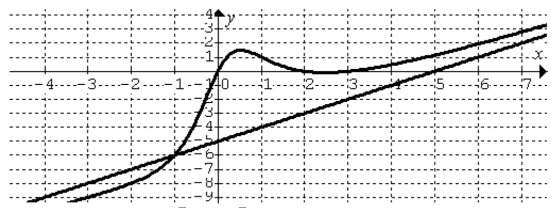
3) $f_3(x) = \dfrac{3x^2 + 14x + 10}{x^2 + 4x + 5}$

Par division polynomiale : $f_3(x) = 3 + \dfrac{2x - 5}{x^2 + 4x + 5}$. Ici $\varepsilon(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 + 4x + 5}$.

donc f_3 possède une asymptote oblique qui est horizontale d'équations : $y = 3$.

4) $f_4(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 + 1}$

Tracez cette fonction sur une feuille, pour remarquez qu'elle croise sont asymptote oblique.



Par division polynomiale : $f_4(x) = x - 5 + \dfrac{5x + 5}{x^2 + 1}$. Ici $\varepsilon(x) = \dfrac{5x + 5}{x^2 + 1}$.

donc f_4 possède une asymptote oblique d'équations : $y = x - 5$.

Remarque 1 : Une fonction peut croiser son d'asymptote oblique.

Remarque 2 : Une asymptote horizontale est un cas particulier d'asymptote oblique avec $a = 0$.

X. Notion de continuité

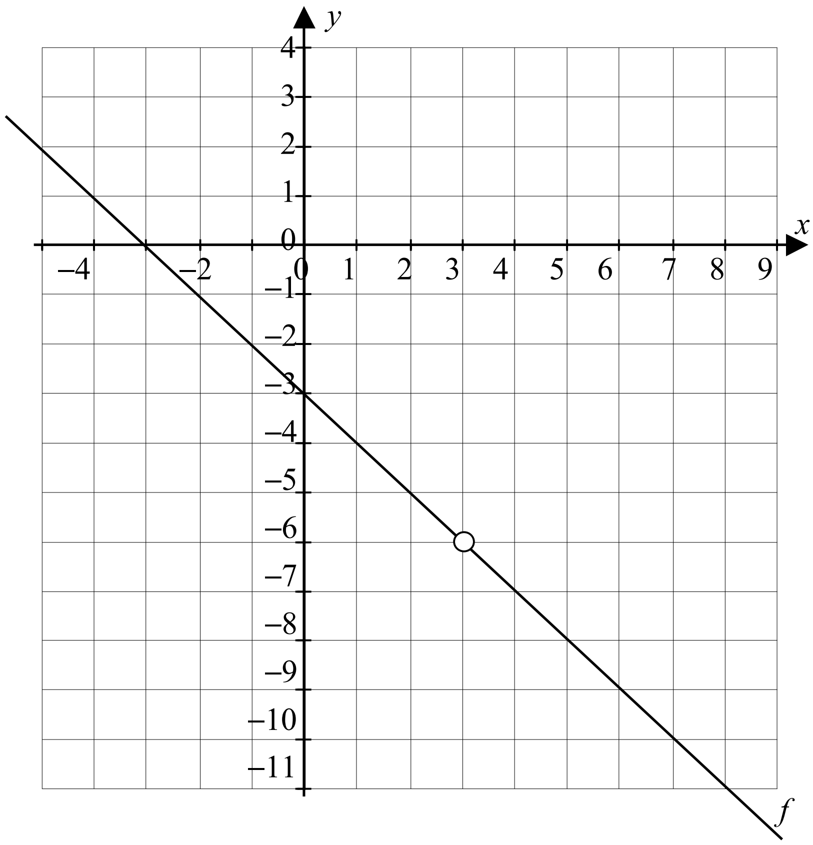
Activité X.1

Considérons la fonction réelle : $f(x)=\dfrac{-x^2+9}{x-3}=-\dfrac{x^2-9}{x-3}=-\dfrac{(x-3)\cdot(x+3)}{(x-3)}=-(x+3)$

Indiquez son domaine : Dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{\ 3\ \}$

Tracez son graphe dans le graphique suivant.

x	$f(x)$
–4	1
–3	0
–2	–1
–1	–2
0	–3
1	–4
2	–5
3	non défini
4	–7
5	–8
6	–9
7	–10



A quelle fonction ressemble énormément la fonction f ? En quoi, cependant, en est-elle distincte ?

f ressemble à la fonction g(x) = –(x + 3), de domaine de définition Dom(g) = ℝ.
La seule différence entre f et g est le domaine de définition !

Comment expliquer algébriquement la bizarrerie de la fonction f ?

Par simplification algébrique on élimine la bizarrerie qui élimine x = 3 du domaine de définition de la fonction f.
f (x) = –(x + 3) fois la fraction $\dfrac{x-3}{x-3}$, qui vaut toujours 1, sauf en x = 3 où elle n'est pas définie.

A votre avis, la fonction f est-elle continue ?

La fonction f n'est pas continue en x = 3, car pour dessiner sa courbe, il faut lever le crayon en x = 3.

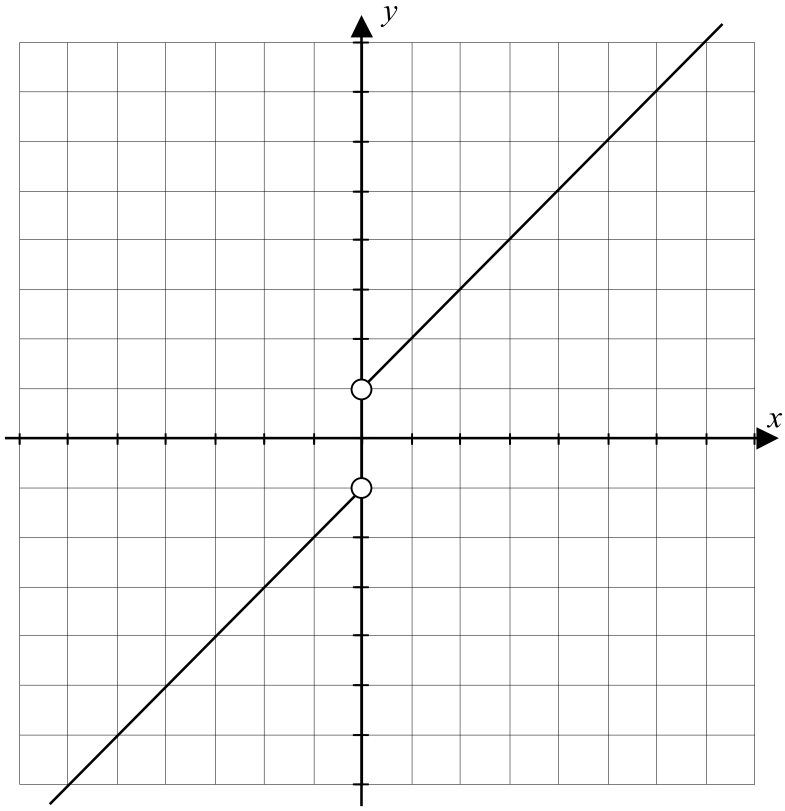
Activité X.2

Considérons la fonction réelle : $g(x) = x + \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} x-1 & si \quad x<0 \\ x+1 & si \quad x>0 \end{cases}$

Indiquez son domaine : Dom(g) = $\mathbb{R} \setminus \{ 0 \} = \mathbb{R}^*$.

Tracez son graphe dans le graphique suivant.

x	$g(x)$
-4	-5
-3	-4
-4	-3
-1	-2
0	non défini
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8



A votre avis, la fonction g est-elle continue ?

La fonction g n'est pas continue en $x = 0$, car pour dessiner sa courbe, il faut lever le crayon en $x = 0$. Elle "saute" en $x = 0$, de -1 à $+1$.

Intuitivement, une fonction continue est une fonction qui peut se dessiner « *sans lever le crayon* ».
Plus précisément, le graphe d'une fonction continue n'a pas de saut ni de trou.

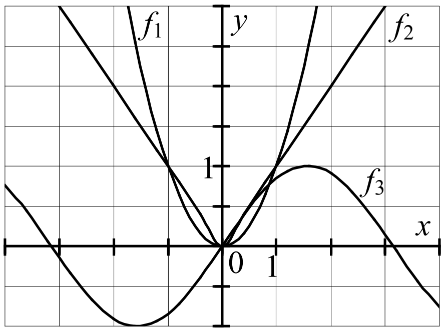
Exemples :

1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$

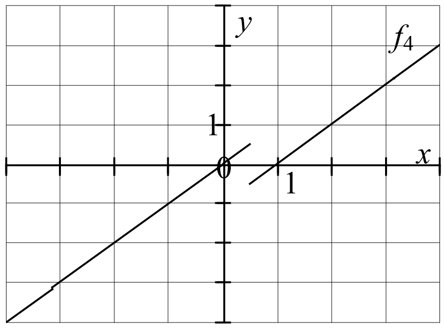
2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = |\, x \,|$

3) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \sin(\, x \,)$

sont trois fonctions continues sur $\mathbb{R}$.



4) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0,5 \\ x-1 & \text{si } x \geq 0,5 \end{cases}$ est discontinue en $x = 0,5$.



Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant le point a.

Définition :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in \mathbb{R}$.

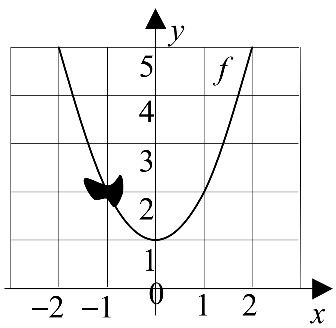
La fonction f est **continue** en a $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 1)\ a \in Dom(f) \\ 2)\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \end{cases}$

Définition :
La fonction f est **continue** sur un intervalle I si et seulement si elle est continue en tout point $a \in I$.

Remarque :
Les fonctions que vous avez étudiées et que vous étudierez sont généralement continues, sauf parfois en quelques points isolés.

Exercice X.2 :

1) Une tache noire cache la valeur de l'image de -1 par la fonction f définie par le graphique suivant.
Sachant que cette fonction est partout continue, que vaut $f(-1)$ à votre avis ?



En prolongeant le trait, il semble que f(–1) = 2.

Deux propriétés importantes des fonctions continues ont déjà été utilisées intuitivement.

- Sachant que f est une fonction continue en a, on s'est permis d'écrire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ et si f est une fonction continue en L, alors $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f(L)$.

<u>Exemples :</u> $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x} = \sqrt{9} = 3$ et $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x^2-17} = \sqrt{81-17} = \sqrt{64} = 8$

Dans ces deux exemples, $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 17$ et $L = 64$

<u>Théorèmes :</u>
Si f et g sont deux fonctions réelles continues en a, alors

1) $f+g$ est continue en a.

2) $f-g$ est continue en a.

3) $f\cdot g$ est continue en a.

4) $\dfrac{f}{g}$ est continue en a, à condition que $g(a) \neq 0$.

5) Si g est continue en $f(a)$ alors $g\circ f$ est continue en a. Rappelons que $g\circ f(x) = g(f(x))$.
Pour ce point, g n'a pas besoin d'être ni continue ni même définie en a.

<u>Remarques :</u>
La fonction constante $C(x) = k$ est partout continue car $\lim\limits_{x\to a} k = k$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. ($k \in \mathbb{R}$)
La fonction Identité $I(x) = x$ est partout continue car $\lim\limits_{x\to a} x = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

En conséquence, <u>toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$</u> car tout polynôme s'obtient à partir de sommes et produits de fonctions constantes ($C(x) = k$) et Identité ($I(x) = x$).

<u>Démontrons</u> le point 1) du théorème, en utilisant les propriétés des limites.
Il faut montrer que : $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = (f+g)(a)$, sachant que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) \underset{\text{par définition de } f+g}{=} \lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] \underset{\text{propriété des limites}}{=} \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \underset{\text{par hypothèse}}{=} f(a)+g(a) \underset{\text{par définition de } f+g}{=} (f+g)(a) \quad \text{CQFD.}$$

Les autres propriétés se démontrent de façon similaire.

<u>Exercice :</u> démontrez le point 3) du théorème.

