Exercice 1

La tangente à la courbe est horizontale ⇔ sa pente est nulle ⇔ la dérivée de la fonction s'annule.

1.1 $f(x) = x^2 - 2x + 1{,}5$

Selon les règles de dérivation : $f'(a) = 2a - 2$.

$f'(a) = 0 \iff 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$

La tangente à la courbe de f est horizontale en $P = (1\,; f(1)) = (1\,; 0{,}5)$.
Equation de la tangente : $y = 0{,}5$

1.2 $f(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 6x$

Selon les règles de dérivation : $f'(a) = 3a^2 - 9a + 6$.

$f'(a) = 0 \iff 3a^2 - 9a + 6 = 0 \iff 3\cdot(a-2)\cdot(a-1) = 0 \Rightarrow a = 1$ ou $a = 2$

La tangente à la courbe de f est horizontale en $P_1 = (1\,;\ f(1)) = (1\,; 2{,}5)$ et en $P_2 = (2\,;\ f(2)) = (2\,; 2)$.
Equations respectives de ces tangentes : $y = 2{,}5$ et $y = 2$.

1.3 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Selon les règles de dérivation : $f'(a) = 1 - \dfrac{1}{a^2}$.

$f'(a) = 0 \iff 1 - \dfrac{1}{a^2} = 0 \Rightarrow a = -1$ ou $a = 1$

La tangente à la courbe de f est horizontale en $P_1 = (-1\,; f(-1)) = (-1\,; -2)$ et en $P_2 = (1\,; f(1)) = (1\,; 2)$
Equations respectives de ces tangentes : $y = -2$ et $y = 2$

Exercice 2

2.1 Soit $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$. La question revient à déterminer pour quelle(s) valeur(s) de α et β la dérivée de la fonction f s'annule en $x = 1$ et la courbe de la fonction passe par le point $(1\,; 2)$?

Cela revient à imposer les deux conditions $f'(1) = 0$ et $f(1) = 2$.

Selon les règles de dérivation : $f'(x) = 3\cdot x^2 + \alpha\cdot 2\cdot x + \beta$.

Ceci mène au système d'équations :

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 3\cdot 1^3 + \alpha\cdot 2\cdot 1 + \beta = 0 \\ 1^3 + \alpha\cdot 1^2 + \beta\cdot 1 = 2 \end{cases} \quad \text{simplifié en :} \quad \begin{cases} 2\alpha + \beta = -3 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on élimine l'inconnue β et on obtient : $\alpha = -4$.

Donc $\beta = 1 - \alpha = 5$.

Donc la fonction cherchée est : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$

2.2 Soit $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$. On cherche α et β pour que $T_{-1}(x) = x + 4$.

$f'(x) = 3x^2 + \alpha\cdot 2\cdot x + \beta$.

On sait que $f(-1) = T_{-1}(-1) = 3$, donc $-1 + \alpha - \beta = 3$.

On sait que $f'(-1)$ égale la pente de $T_{-1}(x) = x + 4$, donc $f'(-1) = 1$, donc $3 - 2\alpha + \beta = 1$.

Ceci mène au système d'équations :

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ -2a + b = -2 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on élimine l'inconnue β et on obtient : $-\alpha = 2$.

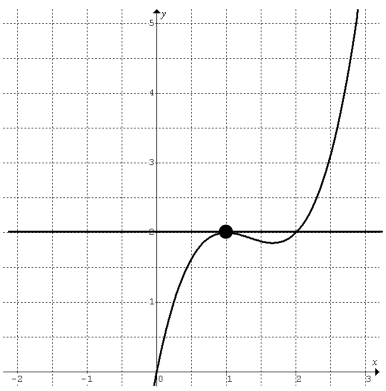
Donc $\alpha = -2$ et $\beta = \alpha - 4 = -6$

$\alpha = -2$ et $\beta = -6$ sont les valeurs cherchées. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x$

