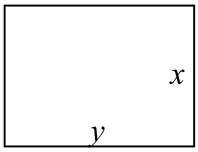
❶ Les rectangles de 48 [cm^2]

Suivons la méthode de résolution proposée au chapitre IXX (page 46) du cours.

1) **Faites un dessin**.



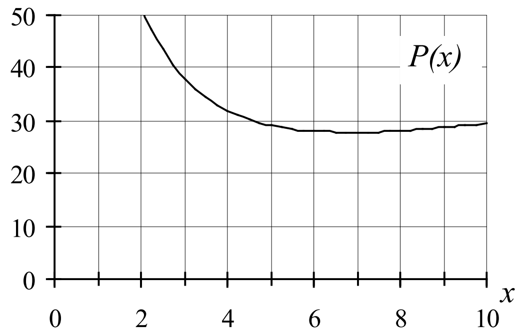
2) **Donnez des noms aux paramètres inconnus sur le dessin**. *Ici,* x *et* y.

3) **Exprimez la grandeur connue**
(*ici, l'aire*)
en fonction des paramètres du dessin. *Ici,* x *et* y.
Ici, la relation que l'on obtient est : $x \cdot y = 48$. *Unités de* x *et* y *: [cm]*

4) **Déterminez quelle est la grandeur à minimiser**.
Ici, c'est le périmètre du rectangle : $P(x, y)$.

Puis, exprimez la grandeur à minimiser en fonction des paramètres inconnus. *Ici* x *et* y.
$P(x, y) = 2x + 2y$

5) **A l'aide de la relation obtenue en (3), éliminez un paramètre** (*ici* x *ou* y), **pour exprimer la grandeur à minimiser en fonction d'un seul paramètre**.



Ici, nous allons éliminer la variable y *:* $y = \dfrac{48}{x}$

On aurait pu éliminer x.

Donc la fonction à minimiser est :

$P(x) = 2 \cdot x + 2 \cdot \dfrac{48}{x}$

Simplifiez : $P(x) = 2 \cdot x + \dfrac{96}{x}$

6) **Calculez la dérivée de la fonction à minimiser et déterminez pour quelle(s) valeur(s) cette dérivée s'annule.**

$P'(x) = 2 - \dfrac{96}{x^2}$

$P'(x_m) = 0 \iff 2 - \dfrac{96}{x_m^2} = 0 \iff 2 \cdot x_m^2 - 96 = 0 \iff x_m = \sqrt{48} \approx 6{,}9282$

7) **A l'aide d'un tableau de signes de la dérivée de la fonction à minimiser** (*ici* $P'(x)$) **au voisinage de** x_m **, vérifiez que vous avez bien un minimum. Utilisez le critère du maximum ou du minimum.**

x		$x_m = \sqrt{48}$	
$P'(x)$	$-$	0	+
$P(x)$	↘	*minimum*	↗

Donc $x_m = \sqrt{48}$ *est bien l'abscisse d'un minimum pour* $x > 0$.

8) **Donnez une réponse en français, qui résume vos résultats**.

$y_m = \dfrac{48}{x_m} = \dfrac{48}{\sqrt{48}} = \sqrt{48} = x_m$

Le rectangle d'aire égale à 48 cm^2 et de périmètre minimal est un carré de côtés de longueurs :

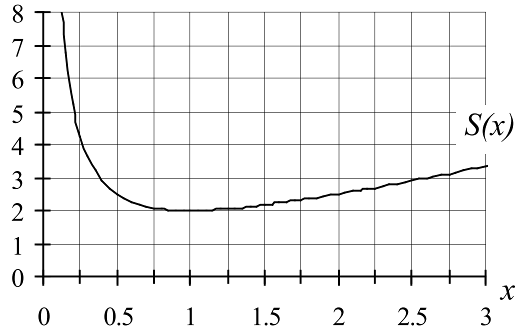
$x_m = \sqrt{48} \approx 6{,}9282\,[\text{cm}]$. $y_m / x_m = 1$.

❷ Le nombre mystérieux

1) **Donnez un nom au paramètre inconnu**. *Appelons le* x. (C'est pas original comme nom, mais habituel en math.)

2) **Déterminez quelle est la grandeur à minimiser**.

Ici, c'est la somme du nombre plus son inverse : $S(x) = x + \frac{1}{x}$.