<u>Démontrons</u> le point 3) du théorème, en utilisant les propriétés des limites.
Il faut montrer que : $\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = (f\cdot g)(a)$, sachant que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

$$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) \underset{\text{par définition de } f\cdot g}{=} \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] \underset{\text{propriété des limites}}{=} \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) \underset{\text{par hypothèse}}{=} f(a)\cdot g(a) \underset{\text{par définition de } f\cdot g}{=} (f\cdot g)(a) \quad \text{CQFD.}$$

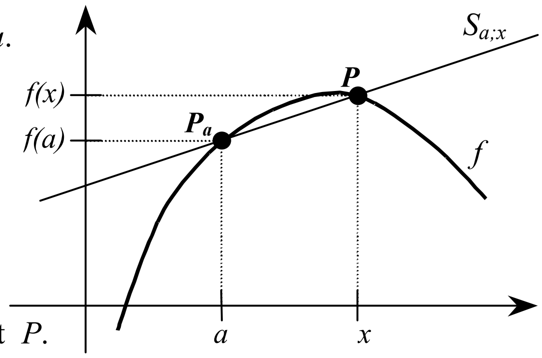
XI. Dérivée d'une fonction

XI.1 Droites sécantes, droites tangentes et pentes de droites.

Considérons une fonction f définie sur un voisinage d'un point a.
Notons $P_a = (a\,; f(a))$ le point du graphe de f, d'abscisse a.
Soit $x \neq a$ un nombre proche de a.
Notons
$P = (x\,; f(x))$ le point du graphe de f, d'abscisse x.

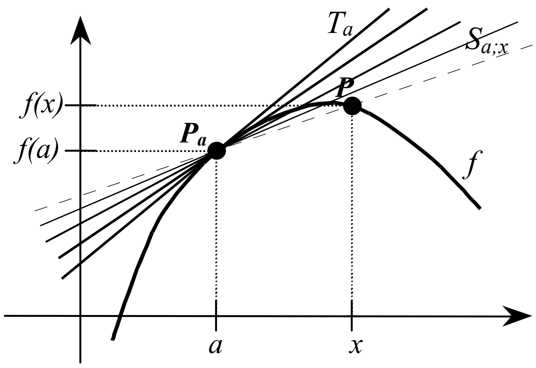
Soit $S_{a;x}$ la droite passant par les points P_a et P.

Cette droite s'appelle la **sécante** de f passant par les points P_a et P.



La **pente** de cette droite vaut : $\boxed{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

On remarque que le point P tend vers le point P_a,
en suivant la courbe de la fonction f.



> Définition :
> Si les sécantes $S_{a;x}$ tendent vers une droite T_a, alors cette droite T_a s'appelle la **tangente** à f au point P_a.

Remarques :

1) Les pentes des sécantes $S_{a;x}$ tendent vers
la pente de la tangente, T_a qui vaut donc : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
2) Toutes ces sécantes et la tangente T_a passent par le point P_a, donc $T_a(a) = f(a)$.

Ces considérations mènent aux définitions suivantes :

Définition :

Si la limite : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est un nombre réel, on dit que "**la fonction *f* est dérivable en *a***".
Dans ce cas, on définit le **nombre dérivé** de la fonction f au point a par :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Définition :

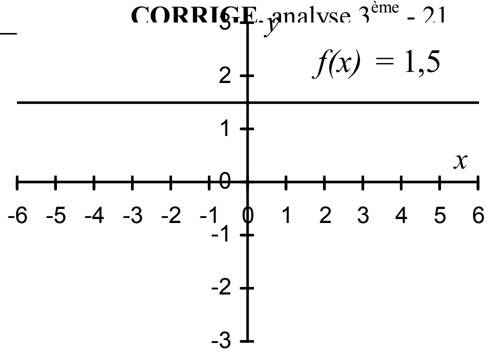
On dit qu'**une fonction est dérivable sur un intervalle *I***, si et seulement si elle est dérivable en tout point de l'intervalle I.

Dans ce cas, on obtient une nouvelle fonction, la **fonction dérivée de *f*** définie par : $\boxed{\begin{array}{l} f' : I \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto f'(x) \end{array}}$

Rappelons l'interprétation géométrique de la dérivée de la fonction f en a.
La dérivée de la fonction *f* en *a* est égale à la pente de la tangente à la fonction *f* en (*a* ; *f* (*a*)).

Exemples :

1) $f(x) = c =$ constante. Pour tout nombre réel a, on a :



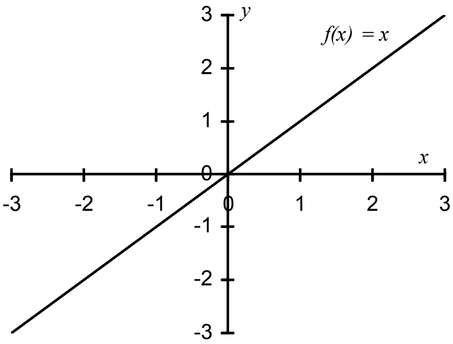
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{0}{x-a} = \lim_{x\to a} 0 = 0$$

Donc la dérivée d'une fonction constante est partout nulle

Sur le graphique, dessinez la tangente à f en $a = -4$.

La tangente en n'importe quel point de la droite est confondue avec la droite.

2) $f(x) = x$. Pour tout nombre réel a, on a :



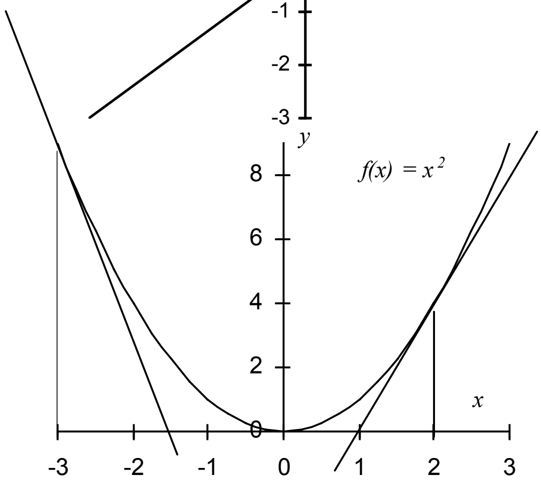
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$$

Donc la dérivée de la fonction identité est partout égale à 1

Sur le graphique, dessinez la tangente à f en $a = -2$.

Même remarque en dans l'ex. 1.

3) $f(x) = x^2$. Pour tout nombre réel a, on a :



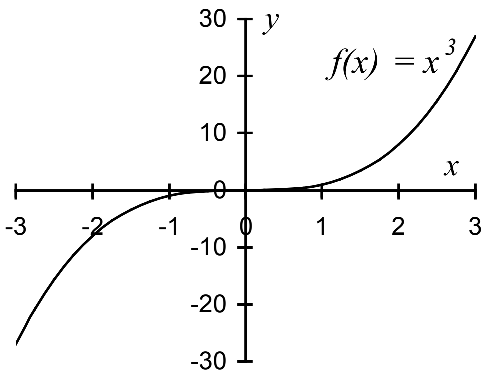
Après avoir calculé leur pente, dessinez les tangentes à f en $a = -3$ et en $a = 2$.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\cdot(x+a)}{x-a} = \lim_{x\to a} x+a = 2\cdot a$$

Donc $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(a) = 2\cdot a$

4) $f(x) = x^3$. Pour tout nombre réel a, on a :



$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\cdot(x^2+a\cdot x+a^2)}{x-a} = \lim_{x\to a} x^2+a\cdot x+a^2 = 3\cdot a^2$$

Donc $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(a) = 3\cdot a^2$

5) $f(x) = \frac{1}{x}$. Pour tout nombre réel $a \neq 0$, on a :

$$f'(a) = f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{a-x}{x\cdot a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{a-x}{(x-a)\cdot x\cdot a} = \lim_{x\to a} \frac{-(x-a)}{(x-a)\cdot x\cdot a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{-1}{x\cdot a} = \frac{-1}{a^2}$$

Donc $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

6) $f(x)=\sqrt{x}$. Dom(f) = $\mathbb{R}_+$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{(x-a)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{a}}$$

Donc $f(x)=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ f'(x)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ Dom (f') = $\mathbb{R}_+^*$

7) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Dom(f) = $\mathbb{R}_+^*$

$f'(a)=$

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a}}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{a}}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{(x-a)\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{(x-a)\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{a}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{(x-a)\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{a}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{-1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{a}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}=\frac{-1}{2\cdot\left(\sqrt{a}\right)^3}=\frac{-1}{2\cdot\sqrt{a^3}}$$

Donc $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ \Rightarrow\ f'(x)=\dfrac{-1}{2\cdot\sqrt{x^3}}$ Dom (f') = $\mathbb{R}_+^*$

8) $f(x)=|x|$. Dom(f) = $\mathbb{R}$ $f'(x)=\begin{cases}1 & si\ x>0\\ -1 & si\ x<0\end{cases}$ Dom (f') = $\mathbb{R}^*$

Lorsque x > 0, f (x) = x et donc f ' (x) = 1.
Lorsque x < 0, f (x) = –x et donc f ' (x) = –1.

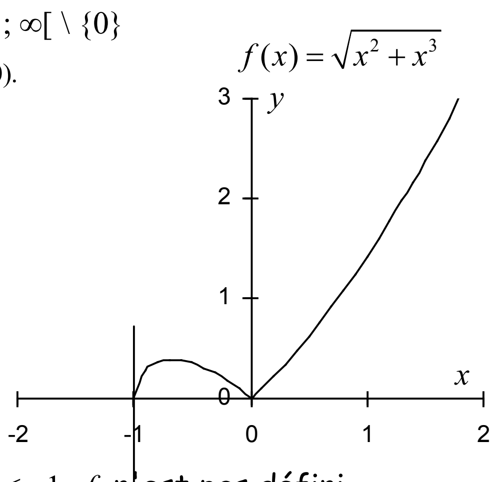
f n'est pas dérivable en x = 0, car $\lim_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$ n'existe pas. Les limites à gauche et à droite sont différentes.

9) $f(x)=\sin(x)$. Pour $a=0$, on a :

$\sin'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ Limite vue au chapitre VIII, page 14.

10) $f(x)=\sqrt{x^2+x^3}$. Dom (f) = $[-1\ ;\infty[$ Dom(f') = $]-1\ ;\infty[\ \backslash\ \{0\}$

Calculez $f'(0)$ et $f'(-1)$ et dessinez les tangentes à f en $(0\ ;0)$ et $(-1\ ;0)$.



$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x^3}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2\cdot(1+x)}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+x}}{x}=\begin{cases}1 & si\ x\to 0^+\\ -1 & si\ x\to 0^-\end{cases}$$ donc la limite n'existe pas.

Donc il n'y a pas de tangente en (0 ; 0).

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{x^2+x^3}-0}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{x^2\cdot(1+x)}}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{|x|\cdot\sqrt{x+1}}{x+1}=$$

$=\lim_{x\to -1^+}(-x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ On se limite à -1^+, car pour $x<-1$, f n'est pas défini.

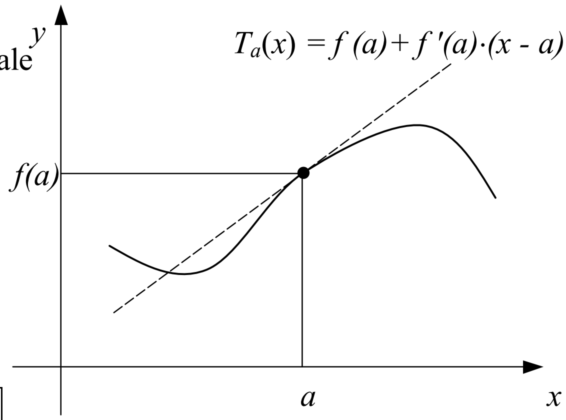
La limite n'est pas un nombre réel, donc la dérivée de f n'existe pas en x = –1.
En (–1 ; 0) la tangente est verticale, ce n'est pas une application.

XI.2 L'application affine tangente

Considérons une fonction réelle f dérivable en a.

Cherchons l'équation de la tangente à f en $(a\,;f(a))$: $T_a(x) = m \cdot x + n$

Nous avons déjà vu que la dérivée de la fonction f en a égale la pente de la tangente à la fonction f en $(a\,;f(a))$, on en déduit que $m = f'(a)$.



Le point $(a\,;f(a))$ appartient à la droite T_a,
donc $f'(a) \cdot a + n = f(a)$,
donc $n = f(a) - f'(a) \cdot a$.

