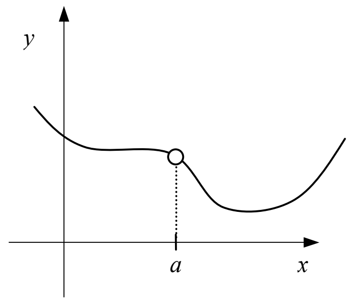
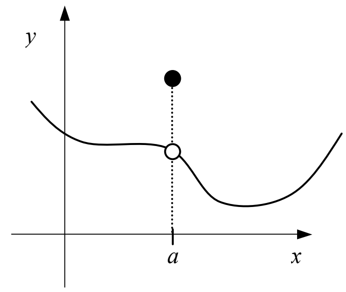
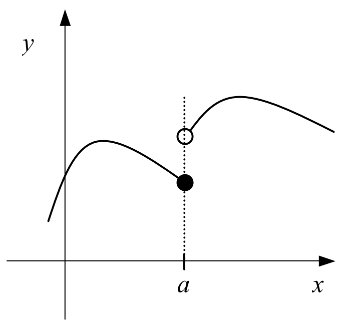
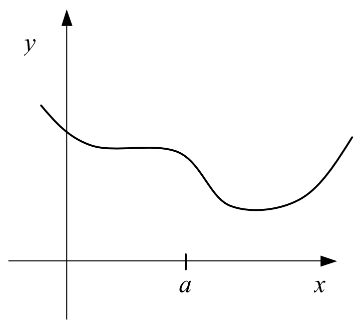
Exercice 1

Les possibilités de complétez les graphiques suivants selon les indications sont infinies. Seul compte le comportement de la fonction au voisinage de a :

 ***a)*** $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, mais pas $f(a)$	 ***b)*** $f(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existent, mais $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$
 ***c)*** $f(a)$ existe, mais pas $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	 ***d)*** $f(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existent, et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Seul la fonction du graphique d) satisfait les conditions de continuité en $x = a$, donc c'est la seule qui est continue en $x = a$.

Exercice 2

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ $\quad \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Cette fonction est continue en tout $x \neq 0$, car elle est polynomiale au voisinage de ces valeurs.
Reste à l'étudier au voisinage de $x = 0$.
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, donc elle est aussi continue en $x = 0$.

Conclusion : cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2, suite

b) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & \text{si} \quad x<2 \\ 7 & \text{si} \quad x=2 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$ Dom(f) = $\mathbb{R}$.

Cette fonction est continue en tout $x \neq 2$, car elle est polynomiale au voisinage de ces valeurs.
Reste à l'étudier au voisinage de $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2x^2-1 = 2\cdot 2^2-1=7$,

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x^2+1 = 2^2+1=5$. La limite à gauche est différente de la limite à droite, donc la limite n'existe pas et la fonction est discontinue en $x = 2$.

Conclusion : cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si} \quad x<-1 \\ 0 & \text{si} \quad x=-1 \\ 1-x & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$ Si $x<-1$, alors $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{x+1}=x-1$

Dom(f) = $\mathbb{R}$.

Cette fonction est continue en tout $x \neq -1$, car elle est polynomiale au voisinage de ces valeurs.
Reste à l'étudier au voisinage de $x = -1$.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} x-1=-2$,

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} 1-x=2$. La limite à gauche est différente de la limite à droite, donc la limite n'existe pas et la fonction est discontinue en $x = -1$.

Conclusion : cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$ Si $x \neq 1$, alors $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1$

Dom(f) = $\mathbb{R}$.

Cette fonction est continue en tout $x \neq 1$, car elle est polynomiale au voisinage de ces valeurs.
Reste à l'étudier au voisinage de $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1=3=f(1)$,

Donc la limite existe et la fonction est aussi continue en $x = 1$.

Conclusion : cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. On a : $f(x)=x^2+x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 3

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-x-6} & \text{si} \quad x\neq -2 \\ \lambda & \text{si} \quad x=-2 \end{cases}$ $\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-x-6}=\dfrac{(2x-1)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(x+2)}=\dfrac{2x-1}{x-3}$ si $x\neq -2$

Dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. $f(-2) = \lambda$ $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x-1}{x-3}=\dfrac{-5}{-5}=1$

Pour être continue en $x = -2$, il faut que $f(-2) = 1$, c.-à-d. il faut que $\lambda = 1$.

Exercice 3, suite

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-4)^2}{2x^2-7x-4} & \text{si } x\neq 4\\ \lambda & \text{si } x=4\end{cases}$ $\dfrac{(x-4)^2}{2x^2-7x-4}=\dfrac{(x-4)^2}{(2x+1)\cdot(x-4)}=\dfrac{x-4}{2x+1}$ si $x\neq 4$

Dom(f) = $\mathbb{R}\setminus\{-0{,}5\}$. $f(4)=\lambda$ $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{2x+1}=\dfrac{0}{9}=0$

Pour être continue en $x=4$, il faut que $f(4)=0$, c.-à-d. il faut que $\lambda=0$.