3) **Calculez la dérivée de la fonction à minimiser et déterminez pour quelle(s) valeur(s) cette dérivée s'annule.**

$S'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$S'(x_m) = 0 \iff 1 - \frac{1}{x_m^2} = 0 \iff x_m^2 - 1 = 0 \iff x_m = \pm 1$

4) **En considérant les signes de la dérivée de la fonction à minimiser** (*ici* $S'(x)$) **au voisinage de x_m, vérifiez que vous avez bien un minimum. Utilisez le critère du maximum ou du minimum.**

Ici, on peut remarquer que le problème n'a pas de solution, car plus un nombre plus petit que -1 sera négatif, plus ce nombre additionné à son inverse sera petit, petit dans le sens de "un grand nombre négatif".

Par contre, si on se limite aux nombres positifs, il y a une solution qui est $x_m = 1$.

x		-1		0		1	
$S'(x)$	+	0	–	/	–	0	+
$S(x)$	↗	*maximum*	↘	/	↘	*minimum*	↗

Donc $x_m = 1$ est bien l'abscisse d'un minimum local. C'est un minimum pour $x > 0$

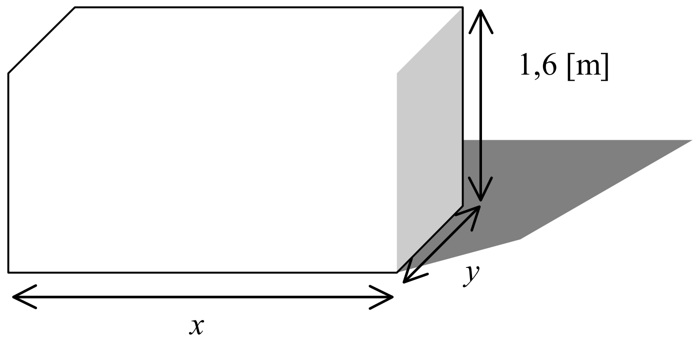
5) **Donnez une réponse en français, qui résume vos résultats**.

Le problème n'a pas de solution si on ne se limite pas aux nombres positifs.

Si on se limite aux nombres positifs, le nombre positif qui additionné à son inverse donne une somme minimale est le nombre 1.

❸ Le container

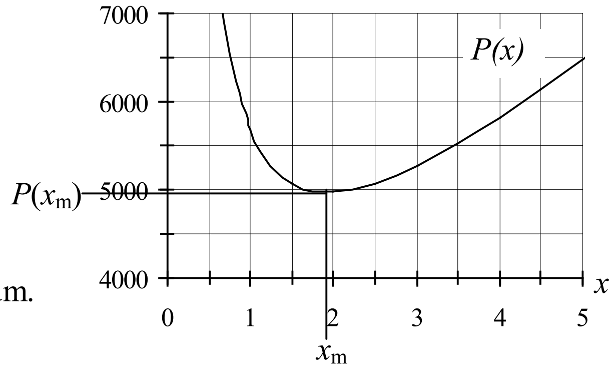
Volume du container = $x \cdot y \cdot 1{,}6 = 6$ [m³]



La surface du container est :
$S(x\,;y) = 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 1{,}6 \cdot x + 2 \cdot 1{,}6 \cdot y$

Le prix du container est :
$P(x\,;y) = 250 \cdot S(x\,;y)$
$P(x\,;y) = 500 \cdot (x \cdot y + 1{,}6 \cdot x + 1{,}6 \cdot y)$

Puisque $x \cdot y \cdot 1{,}6 = 6$, on a $y = 6 / (1{,}6 \cdot x) = 3{,}75 / x$
donc $P(x) = 500 \cdot (3{,}75 + 1{,}6 \cdot x + 6 / x)$



Le graphique suggère fortement qu'il existe des dimensions qui minimisent le prix du container.

Notons x_m la dimension x correspondant au prix minimum.
$P'(x) = 500 \cdot \left(1{,}6 - 6/x^2\right)$

$$P'(x_m) = 0 \Leftrightarrow 500 \cdot \left(1{,}6 - 6/x_m^2\right) = 0 \Leftrightarrow 1{,}6 - 6/x_m^2 = 0 \Leftrightarrow x_m = \sqrt{6/1{,}6} = \sqrt{3{,}75} \approx 1{,}93649$$

Vérifions que $x_m = \sqrt{3{,}75}$ est bien l'abscisse d'un minimum.

x		$\sqrt{3{,}75}$	
$P'(x)$	–	0	+
$P(x)$	↘	*minimum*	↗

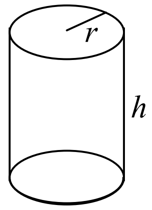
Donc $x_m = \sqrt{3{,}75}$ *est bien l'abscisse d'un minimum pour* $x > 0$.

Le prix minimal est : $P(x_m) = 500 \cdot \left(3{,}75 + 1{,}6 \cdot \sqrt{3{,}75} + 6 / \sqrt{3{,}75}\right) \approx 4'973.40$ Fr.