En conséquence, $T_a(x) = f'(a)\cdot x + f(a) - f'(a)\cdot a$

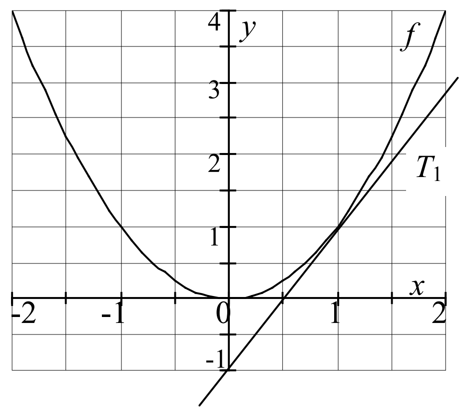
En mettant $f'(a)$ en évidence : $\boxed{T_a(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)}$

L'application T_a s'appelle **l'application affine tangente** au graphe de f au point $(a; f(a))$

Au voisinage du point a, l'application affine tangente est une bonne approximation de la fonction f.
$f(x) \approx f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ si x est proche de a.

Exercice XI.2 :

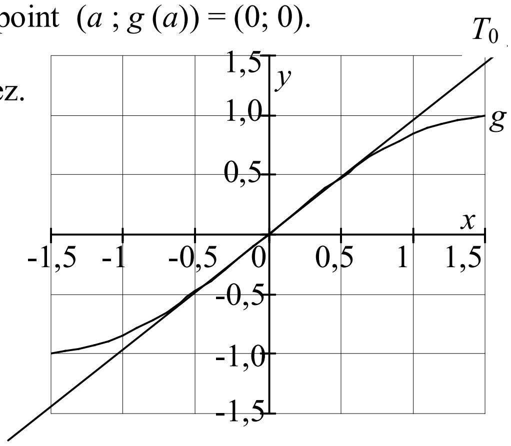
1) Déterminez l'application affine tangente T_1 de $f(x) = x^2$, au point $(a\,;f(a)) = (1; 1)$.
   Représentez T_1 sur le graphique.
   Calculez $T_1(1{,}1)$, $f(1{,}1)$, situez-les sur le graphique et commentez.



$f'(x) = 2x$. Pour $a = 1$, $f(a) = f(1) = 1$ et $f'(a) = f'(1) = 2$.
$T_a(x) = T_1(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + 2 \cdot (x - 1)$
$T_1(1{,}1) = 1 + 2 \cdot (0{,}1) = 1{,}2$.
$f(1{,}1) = 1{,}21$.

On voit que $T_1(1{,}1)$ est une bonne approximation de $f(1{,}1)$.

2) Déterminez l'application affine tangente T_0 de $g(x) = \sin(x)$, au point $(a\,; g(a)) = (0; 0)$.
   Représentez T_0 sur le graphique.
   Calculez $T_0(0{,}1)$, $g(0{,}1)$, situez-les sur le graphique et commentez.



$g'(x) = \cos(x)$. Pour $a = 0$, $g(a) = g(0) = 0$ et $g'(a) = g'(0) = 1$.
$T_a(x) = T_0(x) = g(0) + g'(0) \cdot (x - 0) = x$
$T_0(0{,}1) = 0{,}1$.
$g(0{,}1) = \sin(0{,}1) \approx 0{,}099833$. C'est proche de 0,1.

On voit que $T_0(0{,}1)$ est une bonne approximation de $g(0{,}1)$.

XII. Dérivées des fonctions usuelles

XII.1 Dérivée des fonctions sinus et cosinus.

$\sin'(a) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}$ par définition de la dérivée ;

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a}$ formule de trigonométrie, se trouvant dans la table CRM ;

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}$ division par 2 du numérateur et du dénominateur ;

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$ propriété des fractions ;

$= \lim\limits_{\frac{x-a}{2}\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$ propriétés des limites quand elles existent dans $\mathbb{R}$;

$= 1\cdot\lim\limits_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$ car $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$, ici $\alpha = \dfrac{x-a}{2}$;

$= \cos\left(\frac{a+a}{2}\right) = \cos(a)$ car la fonction cosinus est continue. CQFD

Montrons que la dérivée de la fonction cosinus est la fonction moins sinus.

$\cos'(a) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$ par définition de la dérivée ;

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{-2\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a}$ formule de trigonométrie, de la table CRM ;

à vous de terminer...

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{-\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\cdot\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)$ simplifications ;

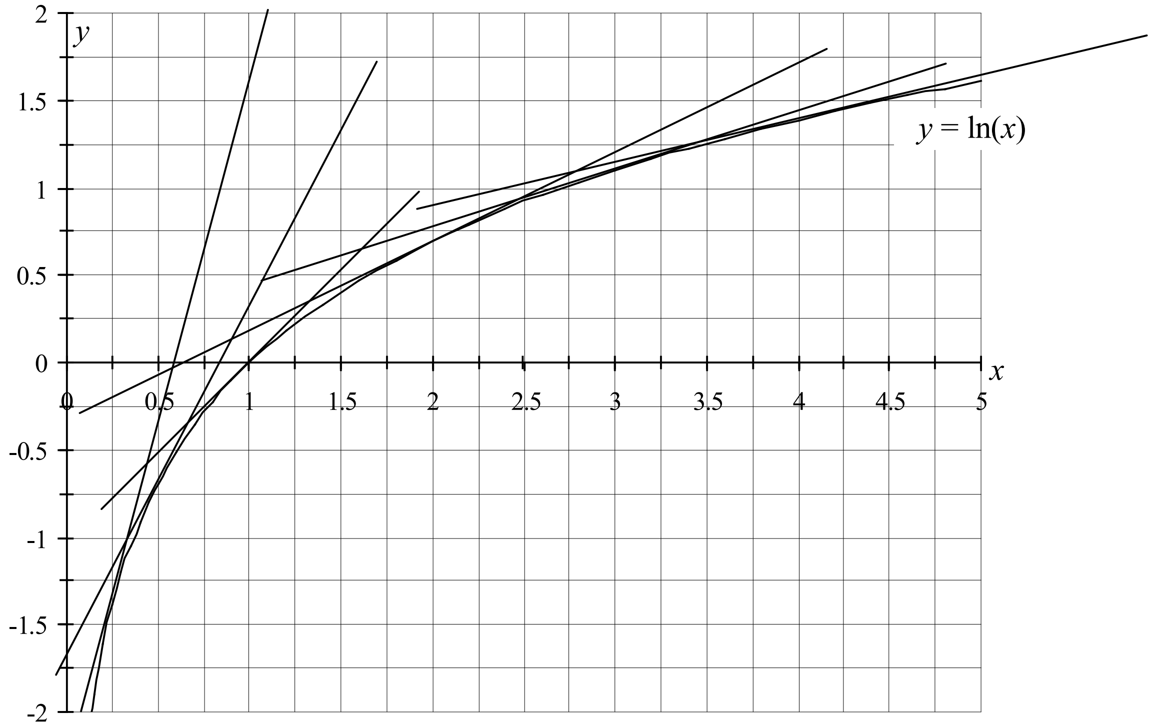
$= -\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to a}\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)$ propriétés des limites quand elles existent dans $\mathbb{R}$;

$= -1\cdot\lim\limits_{x\to a}\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)$ car $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$, ici $\alpha = \dfrac{x-a}{2}$;

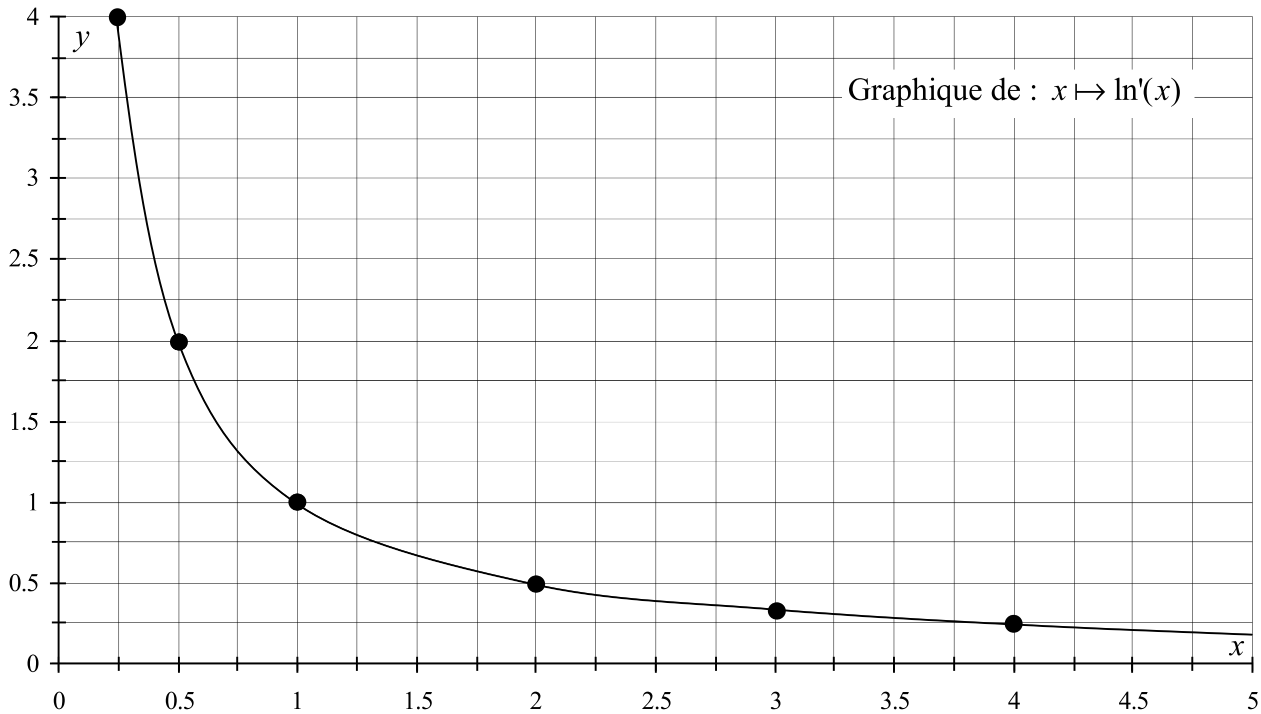
$= -\sin(a)$ car la fonction sinus est continue. CQFD

XII.2 Détermination graphique de la fonction dérivée de la fonction logarithme naturel : ln(x).

Sur le graphique suivant représentant la fonction logarithme naturel "ln", dessinez ses tangentes aux points d'abscisses : 0,25 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 et 4.
Déterminez leur pente, que vous utiliserez pour esquisser le graphique de : $x \mapsto \ln'(x)$



Pentes : En $x = 1$, pente = 1. En $x = 2$, pente = 1/2. En $x = 3$, pente = 1/3. En $x = 4$, pente = 1/4. En $x = 1/2$, pente = 2. En $x = 1/4$, pente = 4.