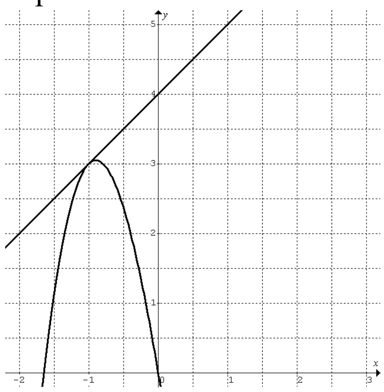
Suite de l'exercice 2.2

Vérifications sur des graphiques :

Pour l'exercice 2.1



pour l'exercice 2.2



2.3 Pour que deux fonctions aient des tangentes en une même abscisse a qui soient parallèles, il faut que la dérivée de ces fonctions en cette abscisse a soit la même.

$$f'(a) = g'(a) \quad\Leftrightarrow\quad 4\cdot\frac{-2}{a^3} = -\frac{1}{4}\cdot 2\cdot a \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{8}{a^3} = -\frac{a}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 16 = a^4 \quad\Leftrightarrow\quad a = \pm 2$$

f et g ont des tangentes parallèles aux points d'abscisses $x = -2$ et $x = 2$. Ce sont les seules solutions.

Exercice 3. Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1'(x) = \left(4x^3\right)' = 12x^2$$

$$f_2'(x) = \left(x^2 - x - 1\right)' = 2x - 1$$

$$f_3'(x) = \left(-5x^7 + 3x^9\right)' = -35x^6 + 27x^8$$

$$f_4'(x) = \left(x^4 - 5x^3 + x^2\right)' = 4x^3 - 15x^2 + 2x$$

$$f_5'(x) = \left(\frac{x^3+4}{5}\right)' = \left(\frac{1}{5}x^3 + \frac{4}{5}\right)' = \frac{3}{5}x^2$$

$$f_6'(x) = \left(\frac{2-x^2}{3}\right)' = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x^2\right)' = -\frac{2}{3}x$$

$$f_7'(x) = \left(6x^3 - \frac{x^7-x}{8}\right)' = 18x^2 - \frac{7}{8}x^6 + \frac{1}{8}$$

$$f_8'(x) = \left(\frac{1-x^6}{4} - 3x^4\right)' = -\frac{6}{4}x^5 - 12x^3 = -\frac{3}{2}x^5 - 12x^3$$

$$f_9'(x) = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{5x^2}\right)' = 2\cdot\frac{-1}{x^2} - \frac{1}{5}\left(x^{-2}\right)' = \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{5x^3}$$

$$f_{10}'(x) = \left(\frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right)' = 4\cdot\left(x^{-3}\right)' + 3\cdot\left(x^{-4}\right)' = \frac{-12}{x^4} - \frac{12}{x^5}$$

$$f_{11}'(x) = \left(\frac{x-x^3}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x} - x\right)' = -\frac{1}{x^2} - 1 = -\frac{1+x^2}{x^2}$$

$$f_{12}'(x) = \left(\frac{5x^4+8}{2x^3}\right)' = \left(\frac{5}{2}x + 4\cdot x^{-3}\right)' = \frac{5}{2} - \frac{12}{x^4}$$

$$f_{13}'(x)=\left(-6\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(-6\cdot x^{\frac{2}{3}}\right)'=-6\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=-4\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\underline{\underline{\frac{-4}{\sqrt[3]{x}}}}$$

$$f_{14}'(x)=\left(x^3\cdot\sqrt{x}\right)'=\left(x^3\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)'=\left(x^{\frac{7}{2}}\right)'=\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}=3,5x^{\frac{4}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{3,5x^2\cdot\sqrt{x}}}\quad\underline{\underline{=3,5\cdot\sqrt{x^5}}}$$

$$f_{15}'(x)=\left(\frac{x^2\cdot\sqrt[4]{x^3}}{5}\right)'=\left(\frac{1}{5}\cdot x^{2+\frac{3}{4}}\right)'=\frac{1}{5}\left(x^{\frac{11}{4}}\right)'=\frac{1}{5}\cdot\frac{11}{4}\cdot x^{\frac{11}{4}-1}=\frac{11}{20}x^{\frac{7}{4}}=\frac{11}{20}x^{\frac{4}{4}+\frac{3}{4}}=\underline{\underline{\frac{11}{20}x\cdot\sqrt[4]{x^3}}}\quad\underline{\underline{=\frac{11}{20}\cdot\sqrt[4]{x^7}}}$$

$$f_{16}'(x)=\left[x\cdot(3x-1)\right]'=\left(3x^2-x\right)'\underline{\underline{=6x-1}}$$