Remarquez que : $y_m = \dfrac{6}{1{,}6 \cdot x_m} = \dfrac{3{,}75}{x_m} = \dfrac{3{,}75}{\sqrt{3{,}75}} = \sqrt{3{,}75} = x_m$

Donc le container a la particularité que sa base est carrée !

❹ **La boîte de Cola**.



1) **Faites un dessin**.

2) **Donnez des noms aux paramètres inconnus sur le dessin**. *Ici, r et h.*

3) **Exprimez la grandeur connue**
(*ici, le volume*)
en fonction des paramètres du dessin. *Ici, r et h.*
Ici, la relation que l'on obtient est : $\pi \cdot r^2 \cdot h = 1/3$.

4) **Déterminez quelle est la grandeur à minimiser**.
Ici, c'est la surface du cylindre : S(r, h).

Puis, exprimez la grandeur à minimiser en fonction des paramètres inconnus. *Ici r et h.*

$$S(r,h) = \underbrace{2\cdot\pi\cdot r^2}_{\text{aire de la base + aire du couvercle}} + \underbrace{2\cdot\pi\cdot r\cdot h}_{\text{aire de la paroie latérale}}$$

5) **A l'aide de la relation obtenue en (3), éliminez un paramètre** (*ici r ou h*), **pour exprimer la grandeur à minimiser en fonction d'un seul paramètre**.

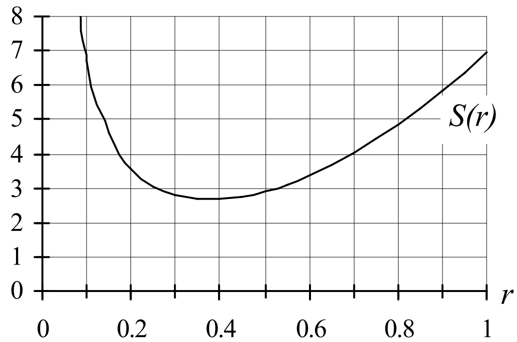
Ici, nous allons éliminer la variable h : $h = \dfrac{1}{3\cdot\pi\cdot r^2}$

Car elle apparaît de manière plus simple dans S(r, h).

Donc la fonction à minimiser est :

$$S(r) = 2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{1}{3\cdot\pi\cdot r^2}$$

Simplifiez : $S(r) = 2\cdot\pi\cdot r^2 + \dfrac{2}{3\cdot r}$



6) **Calculez la dérivée de la fonction à minimiser et déterminez pour quelle(s) valeur(s) cette dérivée s'annule.**

$$S'(r) = 4\cdot\pi\cdot r - \frac{2}{3\cdot r^2}$$

$$S'(r_m) = 0 \iff 4\cdot\pi\cdot r_m - \frac{2}{3\cdot r_m^2} = 0 \iff 12\cdot\pi\cdot r_m^3 - 2 = 0 \iff r_m = \sqrt[3]{\frac{1}{6\cdot\pi}} \approx 0{,}37575$$

7) **A l'aide d'un tableau de signes de la dérivée de la fonction à minimiser** (*ici S'(r)*) **au voisinage de r_m , vérifiez que vous avez bien un minimum. Utilisez le critère du maximum ou du minimum.**

r		r_m	
$S'(r)$	–	0	+
$S(r)$	↘	*minimum*	↗

Donc $r_m = \sqrt[3]{1/(6\cdot\pi)}$ *est bien l'abscisse d'un minimum.*

8) **Donnez une réponse en français, qui résume vos résultats**.
Les dimensions de la boîte utilisant le minimum de fer blanc sont :

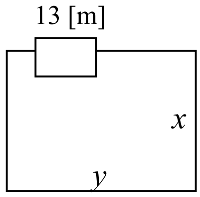
$$r_m = \sqrt[3]{\frac{1}{6\cdot\pi}} \approx 0{,}37575\,[\text{dm}] \quad et \quad h_m = \frac{1}{3\cdot\pi\cdot r_m^2} \approx \frac{1}{3\cdot\pi\cdot 0{,}37575^2} \approx 0{,}7515\,[\text{dm}]$$

Remarquons que : $\dfrac{2r_m}{h_m} = 2r_m \cdot \dfrac{1}{h_m} = 2r_m \cdot 3\cdot\pi\cdot r_m^2 = 6\cdot\pi\cdot r_m^3 = 1$

On constate que : $2\cdot r_m = h_m$, donc le diamètre de la boîte est de même longueur que sa hauteur.

❺ La clôture

1) **Faites un dessin**.