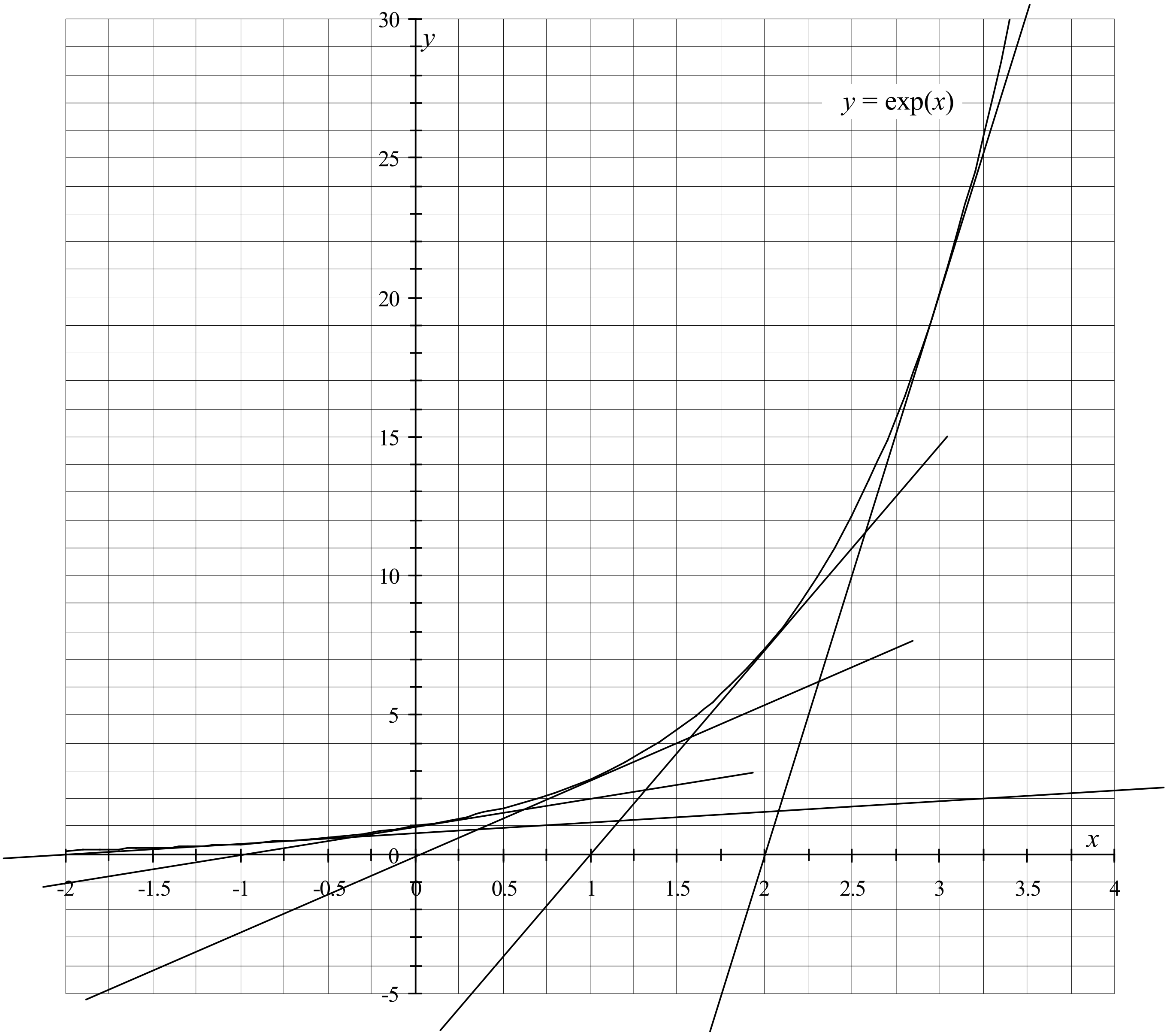


A quelle fonction connue correspond ce graphique ?

Conclusion : $\ln'(x) = 1 / x$

XII.3 Détermination graphique de la dérivée de la fonction exponentielle en base $\boldsymbol{e}$: $\exp(x) = \boldsymbol{e}^x$.

Sur le graphique suivant représentant la fonction exponentielle "exp", dessinez ses tangentes aux points d'abscisses : -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3.
Déterminez leur pente, que vous utiliserez pour esquisser le graphique de : $x \mapsto \exp'(x)$ sur le même repère



Pentes :
$\exp'(-1) \approx 1 / 2{,}75 \approx \exp(-1)$
$\exp'(\ 0) \approx 1 = \exp(0)$
$\exp'(\ 1) \approx 2{,}8 \approx \exp(1)$
$\exp'(\ 2) \approx 7{,}4 \approx \exp(2)$
$\exp'(\ 3) \approx 20 \approx \exp(3)$

A quelle fonction connue correspond ce graphique ? Il semble que exp'(x) = exp(x)

Conclusion :
On peut montrer rigoureusement que exp'(x) = exp(x).
La dérivée de la fonction exp(x) = e^x est égale à elle-même !

XII.4 Dérivée de la fonction $f(x)=x^n$.

Les fonctions du type : $f(x)=x^n$ apparaissent souvent.

La dérivée de $\boxed{f(x)=x^n}$ est : $\boxed{f'(x)=n\cdot x^{n-1}}$, pour $n\in\mathbb{R}$.

Nous allons le montrer pour des nombres n entiers positifs.
Nous avons vu dans le chapitre précédent des cas particuliers.

exposant n	fonction f	fonction f' résultat antérieur	fonction f' avec la règle ci-dessus
0	$f(x)=1=x^0$	$f'(x)=0$	$f'(x)=0\cdot x^{0-1}$
1	$f(x)=x^1$	$f'(x)=1$	$f'(x)=x^{1-1}$
2	$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$f'(x)=2\cdot x^{2-1}$
3	$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^{3-1}$
-1	$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f'(x)=-1\cdot x^{-1-1}$
$\frac{1}{2}$	$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}$
$-\frac{1}{2}$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$	$f'(x)=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3}}$	$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}-1}$

Montrons le principe de la démonstration

$n=4$: $f(x)=x^4$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}\cdot(x^3+a\cdot x^2+a^2\cdot x+a^3)}{\cancel{x-a}}=$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}(x^3+a\cdot x^2+a^2\cdot x+a^3)=a^3+a\cdot a^2+a^2\cdot a+a^3=4\cdot a^3=n\cdot a^{n-1}$$

$n=5$: $f(x)=x^5$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}\cdot(x^4+a\cdot x^3+a^2\cdot x^2+a^3\cdot x+a^4)}{\cancel{x-a}}=$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}(x^4+a\cdot x^3+a^2\cdot x^2+a^3\cdot x+a^4)=a^4+a\cdot a^3+a^2\cdot a^2+a^3\cdot a+a^4=5\cdot a^4=n\cdot a^{n-1}$$

Démonstration pour une valeur quelconque n entière positive. $f(x)=x^n$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$ par définition de la dérivée ;

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+x^{n-3}\cdot a^2+\ldots+x^2\cdot a^{n-3}+x\cdot a^{n-2}+a^{n-1})}{\cancel{x-a}}$$ factorisation de x^n-a^n ;

$$=\lim_{x\to a}\left(\underbrace{x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+x^{n-3}\cdot a^2+\ldots+x^2\cdot a^{n-3}+x\cdot a^{n-2}+a^{n-1}}_{\text{il y a } n \text{ termes}}\right)$$ simplification par $x-a$;

$$=a^{n-1}+a^{n-2}\cdot a+a^{n-3}\cdot a^2+\ldots+a^2\cdot a^{n-3}+a\cdot a^{n-2}+a^{n-1}$$ passage à la limite ;

$$=n\cdot a^{n-1}$$ regroupement des termes.

CQFD,

On a montré que $f'(a)=n\cdot a^{n-1}$ si n est un nombre entier positif.
On va accepter cette formule de manière générale pour n réel, sans démonstration.

XIII. Règles de dérivation

Les règles suivantes permettent de simplifier le calcul de dérivées.

<u>Théorème de règles de dérivation :</u>
Si f et g sont deux fonctions dérivables en x, alors
les dérivées suivantes existent et on a les égalités :

1) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$ 1') $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$
2) $(\lambda \cdot f)'(x)=\lambda \cdot f'(x)$ où λ est un nombre réel.
3) $(f \cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$, si $g(x)\neq 0$. Sinon $\frac{f}{g}$ n'est pas définie en x.
5) $(g(f(x)))'=g'(f(x))\cdot f'(x)$ ici, il faut que g soit dérivable en $f(x)$.
6) $(f^n)'(x)=n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$ où n est un nombre réel.

Nous ne démontrerons pas le point 5).
Le point 6) est une conséquence du point 5), si on sait que la dérivée de $g(x)=x^n$ est $g'(x)=n\cdot x^{n-1}$.

Voici une liste de fonctions avec leur dérivée que vous devrez connaître et utiliser souvent.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
constante	0	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$
x	1	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$\frac{1}{x^n}$	$-n\cdot\frac{1}{x^{n+1}}$
e^x	e^x	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$		
$\cos(x)$	$-\sin(x)$		
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$		

Exercices XIII.1 :

Utilisation des règles de dérivation et que quelques dérivées particulières :

1) $f_1(x)=3x+5x^2,\quad f_1'(x)=3+5\cdot 2x=3+10x$

2) $f_2(x)=3x-5x^2,\quad f_2'(x)=3-10x$

3) $f_3(x)=\pi\cdot\sqrt{x}+\dfrac{e}{x}-\sqrt{2}\cdot x^3,\quad f_3'(x)=\pi\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\dfrac{e}{x^2}-\sqrt{2}\cdot 3\cdot x^2$

4) $f_4(x)=x\cdot x^3,\quad f_4'(x)=(x)'\cdot x^3+x\cdot(x^3)'=1\cdot x^3+x\cdot 3x^2=4x^3\ =\ (x^4)'$ comme attendu.

5) $f_5(x)=x^2\cdot\sin(x),\quad f_5'(x)=(x^2)'\cdot\sin(x)+x^2\cdot(\sin(x))'=2x\cdot\sin(x)+x^2\cdot\cos(x)$

6) $f_6(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x},\quad f_6'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'\cdot x-\sqrt{x}\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot x-\sqrt{x}\cdot 1}{x^2}=\dfrac{\frac{\sqrt{x}}{2}-\sqrt{x}}{x^2}=\dfrac{-\sqrt{x}}{2\cdot x^2}=\dfrac{-x^{-\frac{3}{2}}}{2}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'$

7) $f_7(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^2},\quad f_7'(x)=\dfrac{(\sin(x))'\cdot x^2-\sin(x)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}=\dfrac{\cos(x)\cdot x^2-\sin(x)\cdot 2x}{x^4}$

8) $f_8(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)},\quad f_8'(x)=\dfrac{(\sin(x))'\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(\cos(x))'}{(\cos(x))^2}=\dfrac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}=$

$$f_8'(x)=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}\quad\text{ou}\quad =1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$$

9) $f_9(x)=\sin(x^3),\quad f_9'(x)=\sin'(x^3)\cdot(x^3)'=\cos(x^3)\cdot 3x^2$

10) $f_{10}(x)=\sqrt{\sin(x)},\quad f_{10}'(x)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{\sin(x)}}\cdot(\sin(x))'=\dfrac{\cos(x)}{2\cdot\sqrt{\sin(x)}}$

11) $f_{11}(x)=(1+x^2)^2,\quad f_{11}'(x)=2\cdot(1+x^2)^{2-1}\cdot(1+x^2)'=2\cdot(1+x^2)\cdot 2x$

12) $f_{12}(x)=(1+x^2)^5,\quad f_{12}'(x)=5\cdot(1+x^2)^{5-1}\cdot(1+x^2)'=5\cdot(1+x^2)^4\cdot 2x$

13) $f_{13}(x)=\sin^4(x),\quad f_{13}'(x)=4\cdot\sin^{4-1}(x)\cdot(\sin(x))'=4\cdot\sin^3(x)\cdot\cos(x)$

14) $f_{14}(x)=\sin^3\left(\sqrt{1+x^2}\right),\quad f_{14}'(x)=3\cdot\sin^2\left(\sqrt{1+x^2}\right)\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+x^2)'=\dfrac{3\cdot\sin^2\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\cancel{2}\cdot\sqrt{1+x^2}}\cdot\cancel{2}x$

Démontrons maintenant les quatre premiers points du théorème de règles de dérivation.

Par hypothèse : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\in\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)\in\mathbb{R}$.

1) On veut montrer que : $f+g$ est dérivable en a et que : $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

$(f+g)'(a)=$

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}$ par définition de la dérivée ;

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}$ par définition de la somme de deux fonctions ;

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}$ réarrangement des termes ;

$= \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(a)-f(a)}{x-a}+\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$ propriété des fractions ;

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$ propriété des limites: la limite d'une somme = la somme des limites, quand ces limites existent dans $\mathbb{R}$;

$= f'(a)+g'(a)$ évaluation des limites.

Cette suite d'égalité montre que : $(f+g)'(a)$ existe et que : $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$.
C'est dans l'avant-dernière égalité que l'hypothèse a été utilisée.

2) On veut montrer que : $\lambda\cdot f$ est dérivable en a et que : $(\lambda\cdot f)'(a)=\lambda\cdot f'(a)$ où $\lambda\in\mathbb{R}$

A vous de compléter, en suivant le même schéma que précédemment.

$(\lambda\cdot f)'(a)=$

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\lambda\cdot f)(x)-(\lambda\cdot f)(a)}{x-a}$ par définition de la dérivée ;

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\lambda\cdot f(x)-\lambda\cdot f(a)}{x-a}$ par définition du produit d'une fonction par un nombre ;

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\lambda\cdot\left[f(x)-f(a)\right]}{x-a}$ mise en évidence de λ ;

$= \lambda\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ propriété des limites, quand elles existent dans $\mathbb{R}$;

$= \lambda\cdot f'(a)$ évaluation des limites.

