❶

a) $f'(x) = 7 \cdot 5 \cdot x^4 = 35 \cdot x^4$

b) $f'(x) = 15 \cdot x^2 - 4 \cdot x$

c) $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}}}$

d) $f'(x) = \left(-6 \cdot \sqrt[7]{x}\right)' = -6 \cdot \left(x^{\frac{1}{7}}\right)' = -6 \cdot \frac{1}{7} x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{-6}{7} \cdot x^{\frac{-6}{7}} = \underline{\underline{\frac{-6}{7 \cdot \sqrt[7]{x^6}}}}$

e) $f'(x) = \left(x^3 \cdot \sqrt{x}\right)' = \left(x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{\frac{7}{2}}\right)' = \frac{7}{2} \cdot x^{\frac{5}{2}} = 3,5 \cdot x^{\frac{4}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{3,5 \cdot x^2 \cdot \sqrt{x}}} \quad \underline{\underline{= 3,5 \cdot \sqrt{x^5}}}$

f) $\left(\frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}}{5}\right)' = \left(\frac{1}{5} \cdot x^{2+\frac{3}{4}}\right)' = \frac{1}{5} \cdot \left(x^{\frac{11}{4}}\right)' = \frac{1}{5} \cdot \frac{11}{4} \cdot x^{\frac{11}{4}-1} = \frac{11}{20} \cdot x^{\frac{7}{4}} = \frac{11}{20} \cdot x^{\frac{4}{4}+\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{11}{20} \cdot x \cdot \sqrt[4]{x^3}}} \quad \underline{\underline{= \frac{11}{20} \cdot \sqrt[4]{x^7}}}$

g) $f(x) = x^{1/2} + x^{-1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2 \cdot x^{1/2}} - \frac{1}{2 \cdot x^{3/2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3}}$

h) $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

i) $f'(x) = \frac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$

$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

j) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, selon l'exercice e)

k) $f'(x) = \sin'(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \cos'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) =$

$= \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$

l) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin'(2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \cdot 2) = \cos(2x)$

Les dérivées en g) et h) sont les mêmes, car $\sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$.

m) $f'(x) = 3 \cdot \sin^2(x) \cdot \sin'(x) = 3 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)$

n) $f'(x) = \sin'(x^3) \cdot (x^3)' = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x^3)$

o) $f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot \left(1-x^2\right)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

p) $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{1-x^2} + x^2 \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 2x \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x \cdot (1-x^2) - x^3}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= \frac{2x - 2x^3 - x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

q) $f'(x) = \frac{-1}{\left(3x^4 - \pi \cdot x\right)^2} \cdot \left(3x^4 - \pi \cdot x\right)' = \frac{-1}{\left(3x^4 - \pi \cdot x\right)^2} \cdot \left(12x^3 - \pi\right) = -\frac{12x^3 - \pi}{\left(3x^4 - \pi \cdot x\right)^2}$

r) $f'(x) = -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2\cdot\sqrt{(x^2+1)^3}}\right)\cdot(x^2+1)' =$

$= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{(x^2+1)^3}}\cdot 2x = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

s) $f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1-\cos^2(x)}}\cdot(1-\cos^2(x))' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1-\cos^2(x)}}\cdot(-2\cdot\cos(x)\cdot\cos'(x)) =$

$= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}\cdot(-\cos(x))\cdot(-\sin(x)) = \frac{\cos(x)\cdot\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \frac{\cos(x)\cdot\sin(x)}{|\sin(x)|} = \cos(x)\cdot \mathit{signe}(x)$

Plus simple est de voir que $f(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)} = \sqrt{\sin^2(x)} = |\sin(x)|$

Ensuite il faut considérer les deux cas. Celui où $\sin(x) \geq 0$ et celui où $\sin(x) < 0$.

t) $f'(x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\sin'(x) + 2\cdot\cos(x)\cdot\cos'(x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) + 2\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = 0$

Plus simple est de voir que : $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, donc la dérivée de f est nulle.

u) $f'(x) = \frac{1}{(x+3)^2}\cdot\left((x+3)^2\right)' = \frac{1}{(x+3)^2}\cdot\left(2\cdot(x+3)\right) = \frac{2}{x+3}$

Plus simple est de voir que : $f(x) = \ln((x+3)^2) = 2\cdot\ln(x+3) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x+3}\cdot(x+3)' = \frac{2}{x+3}$

v) $f'(x) = e^{7x^2-5x}\cdot(7x^2-5x)' = e^{7x^2-5x}\cdot(14x-5)$

w) $f'(x) = 1\cdot(\ln(x)-1) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$

x) $f'(x) = e^x - (-e^{-x}) = e^x + e^{-x}$

y) $f'(x) = \frac{-1}{(\ln(x))^2}\cdot\ln'(x) = \frac{-1}{\ln^2(x)}\cdot\frac{1}{x} = \frac{-1}{x\cdot\ln^2(x)}$

z) $f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})\cdot(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})\cdot(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

---

❷ Toutes les fonctions qui sont égales à leur dérivées sont du type : $f(x) = a\cdot e^x$, où $a \in \mathbb{R}$.

Si $f'(x) = 0{,}01\cdot f(x)$, alors $f(x) = a\cdot e^{0{,}01\cdot x}$, où $a \in \mathbb{R}$.

Si, de plus, $f(0) = 7$, alors $f(x) = 7\cdot e^{0{,}01\cdot x}$.

Si le taux d'accroissement de la population humaine de change pas, alors :

En 2020, nous serons $f(9) = 7\cdot e^{0{,}01\cdot 9} \approx 7{,}66$ milliards d'êtres humains.

Pour que $f(t) = 8$, il faut que $7\cdot e^{0{,}01\cdot x} = 8$, donc $x = \frac{1}{0{,}01}\cdot\ln\left(\frac{8}{7}\right) \approx 13{,}35$.

Durant l'année 2024 ou 2025, nous atteindrons les 8 milliards d'habitants.

Pour que $f(t) = 10$, il faut que $7\cdot e^{0{,}01\cdot x} = 10$, donc $x = \frac{1}{0{,}01}\cdot\ln\left(\frac{10}{7}\right) \approx 35{,}7$.

Si le taux d'accroissement de la population ne change pas, nous atteindrons les 10 milliards d'habitants sur la Terre en l'an 2046 ou 2047 !

Des modèles plus sophistiqués tiennent compte que le taux d'accroissement de la population change. Il est intéressant de savoir qu'en 1965 le taux d'accroissement de la population était d'un peut plus de 2%.