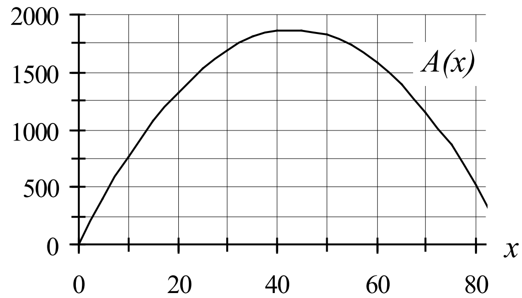


2) **Donnez des noms aux paramètres inconnus sur le dessin**. *Ici,* x *et* y.

3) **Exprimez la grandeur connue** (*ici, le périmètre*) **en fonction des paramètres du dessin**. *Ici,* x *et* y.
Ici, la relation que l'on obtient est : $2x + y + y - 13 = 160$ **Simplifiez** : $x + y = 173/2$

4) **Déterminez quelle est la grandeur à maximiser**.
Ici, c'est l'aire de la figure du dessin : Aire(x, y).
Puis, exprimez la grandeur à maximiser en fonction des paramètres inconnus. *Ici* x *et* y.
$Aire(x, y) = x \cdot y$

5) **A l'aide de la relation obtenue en (3), éliminez un paramètre** (*ici* x *ou* y), **pour exprimer la grandeur à maximiser en fonction d'un seul paramètre**.



Ici, nous allons éliminer la variable y *:* $y = \dfrac{173}{2} - x$

On aurait put éliminer x*, cela ne simplifierait pas la suite.*

Donc la fonction à maximiser est :

$$A(x) = Aire(x) = x \cdot \left(\frac{173}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{173}{2} \cdot x$$

6) **Calculez la dérivée de la fonction à maximiser et déterminez pour quelle(s) valeur(s) cette dérivée s'annule.**

$$A'(x) = -2x + \frac{173}{2}$$

$$A'(x_m) = 0 \iff x_m = \frac{173}{4} = 43,25$$

7) **A l'aide d'un tableau de signes de la dérivée de la fonction à maximiser** (*ici* $A'(x)$) **au voisinage de** x_m **, vérifiez que vous avez bien un maximum. Utilisez le critère du maximum ou du minimum.**

x		43,25	
$A'(x)$	+	0	–
$A(x)$	↗	*maximum*	↘

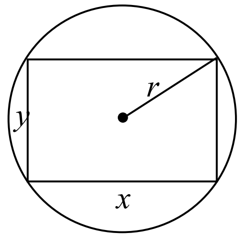
Donc $x_m = 43,25$ *est bien l'abscisse d'un maximum.*

8) **Donnez une réponse en français, qui résume vos résultats**.
Les dimensions du plus grand champ que l'on pourra entourer sont :

$$x_m = \frac{173}{4} = 43,25 \quad et \quad y_m = \frac{173}{2} - x_m = \frac{173}{4} = 43,25 = x_m$$

On constate que : $x_m = y_m$*, donc le champ est de forme carrée.*

❻ Le cercle



1) **Faites un dessin**.

2) **Donnez des noms aux paramètres inconnus sur le dessin**. *Ici, x et y.*

3) **Exprimez la grandeur connue** (*ici, le rayon*) **en fonction des paramètres du dessin**. *Ici, x et y.*

   La relation que l'on obtient par Pythagore est : $x^2 + y^2 = (2r)^2 = 4r^2$ donc $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$

4) **Déterminez quelle est la grandeur à maximiser**.
   Ici, c'est l'aire de la figure du dessin : Aire(x, y).
   Puis, exprimez la grandeur à maximiser en fonction des paramètres inconnus. *Ici x et y.*
   $Aire(x, y) = x \cdot y$

5) **A l'aide de la relation obtenue en (3), éliminez un paramètre** (*ici x ou y*), **pour exprimer la grandeur à maximiser en fonction d'un seul paramètre**.
   Ici, nous allons éliminer la variable $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$ *On aurait put choisir d'éliminer la variable x.*

   Donc la fonction à maximiser est :
   $A(x) = Aire(x, y) = x \cdot y = x \cdot \sqrt{4r^2 - x^2}$

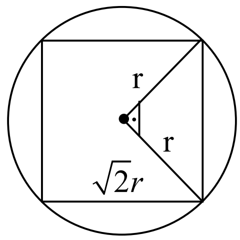
6) **Dérivez la fonction à maximiser, pour déterminer pour quelle(s) valeur(s) elle s'annule**.
   $$A'(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$
   $$A'(x_m) = 0 \ \rightarrow\ 4r^2 - 2x_m^2 = 0 \ \rightarrow\ 2r^2 = x_m^2 \ \rightarrow\ \underline{\underline{x_m = \sqrt{2} \cdot r}}$$