Cette suite d'égalité montre que : $(\lambda\cdot f)'(a)$ existe et que : $(\lambda\cdot f)'(a)=\lambda\cdot f'(a)$.
C'est dans l'avant-dernière égalité que l'hypothèse a été utilisée.

4) On veut montrer que : $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et que : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$

$g(a) \neq 0$, sinon cela n'a pas de sens.

La démonstration de : 3) $f\cdot g$ est dérivable en a et que : $(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)$ est similaire et un peu plus simple. Elle vous est proposée en exercice à la page suivante.

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) =$

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x-a}$ par définition de la dérivée ;

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}$ par définition du quotient de deux fonctions ;

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)}}{x-a}$ mise au dénominateur commun ;

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(x)}{(x-a)\cdot g(x)\cdot g(a)}$ le quotient de deux fractions donne une fraction ;

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(x)}{x-a}}{g(x)\cdot g(a)}$ propriétés des fractions ;

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(x)}{x-a}}{g(x)\cdot g(a)}$ Ici on a utilisé l'**idée géniale** de la démonstration. On ajoute l'expression $\boldsymbol{-f(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g(a)}$ qui donne zéro, mais qui permet de faire ressortir les deux dérivées connues.

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{(f(x) - f(a))\cdot g(a) - f(a)\cdot (g(x) - g(a))}{x-a}}{g(x)\cdot g(a)}$ mises en évidence ;

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a) - f(a)\cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)\cdot g(a)}$ propriétés des fractions ;

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(a) - \lim\limits_{x\to a} f(a)\cdot \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(a)}$ propriétés des limites, quand elles existent dans $\mathbb{R}$;

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot g(a) - f(a)\cdot \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot g(a)}$ La limite d'une fonction constante est égale à la constante ;

$= \dfrac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$ La première limite $= f'(a)$ par hypothèse.
g est dérivable en a, donc g est continue en a, donc le dénominateur $= g^2(a)$.
La troisième limite $= g'(a)$ par hypothèse.

C'est dans l'avant avant dernière égalité que l'hypothèse a été utilisée.
Le théorème "dérivable $\Rightarrow$ continue" a été utilisé dans cette dernière égalité.

3) On veut montrer que : $f \cdot g$ est dérivable en a et que : $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

La démonstration est similaire à celle qui vient d'être vue et un peu plus simple.
A vous de la faire en vous basant sur la précédente et en utilisant l'idée d'ajouter
$-f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x)$ au bon endroit.

$(f \cdot g)'(a) =$

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a}$ par définition de la dérivée ;

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a}$ par définition du produit de deux fonctions ;

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a}$ Ici on a utilisé l'**idée géniale** de la démonstration. On ajoute l'expression $-f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x)$ qui donne zéro, mais qui permettra de faire ressortir les deux dérivées connues.

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\left(f(x) - f(a)\right) \cdot g(x) + f(a) \cdot \left(g(x) - g(a)\right)}{x-a}$ mises en évidence ;

$= \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \dfrac{g(x) - g(a)}{x-a} \right)$ propriétés des fractions ;

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) + f(a) \cdot \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x-a}$ propriétés des limites, quand elles existent dans $\mathbb{R}$;

$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

La première limite = $f'(a)$ par hypothèse.
g est dérivable en a, donc continue en a, donc la deuxième limite = $g(a)$.
La troisième limite = $g'(a)$ par hypothèse.

C'est dans l'avant dernière égalité que l'hypothèse a été utilisée.
Le théorème "dérivable $\Rightarrow$ continue" a aussi été utilisé.

Montrons que : 6) $(f^n)'(a) = n \cdot f^{n-1}(a) \cdot f'(a)$ où n est un nombre réel.

On a vu que la dérivée de la fonction $g(x) = x^n$ est $g'(x) = n \cdot x^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{R}$.

En utilisant ce résultat et la règle : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$, avec $g(x) = x^n$,

Puisque $g(x) = x^n$ et $g'(x) = n \cdot x^{n-1}$, on a : $f^n = g \circ f$ et $g'(f(a)) = n \cdot f^{n-1}(a)$

De $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$, on a : $(f^n)'(a) = (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) = n \cdot f^{n-1}(a) \cdot f'(a)$

CQFD

XIV. Dérivable implique continue.

La propriété d'être dérivable est plus forte que celle d'être continue !

Théorème : Si une fonction réelle f est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Démonstration :

Par hypothèse, f est dérivable en a, donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut $f'(a)$.

Il faut en conclure que f est continue en a, c'est-à-dire que : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Qui est équivalent à : $\lim\limits_{x\to a} f(x)-f(a)=0$.

On a : $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=$

$= \lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]\cdot\dfrac{x-a}{x-a}$ on a multiplié par 1 ;

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)$ règle de produit de fractions ;

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim\limits_{x\to a}(x-a)$ propriété des limites, quand elles existent dans $\mathbb{R}$;

$= f'(a)\cdot\lim\limits_{x\to a}(x-a)$ évaluation de la première limite, qui est réelle par hypothèse ;

$= f'(a)\cdot 0 = 0$ évaluation de la deuxième limite. CQFD.

On a bien montré que la conclusion est vraie si l'hypothèse est vraie !

Remarque :
La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie. Il existe des fonctions qui sont continues en un point, mais pas dérivables en ce point.

Exemples : vérifiez que les deux fonctions suivantes sont continues, mais pas dérivables en $x = 0$.

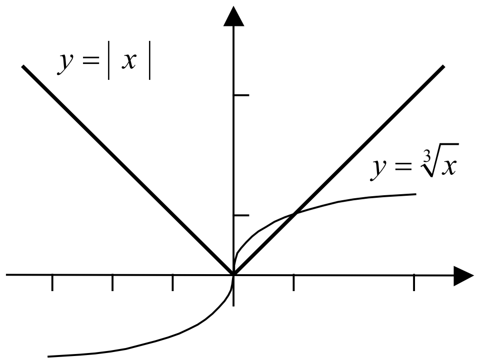
1) La fonction $f(x)=|x|$

f est continue en 0, car $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 = |0|$.

Nous avons déjà vu que f n'est pas dérivable en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|-0}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|-0}{x}=-1$

Les limites à gauche et à droite sont différentes, donc la dérivée de f n'existe pas en $x = 0$.



2) La fonction $g(x)=\sqrt[3]{x}$

g est continue en 0, car $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x} = 0 = \sqrt[3]{0}$.

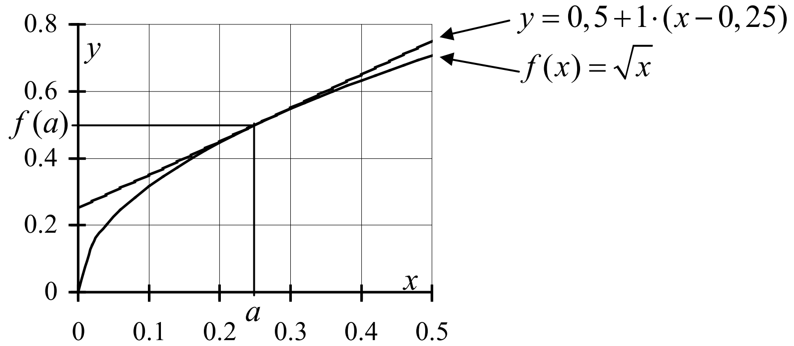
Nous avons déjà vu que g n'est pas dérivable en 0.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=+\infty$

La limite est infinie, donc la dérivée de g n'existe pas en $x = 0$.

XV. Utilisation des dérivées pour calculer des approximations

Rappelons que la droite d'équation $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ est tangente à la fonction f en $(a\,; f(a))$.



Plus on se rapproche du point $(a\,; f(a))$, plus la tangente et la fonction ont tendance à se confondre. Donc la tangente est une **approximation** de la fonction au voisinage de a. $f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$

En remplaçant x par $a + h$, on obtient : $\boxed{f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h}$

On peut utiliser cette constatation pour obtenir une valeur approchée d'une image.

Exemple : On veut calculer $\sqrt{0,26}$.

On pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0,25$ et $x - a = 0,01$.

Comme $f'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$, on a $f(0,25) = 0,5$ et $f'(0,25) = 1$.

D'où : $\sqrt{0,26} = f(0,25 + 0,01) \approx f(0,25) + f'(0,25) \cdot 0,01 = 0,5 + 1 \cdot 0,01 = 0,51$.

Comparez cette approximation avec une valeur fournie par la calculatrice ! $\sqrt{0,26} \approx 0,50990...$

Exercice XIV.1 **:** A l'aide de la formule d'approximation donnée ci-dessus, calculez une valeur approchée des expressions suivantes et comparez-les avec des valeurs fournies par la calculatrice.

a) $\sqrt{1,1}$ b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + 0,01\right)$

a) On pose $f(x) = \sqrt{x}$, a = 1 et x - a = 0,1.

Comme $f'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$, on a $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0,5$.

D'où : $\sqrt{1,1} = f(1 + 0,1) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0,1 = 1 + 0,5 \cdot 0,1 = 1,05$.

Avec la calculatrice, on a $\sqrt{1,1} \approx 1,0488$. 1,05 est bien une approximation de cette valeur.

b) On pose $f(x) = \cos(x)$, a = π/6 et x - a = 0,01.

Comme $f'(x) = -\sin(x)$, on a $f(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ et $f'(\pi/6) = -0,5$.

D'où : $\cos(\pi/6 + 0,01) = f(\pi/6 + 0,01) \approx f(\pi/6) + f'(\pi/6) \cdot 0,01 = \sqrt{3}/2 - 0,5 \cdot 0,01 \approx 0,86102$.

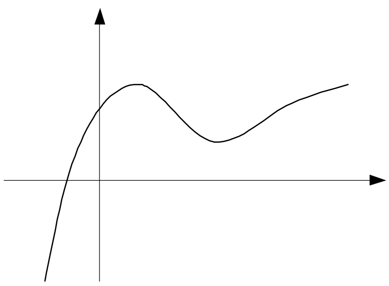
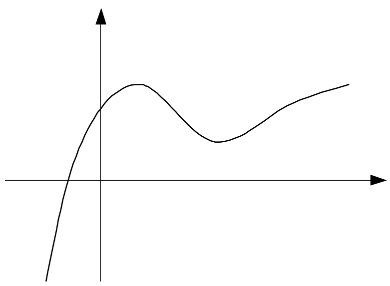
Avec la calculatrice, on a $\cos(\pi/6 + 0,01) \approx 0,86098$. 0,86102 est bien une approximation de cette valeur.

XVI. Extremums locaux d'une fonction

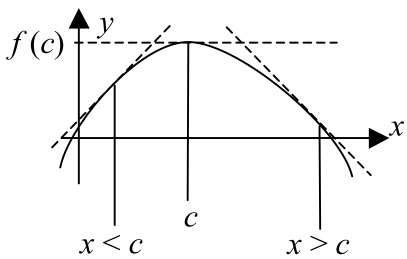
<u>Définitions :</u>
Soit f une fonction réelle définie au voisinage d'un nombre c.

- ° Un **voisinage** V de c est un intervalle ouvert contenant ce nombre c.
- ° c est appelé **un maximum local** de f $\Leftrightarrow$ il existe un voisinage V de c tel que $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in V$.
- ° c est appelé **un minimum local** de f $\Leftrightarrow$ il existe un voisinage V de c tel que $f(c) \leq f(x)$ pour tout $x \in V$.
- ° c est appelé **un extremum local** de f $\Leftrightarrow$ c est un maximum ou un minimum local.

Sur les deux graphiques suivant, indiquez où se trouve un extremum local c et un voisinage V :

	
c est un **maximum local** $\Leftrightarrow$	c est un **minimum local** $\Leftrightarrow$
il existe un voisinage V de c tel que $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in V$.	il existe un voisinage V de c tel que $f(c) \leq f(x)$ pour tout $x \in V$.

<u>Théorème de Fermat (1637 / 1638) :</u>
Soit une fonction réelle f définie au voisinage d'un nombre c et dérivable en c.
<u>Si</u> c est un extremum local de f, <u>alors</u> $f'(c) = 0$.



<u>démonstration :</u> dans le cas où c est un maximum local.
Puisque c est un maximum local de f, $f(x) - f(c) \leq 0$ pour tout nombre x appartenant à un voisinage de c.

Si <u>$x < c$</u>, alors $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$, car le numérateur est *négatif ou nul* et le dénominateur est *négatif*.

Donc $\displaystyle\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$

Si <u>$x > c$</u>, alors $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, car le numérateur est *négatif ou nul* et le dénominateur est *positif*.