Ou bien, avec la règle du produit :

$$f_{16}'(x)=\left[x\cdot(3x-1)\right]'=x'\cdot(3x-1)+x\cdot(3x-1)'=1\cdot(3x-1)+x\cdot(3\cdot1-0)=3x-1+3x\underline{\underline{=6x-1}}$$

$$f_{17}'(x)=\left[(3x-1)\cdot(1-2x)\right]'=3\cdot(1-2x)+(3x-1)\cdot(-2)=3-6x-6x+2=-12x+5$$

$$f_{18}'(x)=\left[\left(1-x^2\right)^3\right]'=3\cdot\left(1-x^2\right)^{3-1}\cdot\left(1-x^2\right)'=3\cdot\left(1-x^2\right)^2\cdot(-2x)=-6x\cdot\left(1-x^2\right)^2$$

$$f_{19}'(x)=\left[\frac{\left(x^3+4x\right)^2}{7}\right]'=\left[\frac{1}{7}\cdot\left(x^3+4x\right)^2\right]'=\frac{1}{7}\cdot\left[\left(x^3+4x\right)^2\right]'=\frac{1}{7}\cdot2\cdot\left(x^3+4x\right)^{2-1}\cdot\left(x^3+4x\right)'=$$

$$\left[\left(5-2x^3\right)^{10}\right]'=10\cdot\left(5-2x^3\right)^9\cdot\left(5-2x^3\right)'=10\cdot\left(5-2x^3\right)^9\cdot\left(-6x^2\right)=-60x^2\cdot\left(5-2x^3\right)^9$$

$$f_{20}'(x)=\left[\left(5-2x^3\right)^{10}\right]'=10\cdot\left(5-2x^3\right)^{10-1}\cdot\left(5-2x^3\right)'=10\cdot\left(5-2x^3\right)^9\cdot(-6x)=-60x\cdot\left(5-2x^3\right)^9$$

$$f_{21}'(x)=\left[\frac{1}{x-3}\right]'=\left[(x-3)^{-1}\right]'=-1\cdot(x-3)^{-1-1}\cdot(x-3)'=-1\cdot(x-3)^{-2}\cdot1=\frac{-1}{(x-3)^2}$$

$$f_{22}'(x)=\left[\frac{1}{(x-3)^2}\right]'=\left[(x-3)^{-2}\right]'=-2\cdot(x-3)^{-3}\cdot(x-3)'=-2\cdot(x-3)^{-3}\cdot1=\frac{-2}{(x-3)^3}$$

$$f_{23}'(x)=\left[\frac{-8}{\left(x^8+x\right)^6}\right]'=\left[-8\cdot\left(x^8+x\right)^{-6}\right]'=-8\cdot\left[\left(x^8+x\right)^{-6}\right]'=-8\cdot(-6)\cdot\left(x^8+x\right)^{-7}\cdot\left(x^8+x\right)'=$$

$$48\cdot\left(x^8+x\right)^{-7}\cdot\left(8x^7+1\right)=\frac{48\cdot\left(8x^7+1\right)}{\left(x^8+x\right)^7}$$

$$f_{24}'(x)=\left[\frac{12}{\left(x^4+x+1\right)^9}\right]'=\left[12\cdot\left(x^4+x+1\right)^{-9}\right]'=12\cdot\left[\left(x^4+x+1\right)^{-9}\right]'=12\cdot(-9)\cdot\left(x^4+x+1\right)^{-10}\cdot\left(x^4+x+1\right)'=$$

$$-108\cdot\left(x^4+x+1\right)^{-10}\cdot\left(4x^3+1\right)=\frac{-108\cdot\left(4x^3+1\right)}{\left(x^4+x+1\right)^{10}}$$