7) **A l'aide d'un tableau de signes de la dérivée de la fonction à maximiser** (*ici $A'(x)$*) **au voisinage de x_m, vérifiez que vous avez bien un maximum. Utilisez le critère du maximum ou du minimum.**

x		$x_m = \sqrt{2} \cdot r$	
$A'(x)$	$+$	0	$-$
$A(x)$	↗	*maximum*	↘

   Donc $x_m = \sqrt{2} \cdot r$ *est bien l'abscisse d'un maximum.*

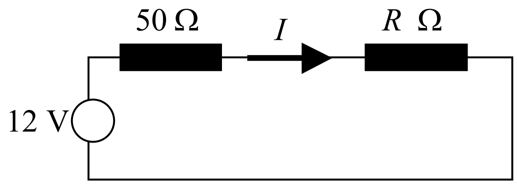
   $y_m = \sqrt{4r^2 - x_m^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2} \cdot r = x_m$



8) **Donnez une réponse en français, qui résume vos résultats**.
   Les dimensions qui maximisent l'aire du rectangle inscrit sont :
   $x_m = y_m = \sqrt{2} \cdot r$ *donc* $\frac{x_m}{y_m} = 1$

   Donc le rectangle optimum est un carré d'aire = $x_m \cdot y_m = \left(\sqrt{2} \cdot r\right)^2 = 2r^2$

❼ La résistance électrique



1) **Faites un dessin**.

2) **Donnez des noms aux paramètres inconnus sur le dessin**. *Ici, I et R.*

3) **Exprimez la grandeur connue en fonction des paramètres du dessin**. *Ici, I et R.*

   Ici, c'est plus simple que précédemment, car on a la relation : $I = \dfrac{12}{50+R}$. Aussi : $R = \dfrac{12}{I} - 50$

4) **Déterminez quelle est la grandeur à maximiser**.
   Ici, c'est la puissance dissipée par la résistance.
   Puis, exprimez la grandeur à maximiser en fonction des paramètres inconnus. *Ici I et R.*
   $P(I,R) = R \cdot I^2$

5) **A l'aide de la relation obtenue en (3), éliminez un paramètre** (*ici I*), **pour exprimer la grandeur à maximiser en fonction d'un seul paramètre**.

   Ici, nous allons éliminer la variable $I = \dfrac{12}{50+R}$.

   Donc la fonction à maximiser est : $P(R) = R \cdot I^2 = R \cdot \dfrac{12^2}{(50+R)^2}$

   En éliminant : $R = \dfrac{12}{I} - 50$, la fonction est plus simple : $P(I) = \left(\dfrac{12}{I} - 50\right) \cdot I^2 = 12 \cdot I - 50 \cdot I^2$

6) **Dérivez la fonction à maximiser, pour déterminer pour quelle(s) valeur(s) elle s'annule**.

   $$P'(R) = \frac{12^2}{(50+R)^2} + R \cdot \frac{12^2 \cdot (-2)}{(50+R)^3} = \frac{12^2 \cdot \left(50 + R - 2 \cdot R\right)}{(50+R)^3} = \frac{12^2 \cdot \left(50 - R\right)}{(50+R)^3}$$

   $P'(R_m) = 0 \;\rightarrow\; \underline{\underline{R_m = 50\,[\Omega]}}$

   On pourrait aussi calculer :

   $$P'(I) = 12 - 50 \cdot 2 \cdot I \;\;;\;\; P'(I_m) = 0 \;\Leftrightarrow\; I_m = 0{,}12 \;\text{ donc }\; R_m = \frac{12}{I_m} - 50 = \frac{12}{0{,}12} - 50 = 100 - 50 = 50\,[\Omega]$$

7) **A l'aide d'un tableau de signes de la dérivée de la fonction à maximiser** (*ici $P'(R)$*) **au voisinage de R_m, vérifiez que vous avez bien un maximum. Utilisez le critère du maximum ou du minimum.**

x		$R_m = 50\,[\Omega]$	
$P'(R)$	+	0	–
$P(R)$	↗	*maximum*	↘

   Donc $R_m = 50\,[\Omega]$ *est bien l'abscisse d'un maximum.*

8) **Donnez une réponse en français, qui résume vos résultats**.
   La valeur de la résistance R qui dissipe un maximum de puissance est de 50 Ohms.
   De manière plus générale, elle doit être égale à celle qui est fixe, cela indépendamment de la tension du générateur.