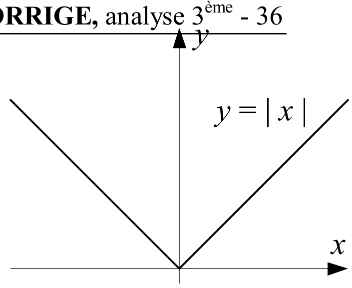
Donc $\displaystyle\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$

Puisque f est dérivable en c, ces deux limites sont égales à $f'(c)$.

Conclusion $f'(c) = 0$, car 0 est le seul nombre ≥ 0 et ≤ 0. CQFD.

<u>Remarques :</u>

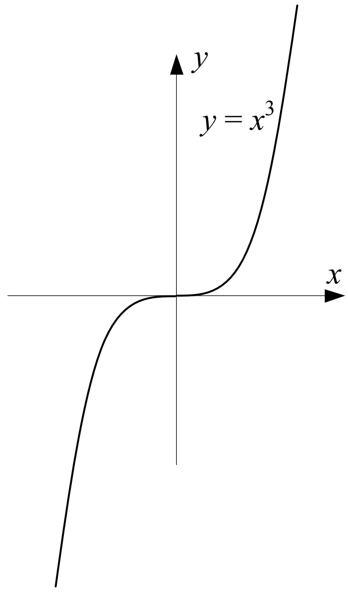
1) Un extremum peu exister en un point, sans que la dérivée existe en ce point. Par exemple, la fonction $f(x)=|x|$ possède un extremum en $x = 0$, mais $f'(0)$ n'est pas définie.



2) La réciproque du théorème est fausse :

$$\boxed{f'(c)=0 \quad \not\Rightarrow \quad c \text{ extremum local}}$$

En effet, la fonction $f(x)=x^3$ est telle que $f'(0)=0$, mais 0 n'est pas un extremum local.



Nous verrons au chapitre IXX comment déterminer des extremums de fonctions.

XVII. Le théorème de Rolle

Dans les pages qui suivent, plusieurs théorèmes utilisant les dérivées vont se succéder. Chaque théorème utilisera le précédent pour être démontré.

Isaac Newton, (1642 - 1727) était un physicien - mathématicien - astronome anglais génial, mais de sale caractère. Après la mort de Leibniz, il aurait affirmé être très satisfait d'avoir détruit la vie de Leibniz. Il inventa le calcul différentiel, mais gardait jalousement ses résultats pour lui.

Gottfried Wilhelm Leibniz, (1644 - 1716) était un philosophe germanique ouvert à de nombreux domaines. Indépendamment de Newton, il inventa presque en même temps le calcul différentiel.

La paternité de ces découvertes fut à l'origine d'une dispute qui opposa la Grande-Bretagne au reste de l'Europe durant de nombreuses années. Finalement ni Newton ni Leibniz ne publièrent leurs découvertes, de peur que l'autre puisse en profiter.

Jakob Bernoulli, (1654 - 1705) et Johann Bernoulli (1667 - 1748) étaient deux frères mathématiciens suisses, nés à Bâle. Ils réinventèrent le calcul différentiel et transmirent leurs découvertes, notamment à Daniel Bernoulli (1700 - 1782) et Nicolas Bernoulli (1695 - 1726), fils de Johann et à Leonhard Euler (1707 - 1783), l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, qui publia plus de 800 ouvrages sur des sujets très divers !

A partir du calcul différentiel, les mathématiques et les sciences en général connurent un développement très rapide. Leurs applications dans le domaine maritime et militaire furent capitales. Par exemple les calculs de logarithmes, de sinus et de cosinus devinrent beaucoup plus aisés. Les calculatrices n'existaient pas, mais des machines permettant d'effectuer les opérations de base faisaient leur apparition.

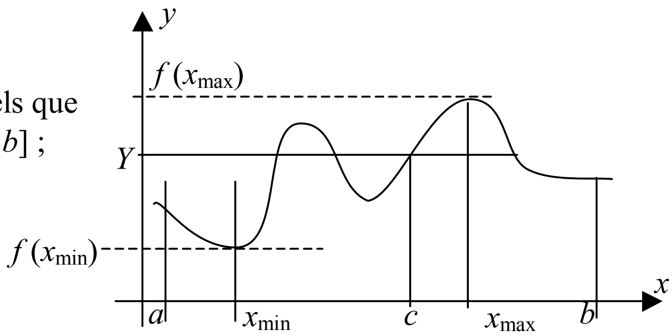
Plusieurs siècles ont été nécessaires pour aboutir à la formulation de cette théorie que nous enseignons de nos jours. A sa naissance, elle était extrêmement floue et seuls quelques rares initiés pouvaient appréhender ce sujet.

Plusieurs théorèmes qui vont venir sont liés à des mathématiciens ayant contribué à l'élaboration du calcul différentiel.

Théorème de Weierstrass : (1861, appelé "Hauptlehrsatz" dans les cours de Weierstrass)
Si une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est **continue sur** $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$,
alors

a) il existe deux nombre $x_{\min}$ et $x_{\max}$ dans $[a\,;b]$ tels que $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$ pour tout nombre $x \in [a\,;b]$;

b) pour tout nombre Y tel que $f(x_{\min}) \leq Y \leq f(x_{\max})$, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = Y$.



Dans l'exemple, il existe 4 "c" possibles !
Seul le 3ème a été indiqué sur le graphique.

Illustrez le théorème par un exemple.

Ce théorème semble évident, mais il est beaucoup plus difficile à démontrer qu'il n'y parait. Pour le faire, il faut avoir défini très précisément ce que sont les nombres réels.
Ce n'est qu'en 1872, que Cantor, Heine, Méray et Dedekind ont indépendamment construit rigoureusement l'ensemble des nombres réels. Si quatre mathématiciens ont effectué ce travail indépendamment la même année, cela montre l'importance qu'ils accordaient à ce sujet.
Nous accepterons ce théorème sans démonstration, comme les mathématiciens d'avant 1872 l'ont fait.

Le théorème de Rolle :

Michel Rolle (1652 - 1719) était un mathématicien français,
qui a publié une version simplifiée de ce théorème en 1691 dans un ouvrage de géométrie et d'algèbre intitulé "Méthodes pour résoudre les égalités".

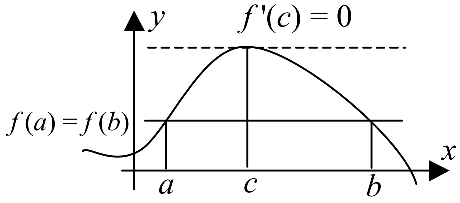
Si une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est telle que :

i) **f est continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$** ;

ii) **f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]\,a\,;b\,[$** ;

iii) **$f(a)=f(b)$**,

alors il existe un nombre c dans $]\,a\,;b\,[$ tels que $f'(c)=0$



démonstration : elle utilise les théorèmes précédents.
Par le théorème de Weierstrass (Hauptlehrsatz),
nous savons qu'il existe x_{min} et x_{max} tels que $f(x_{min})\le f(x)\le f(x_{max})$ pour tout nombre $x\in[a\,;b]$.

1er cas : $x_{max}\neq a$ et $x_{max}\neq b$, donc x_{max} appartient à l'intervalle ouvert $]\,a\,;b\,[$.
Le théorème de la dérivée au maximum nous permet de conclure avec $c=x_{max}$.

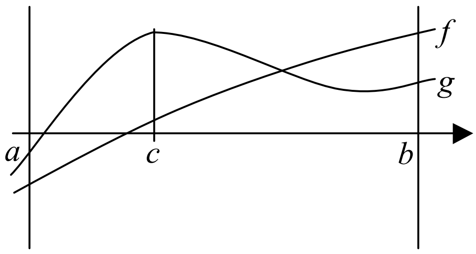
2ème cas : $x_{min}\neq a$ et $x_{min}\neq b$, donc x_{min} appartient à l'intervalle ouvert $]\,a\,;b\,[$.
Le théorème de la dérivée au minimum nous permet de conclure avec $c=x_{min}$.

3ème cas : Si ($x_{max}=a$ ou $x_{max}=b$) et ($x_{min}=a$ ou $x_{min}=b$) alors
$f(x_{min})=f(x_{max})$, puisque $f(a)=f(b)$.
Donc la fonction est constante et donc sa dérivée est nulle sur $]\,a\,;b\,[$. CQFD

Remarquez que si l'une des trois hypothèses i), ii) ou iii) n'est pas vraie, alors la conclusion n'est pas obligatoirement vraie (ni obligatoirement fausse).

Donnez un exemple de fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ne satisfaisant pas la conclusion et un exemple de fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfaisant la conclusion, dans les trois cas suivants :

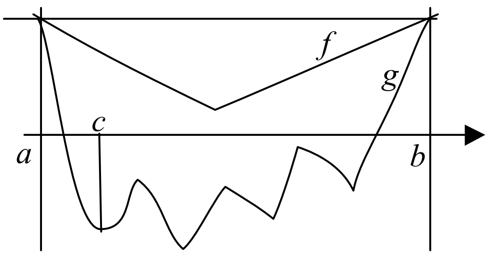
1) i) et ii) sont vrais, mais pas iii).



La dérivée de f ne s'annule nulle part dans $]a\,;b[$

La dérivée de g s'annule en c, malgré que g se satisfasse pas l'hypothèse iii).

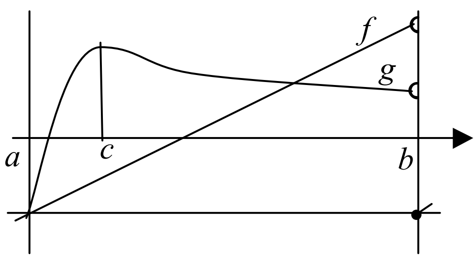
2) i) et iii) sont vrais, mais pas ii).



La dérivée de f n'existe pas au minimum et donc la dérivée de f ne s'annule nulle part dans $]a\,;b[$

La dérivée de g s'annule en c, malgré que g se satisfasse pas l'hypothèse ii). g n'est pas dérivable en plusieurs points de l'intervalle $]a\,;b[$.

3) ii) et iii) sont vrais, mais pas i).

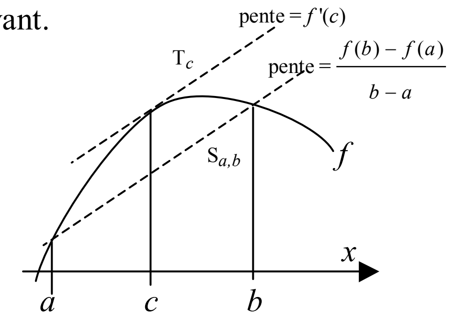


f est bien dérivable sur $]a\,;b[$, mais f est discontinue en b.
La dérivée de f ne s'annule nulle part dans $]a\,;b[$

La dérivée de g s'annule en c, malgré que g se satisfasse pas l'hypothèse i). g est discontinue en b.

XVIII. Le théorème des accroissements finis (dit de Lagrange)

Joseph Louis de Lagrange, (1736 - 1813) était un mathématicien - physicien français, qui a publié ce théorème entre 1790 et 1799, mais il était connu auparavant.



<u>Théorème des accroissements finis :</u> (Lagrange 1797)
<u>Si</u> une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est telle que :

i) ***f* est continue sur l'intervalle fermé [*a* ; *b*]** ;
ii) ***f* est dérivable sur l'intervalle ouvert]*a* ; *b*[**

<u>alors</u> il existe un nombre c dans $]\,a\,;b[$ tels que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Rappelons que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la sécante à f passant par $(a\,;f(a))$ et $(b\,;f(b))$.

Le théorème signifie qu'il existe au moins un nombre c entre a et b, tel que la tangente en $(c\,;f(c))$ est parallèle à la sécante $S_{a,b}$ de f passant par les points d'abscisses a et b.

Ce théorème généralise celui de Rolle, mais l'utilise dans sa démonstration.

<u>démonstration :</u>
L'idée maîtresse de la démonstration est de définir la fonction $g(x)=f(x)-S_{a,b}(x)$ et de remarquer qu'elle satisfait le théorème de Rolle.

i) g est continue sur $[a\,;b]$, car la somme de fonctions continues est continue.
On a utilisé l'hypothèse i).
ii) g est dérivable sur $]\,a\,;b[$, car la somme de fonctions dérivables est dérivable.
On a utilisé l'hypothèse ii).
iii) $g(a)=f(a)-S_{a,b}(a)=0$; $g(b)=f(b)-S_{a,b}(b)=0$
donc $g(a)=g(b)$ et la troisième hypothèse du théorème de Rolle est aussi satisfaite.

Dès lors, la conclusion du théorème de Rolle est satisfaite par g :

Il existe un nombre c dans $]\,a\,;b[$ tels que $g'(c)=0$.

Comme $g'(x)=f'(x)-S'_{a,b}(x)$ et $S'_{a,b}(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (= pente de la sécante).

on a : $g'(c)=0=f'(c)-S'_{a,b}(c)$

En $x=c$, en particulier :

$$g'(c)=0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ \text{équivalent à}\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\qquad \text{CQFD.}$$

<u>Remarques :</u>
Ce théorème possède de nombreux corollaires.
Un **corollaire** est un théorème qui découle directement d'un théorème principal.

Corollaire 1 : Le Théorème de la fonction constante**:**

Si une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est telle que :

i) **f est continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$** ;

ii) **f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$** ;

iii) **$f'(x) = 0$ pour tout x de l'intervalle $]\,a\,;b[$**

alors f est constante sur $[a\,;b]$.

Remarquez que la réciproque est évidente. Si f est constante sur $[a\,;b]$, alors elle est continue et dérivable sur $[a\,;b]$ et sa dérivée est nulle.

démonstration :

Prenons un nombre quelconque x dans l'intervalle $[a\,;b[$ et montrons que $f(x) = f(b)$ qui est une constante.

La fonction f satisfait les hypothèses du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x\,;b]$,

donc il existe $c\in\,]x\,;b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$

Mais $f'(c) = 0$ par hypothèse, donc $0=\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$, donc $f(x) = f(b)$.

Puisque $f(x) = f(b)$ pour tous nombres x de $[a\,;b]$, la fonction est constante sur $[a\,;b]$. CQFD

Corollaire 2 :

Si deux fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont telles que :

i) **f et g sont continues sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$** ;

ii) **f et g sont dérivables sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$** ;

iii) **$f'(x) = g'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]\,a\,;b[$**

alors il existe un nombre C tel que $f(x) = g(x) + C$ pour tout x dans $[a\,;b]$.

Deux fonctions ayant la même dérivée dans un intervalle donné, diffèrent au plus d'une constante.

démonstration :

Utilisons le corollaire 1 sur la fonction $f-g$. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ pour tout x dans $]a\,;b[$.
Cette fonction satisfait les hypothèses du corollaire 1, donc $f-g$ est une fonction constante sur $[a\,;b]$.
Donc il existe un nombre C tel que $f(x) - g(x) = C$ pour tout x dans $[a\,;b]$. CQFD

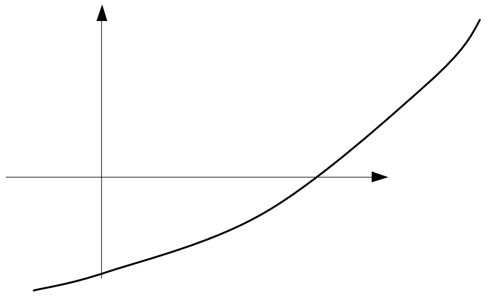
Remarques :

1) Ni le théorème de Rolle, ni celui de Lagrange n'indiquent comment déterminer le nombre c dans $[a\,;b]$. Ils affirment simplement l'existence de ce nombre.
2) De même, les corollaires affirment l'existence d'une constante C, sans rien dire d'autre sur elle.
3) Le théorème de Lagrange sert surtout à démontrer d'autres théorèmes.
4) Un théorème de Cauchy (1821) généralise celui de Lagrange et est utile pour démontrer la règle de l'Hospital, qui permet souvent de calculer simplement des limites de fonctions.
5) Guillaume-François-Antoine de L'Hospital, Marquis de Sainte-Mesme et du Montellier, Comte d'Antemonts et Seigneur d'Ouques était un élève de la famille Bernoulli et a publié un livre où il reconnaît qu'il "s'est servi sans façon de leurs découvertes...". De ce livre il nous reste principalement la règle de l'Hospital pour calculer des limites. Elle dit en particulier que :

   Si $f(a) = g(a) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ existe et $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

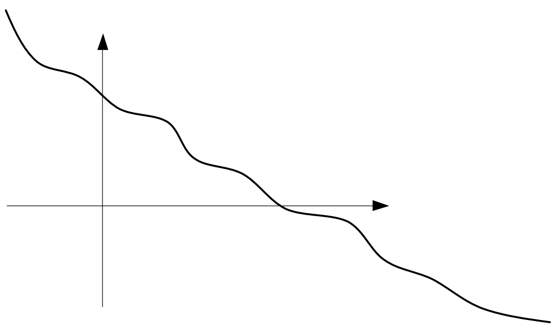
XIX. Croissance et décroissance de fonctions

Définition :
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.
f est **croissante** sur I signifie que si $x, y \in I$ et $x < y$ alors $f(x) \le f(y)$.
f est **décroissante** sur I signifie que si $x, y \in I$ et $x < y$ alors $f(x) \ge f(y)$.



f est **croissante** sur *I* $\Leftrightarrow$

$$\left[x < y \;\Rightarrow\; f(x) \le f(y)\right].$$



f est **décroissante** sur *I* $\Leftrightarrow$

$$\left[x < y \;\Rightarrow\; f(x) \ge f(y)\right].$$

Théorème :
Soit f une fonction réelle dérivable sur l'intervalle I. Nous avons les équivalences :

- *f* est croissante sur *I* $\Leftrightarrow$ $f'(c) \ge 0 \;\; \forall\, c \in I$
- *f* est décroissante sur *I* $\Leftrightarrow$ $f'(c) \le 0 \;\; \forall\, c \in I$

démonstration : montrons la première équivalence. Celle sur la décroissance est similaire.
$\Rightarrow$: Par hypothèse, f est croissante sur I. Montrons que $f'(c) \ge 0 \;\; \forall c \in I$.
Pour $c \in I$.
$\forall x \in I \setminus \{c\}$, soit $x < c$ et alors $f(x) \le f(c)$
soit $x > c$ et alors $f(x) \ge f(c)$, car f est croissante.
Donc dans tous les cas $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$, car la fraction est : $\dfrac{\textit{négative}}{\textit{négative}}$ ou $\dfrac{\textit{positive}}{\textit{positive}}$ ou *nulle*.
Conclusion $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$, c'est à dire $f'(c) \ge 0$ et ceci $\forall c \in I$. CQFD

$\Leftarrow$: Par hypothèse, $f'(c) \ge 0 \;\; \forall c \in I$. Montrons que f est croissante sur I.
Prenons dans l'intervalle I deux réels $x < y$. Il faut montrer que $f(x) \le f(y)$.
Par hypothèse, f est dérivable sur I, donc elle est dérivable et continue sur $[x\,;y] \subset I$.
Les hypothèses du théorème de Lagrange sont satisfaites, donc :

$\exists c \in \left]x\,;y\right[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ qui est plus grand ou égal à zéro par hypothèse.

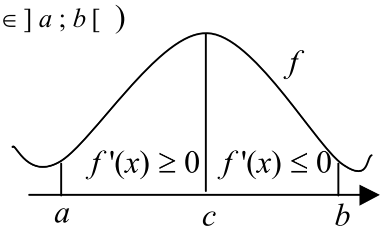
De $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \ge 0$ et $y - x > 0$ on en déduit que $f(x) \le f(y)$.
Ceci montre que f est croissante. CQFD

XX. Problèmes d'optimisation

Comme annoncé au chapitre XV sur les extremums locaux de fonctions,
voici un théorème qui donne une condition suffisante pour que c soit un maximum local de f.

<u>Théorème : critère de maximum</u>
Soit f une fonction réelle dérivable sur un voisinage $]\, a\, ;\, b[$ de c. (Donc $c \in]\, a\, ;\, b\, [$)

<u>Si</u>
° $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]\, a\, ;\, c[$
° $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]\, c\, ;\, b[$
<u>alors</u> c est un maximum local de f.



<u>démonstration :</u>
Par hypothèse, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]\, a\, ;\, c[$, donc f est croissante sur $]\, a\, ;\, c[$
donc $x \leq c$ et $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in]\, a\, ;\, c[$.

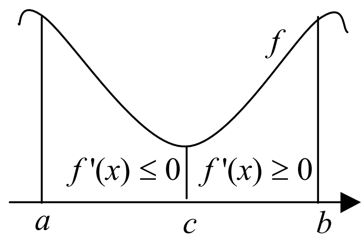
Par hypothèse, $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]\, c\, ;\, b[$, donc f est décroissante sur $]\, c\, ;\, b[$
donc $c \leq x$ et $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in]\, c\, ;\, b[$.

Conséquence, $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in]\, a\, ;\, b[$, c'est-à-dire c est un maximum local de f. CQFD

Un théorème similaire donne une condition suffisante pour que c soit un minimum local de f.

<u>Théorème : critère de minimum</u>
Soit f une fonction réelle dérivable sur un voisinage $]\, a\, ;\, b[$ de c. (Donc $c \in]\, a\, ;\, b\, [$)

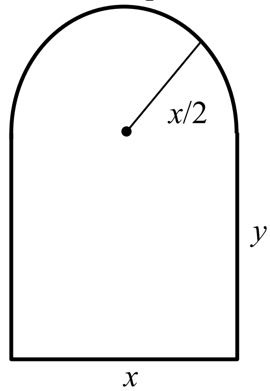
<u>Si</u>
° $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]\, a\, ;\, c[$
° $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]\, c\, ;\, b[$
<u>alors</u> c est un minimum local de f.



En résumé, $\boxed{\text{"}c\text{" est un extremum de } f \text{ si la dérivée s'annule en } c \text{ et change de signe.}}$

Exemple d'un problème d'optimisation :

Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Si le périmètre de la fenêtre est de 6 *m*, quelles seront les dimensions de la fenêtre laissant passer un maximum de lumière ?



Méthode de résolution :

1) **Faites un dessin**.

2) **Donnez des noms aux paramètres inconnus sur le dessin**. *Ici, x et y.*

3) **Exprimez la grandeur connue**
(*ici, le périmètre*)
en fonction des paramètres du dessin. *Ici, x et y.*

Ici, la relation que l'on obtient est : $x + 2y + \pi \cdot \frac{x}{2} = 6\ m$ **Simplifiez** : $2y + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x = 6$

4) **Déterminez quelle est la grandeur à maximiser**.
Ici, c'est l'aire de la figure du dessin : Aire(x, y).
Puis, exprimez la grandeur à maximiser en fonction des paramètres inconnus. *Ici x et y.*

$$Aire(x, y) = x \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x \cdot y + \frac{\pi}{8} \cdot x^2$$ **Simplifiez l'expression !**

5) **A l'aide de la relation obtenue en (3), éliminez un paramètre** (*ici x ou y*), **pour exprimer la grandeur à maximiser en fonction d'un seul paramètre**.

Ici, nous allons éliminer la variable y : $y = 3 - \frac{\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x}{2} = 3 - \frac{2+\pi}{4} \cdot x$

Car elle apparaît de manière plus simple dans Aire(x, y).

Donc la fonction à maximiser est :

$$A(x) = Aire(x) = x \cdot \left(3 - \frac{2+\pi}{4} \cdot x\right) + \frac{\pi}{8} \cdot x^2 = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot x^2 + 3x = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cdot x^2 + 3x$$

6) **Calculez la dérivée de la fonction à maximiser et déterminez pour quelle(s) valeur(s) cette dérivée s'annule.**

$$A'(x) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cdot 2x + 3 = -\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \cdot x + 3 = -\frac{4+\pi}{4} \cdot x + 3 \quad ; \quad A'(x_m) = 0 \Leftrightarrow x_m = \frac{3}{\frac{4+\pi}{4}} = \underline{\underline{\frac{12}{4+\pi}}}$$

7) **A l'aide d'un tableau de signes de la dérivée de la fonction à maximiser** (*ici A'(x)*) **au voisinage de x_m , vérifiez que vous avez bien un maximum. Utilisez le critère du maximum ou du minimum.**

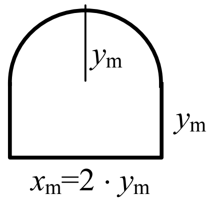
x		x_m	
$A'(x)$	+	0	–
$A(x)$	↗	*maximum*	↘

Donc $x_m = 12 / (4+\pi)$ *est bien l'abscisse d'un maximum.*

8) **Donnez une réponse en français, qui résume vos résultats**.
Les dimensions de la fenêtre laissant passer un maximum de lumière sont :

$x_m = \frac{12}{4+\pi}$ *et* $y_m = 3 - \frac{2+\pi}{4} \cdot x_m = \ldots = \frac{6}{4+\pi}$. *On constate que :* $\frac{x_m}{y_m} = 2$

La fenêtre est aussi large que haute.



XXI. Etude de fonctions

Nous voici arrivés dans le dernier chapitre de ce cours d'analyse. Avec tous les outils (théorèmes) que nous avons vus, nous pouvons étudier en détail les caractéristiques principales d'une fonction.
Voici une liste de questions qui nous intéresseront :

1. Quel est son domaine de définition ?
2. Quelle est son ordonnée à l'origine ?
3. Quels sont ses zéros ?
4. Quelles sont ses asymptotes ? Verticales, horizontales et obliques.
5. Quels sont ses extremums locaux ?
6. Quels sont les intervalles sur lesquels elle est croissante et ceux sur lesquels elle est décroissante ?
7. Quelle est son allure graphique ?

Pour répondre à ces questions, la dérivée de la fonction doit être calculée et un tableau de variations de la fonction est nécessaire.

Voici un exemple : Etude de la fonction : $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$

1. Son domaine de définition est : $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, car $x+1\neq 0$.
2. Son ordonnée à l'origine est : $f(0)=2$.
3. Ses zéros satisfont : $x^2-x+2=0$. $a=1$; $b=-1$; $c=2$; $\Delta=b^2-4ac=1-4\cdot1\cdot2=-7$
   $\Delta<0$, donc f n'a pas de zéros.
4. f possède une asymptote verticale d'équation : $x=-1$, car $\lim\limits_{x\to-1}|f(x)|=\infty$
   Par division polynomiale, on obtient : $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x+1}$,
   donc $y=x-2$ est une asymptote oblique de f et c'est la seule.

Pour la suite, nous avons besoin de la dérivée de f.

$$f'(x)=\frac{(2x-1)\cdot(x+1)-(x^2-x+2)\cdot1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x-1-x^2+x-2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+1)^2}$$

La dérivée s'annule en $x=-3$ et en $x=1$. Elle n'est pas définie (–infinie) en $x=-1$.

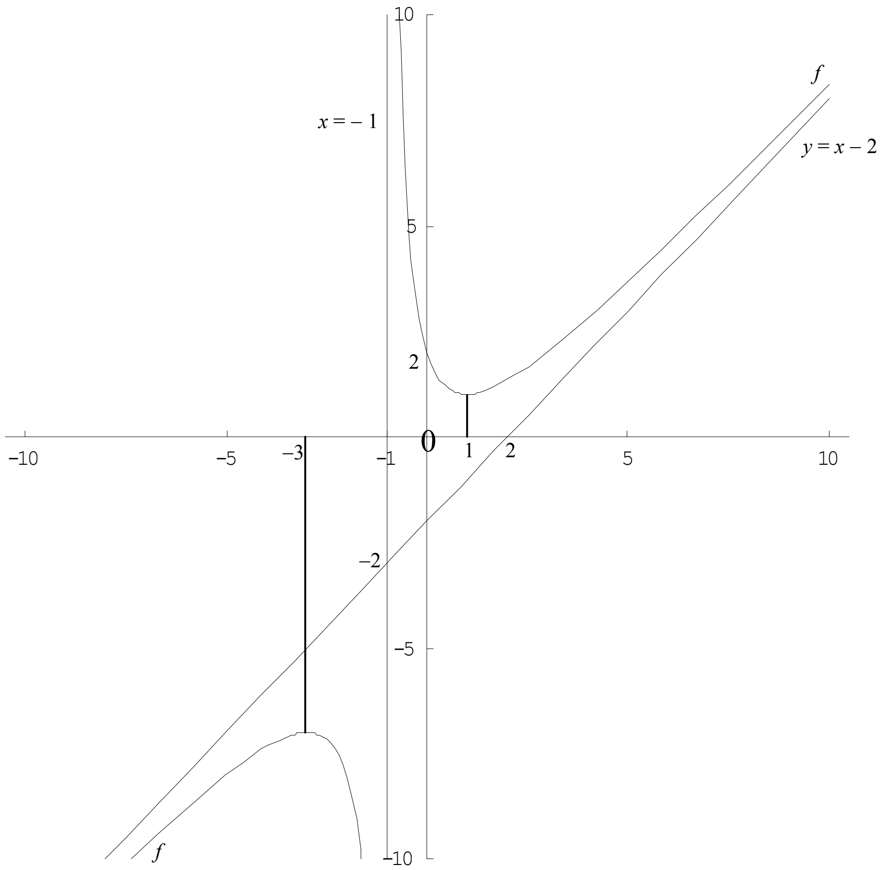
Tableau de variations :

x		-3		-1		1	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$(-\infty)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$ $\nearrow$	$-$ max $\rightarrow$	$-$ $\searrow$	$\vert$	$+$ $\searrow$	$+$ min $\rightarrow$	$+$ $\nearrow$

5. Le tableau de variations indique un maximum local en $x=-3$ et un minimum local en $x=1$.
6. Le tableau de variations indique clairement où la fonction est croissante et où elle est décroissante.

Sur la page suivante, le graphe de f est dessiné.

7. Voici l'allure du graphe de f avec des indications : $f(0)$, zéros, asymptotes, extremums



Etudiez la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^3 - x^2 + x$$

$f(x) = x \cdot (x^2 - x + 1)$ $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1 - 4 = -3 < 0$, pas d'autres racines que $x = 0$.

Dom(f) = $\mathbb{R}$; Zéros(f) = { 0 }

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8 < 0$, pas de racines.

Donc (f') = $\mathbb{R}$; Zéros(f') = $\varnothing$

L'étude est faite en partie à la page suivante.

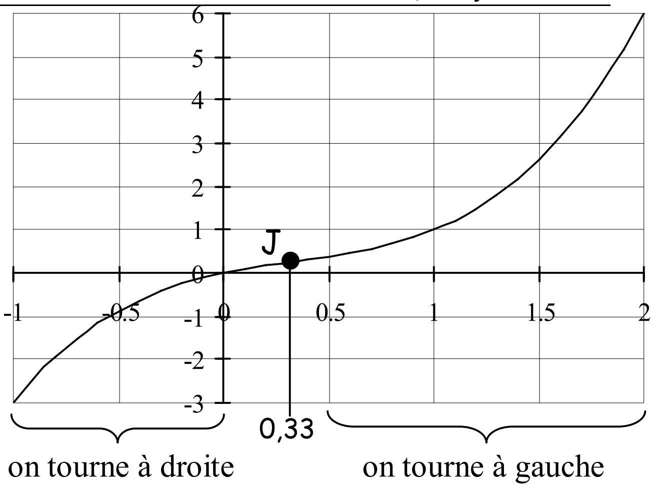
Voici le graphique de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 + x$

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

En suivant la courbe en partant de $x = -1$, on commence par tourner à droite, jusqu'à un point à partir duquel on continue en tournant à gauche.

Ce point s'appelle un **point d'inflexion.** Appelons-le J.

Proposez une valeur approximative de l'abscisse de J !



J_x se situe entre 0 et 0,5.
$J_x \approx 0{,}33$

Remarquez que la pente de la tangente à la fonction f diminue jusqu'au point d'inflexion J, puis augmente à partir de ce point. Qu'est-ce que cela signifie pour la fonction dérivée f' ?

J est un minimum local de la fonction dérivée f '.

Que peut-on alors dire de la dérivée de la dérivée $[f']'$ en ce point J ?

La dérivée de la dérivée [f ']' en J s'annule.

A partir de ces considérations, calculez l'abscisse de J !

$[f']'(x) = 6x - 2.\quad [f']'(J_x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 6J_x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; J_x = 2/6 = 1/3 = 0,\overline{3}$

L'abscisse du point d'inflexion J égale $1/3 \approx 0{,}333$.

On peut établir un tableau de signe plus complet, qui tient compte des l'informations obtenues ci–dessus.

Tableau de signes :

x		0		1/3	
$f'(x)$	+	+	+	+	+
$[f'(x)]'$	–	–	–	0	+
$f(x)$	– ↗	0 ↗	+ ↗	+ ↗	+ ↗

Définition :
La dérivée de la dérivée s'appelle **la dérivée seconde** de la fonction et se note : $\boxed{f''}$.
Son signe détermine la courbure de f.

Définition :
Un point d'inflexion d'une fonction deux fois dérivable f, est un extremum de la dérivée f' de cette fonction : c'est un point où f'' s'annule et change de signe. La courbure de f change de sens.

Annexe I

En utilisant la relation trigonométrique : $\tan(x)-\tan(a)=\dfrac{\sin(x-a)}{\cos(x)\cdot\cos(a)}$, c.f. table CRM, p . 29

montrons que la dérivée de la fonction tangente est : $\tan'(a)=\dfrac{1}{\cos^2(a)}$.

$\tan'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan(x)-\tan(a)}{x-a}$ par définition de la dérivée d'une fonction.

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{\sin(x-a)}{\cos(x)\cdot\cos(a)}}{x-a}$ en utilisant la règle trigonométrique.

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{(x-a)\cdot\cos(x)\cdot\cos(a)}$ simplification d'une fraction de fraction.

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{(x-a)}\cdot\dfrac{1}{\cos(x)\cdot\cos(a)}$ réécriture des fractions.

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{(x-a)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\cos(x)\cdot\cos(a)}$ la limite d'un produit égale le produit des limites, lorsqu'elles existent.

$=1\cdot\dfrac{1}{\cos(a)\cdot\cos(a)}$ la première limite égale 1, la seconde utilise la continuité de la fonction cos(x), qui implique que : $\lim\limits_{x\to a}\cos(x)=\cos(a)$.

<u>Conclusion :</u> $\boxed{\tan'(a)=\dfrac{1}{\cos^2(a)}}$ CQFD.

Autre écriture : $\boxed{\tan'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}}$

<u>Remarque :</u>

En utilisant la règle de dérivation : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$, il est plus facile de calculer $\tan'(x)$.

$$\tan'(x)=\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'=\frac{\sin'(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot\cos'(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$\tan'(x)=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Deux suites possibles :

1) : $\tan'(x)=\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$, car $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

2) : $\tan'(x)=\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2=1+\tan^2(x)$

<u>Conclusion :</u> $\boxed{\tan'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)}$

Annexe II

Pour les curieux, voici une méthode utilisée par Newton pour calculer des racines.

On veut une bonne approximation de $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ est une racine de la fonction : $f(x) = x^2 - 2$. Rappelons que $f'(x) = 2x$

On a vu que pour de petites valeurs de h, on a : $\boxed{f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h}$

Prenons pour a une valeur proche de $\sqrt{2}$ et

h tels que $f(a+h) = 0$. C'est à dire $(a+h)^2 - 2 = 0$

h est petit, car a^2 est proche de 2.

Donc $0 = f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h$. Donc $\boxed{h \approx -\frac{f(a)}{f'(a)}}$

Donc $h \approx -\frac{a^2-2}{2a} = \frac{2-a^2}{2a} = \frac{1}{a} - \frac{a}{2}$ et $a + h \approx \frac{1}{a} + \frac{a}{2}$

Donc $b \overset{\text{définition}}{=} \frac{1}{a} + \frac{a}{2}$ est une meilleure approximation de $\sqrt{2}$ que a.

Par exemple, si on prend $a = \frac{3}{2} = 1{,}5$, qui est une approximation de $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623$, alors

$b = \frac{1}{a} + \frac{a}{2} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12} \approx 1{,}416666$ est une meilleure approximation de $\sqrt{2}$.

On peut recommencer en prenant $a = \frac{17}{12} \approx 1{,}416666$ comme approximation de $\sqrt{2}$.

$b = \frac{1}{a} + \frac{a}{2} = \frac{12}{17} + \frac{17}{24} = \frac{577}{408} \approx 1{,}414215686$ c'est déjà une bonne approximation.

L'étape suivante donne : $b = \frac{408}{577} + \frac{577}{816} = \frac{665'857}{470832} \approx 1{,}4142135623 \approx \sqrt{2}$.

Historiquement la maîtrise des dérivées a permis de simplifier des calculs, qui étaient indispensables à la navigation maritime.

Index