Exercice 1

1.1 La fonction se rapproche de la verticale qui correspond à l'axe des ordonnées, qui correspond donc à une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
La fonction se rapproche de l'horizontale à hauteur $y = 1$, qui correspond donc à une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

1.2 La fonction se rapproche de la verticale qui correspond à l'axe des ordonnées, qui correspond donc à une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
La fonction se rapproche d'une droite oblique, qui correspond à une asymptote oblique. Il reste à déterminer son équation : $y = a \cdot x + b$.

$$a = pente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{2-0} = -1$$

b = ordonnée à l'origine = 2.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = -x + 2$.

1.3 De nouveau, la fonction possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
Sur la gauche et sur la droite, la fonction se rapproche de deux droites obliques, qui correspond à deux asymptotes obliques. Il reste à déterminer leur équation : $y = a \cdot x + b$.
A gauche :

$$a = pente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{0-(-1)} = -1$$

b = ordonnée à l'origine = 0.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = -x$.

A droite :

$$a = pente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

b = ordonnée à l'origine = 0.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = x$.

1.4 De nouveau, la fonction possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
La fonction se rapproche d'une droite oblique, qui correspond à une asymptote oblique. Il reste à déterminer son équation : $y = a \cdot x + b$.

$$a = pente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-1)}{1-0} = 1$$

b = ordonnée à l'origine = −1.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$.

1.5 De nouveau, la fonction possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation : $y = a \cdot x + b$.

$$a = pente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

b = ordonnée à l'origine = 0.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = x$.

1.6 De nouveau, la fonction possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation : $y = a \cdot x + b$.

$$a = pente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-0}{0-(-1)} = -1$$

b = ordonnée à l'origine = −1.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = -x - 1$.

Remarquons que chacun de nos exemples possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$! Cela ne signifie pas qu'il est habituel qu'une fonction ait une asymptote verticale.

Exercice 1, deuxième partie.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = \infty$, donc f possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - x = 0$, donc f possède une asymptote oblique d'équation $y = x$.

f ne s'annule nul part, donc : Zéros(f) = $\varnothing$ = l'ensemble vide.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

De plus, pour $x > 0$, $f(x) > x$ et pour $x < 0$, $f(x) < x$.
Ce sont toutes des caractéristiques du graphique n° 5.
On peut évaluer f en certaines valeurs pour confirmer que le graphe de f est celui du n° 5.

b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, donc f possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, donc f une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

f s'annule en $x = -1$ et en $x = 1$, donc : Zéros(f) = $\{-1 ; 1\}$.
De plus, pour $f(x) < 1$ pour tout x.
Ce sont toutes des caractéristiques du graphique n° 1.
On peut évaluer f en certaines valeurs pour confirmer que le graphe de f est celui du n° 1.

c) $f(x) = -x + 7 + \dfrac{4}{x^2-4} = -x + 7 + \dfrac{4}{(x+2)\cdot(x-2)}$

f possède une asymptote oblique d'équation $y = -x + 7$.
f possède deux asymptotes verticales d'équations $x = -2$ et $x = 2$.
Aucun des six graphiques n'a de telles caractéristiques.

d) $f(x) = \dfrac{-x^3 - x^2 + 1}{x^2} = -x - 1 + \dfrac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, donc f possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - (x-1) = 0$, donc f possède une asymptote oblique d'équation $y = -x - 1$.

De plus, pour $f(x) > -x - 1$ pour tout x.
Ce sont toutes des caractéristiques du graphique n° 6.
On peut évaluer f en certaines valeurs pour confirmer que le graphe de f est celui du n° 6.

e) $f(x) = |x| + \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = \infty$, donc f possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - |x| = 0$, donc f possède deux asymptotes obliques d'équations $y = -x$ et $y = x$.

f s'annule en $x = -1$, donc : Zéros(f) = $\{-1\}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

De plus, pour $x > 0$, $f(x) > x$ et pour $x < 0$, $f(x) < -x$.
Ce sont toutes des caractéristiques du graphique n° 3.
On peut évaluer f en certaines valeurs pour confirmer que le graphe de f est celui du n° 3.

Exercice 1, deuxième partie, suite

f) $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x}=x-1-\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\infty$, donc f possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(x-1)=0$, donc f possède une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$.

$f(1)=-1$; $f(-1)=-1$;

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$

De plus, pour $x > 0$, $f(x) < x-1$ et pour $x < 0$, $f(x) > x - 1$.

Ce sont toutes des caractéristiques du graphique n° 4.

On peut évaluer f en certaines valeurs pour confirmer que le graphe de f est celui du n° 4.

g) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x-5}=7+\dfrac{34}{x-5}$, obtenu par division polynomiale.

f possède une asymptote horizontale d'équation $y = 7$.

f possède une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

Aucun des six graphiques n'a de telles caractéristiques.

h) $f(x) = -x + 2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

f possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(-x+2)=0$, donc f possède une asymptote oblique d'équation $y = -x + 2$.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^*_+$.

De plus, pour $x > 0$, $f(x) > -x + 2$.

Ce sont toutes des caractéristiques du graphique n° 2.

On peut évaluer f en certaines valeurs pour confirmer que le graphe de f est celui du n° 2.

i) $f(x)=\dfrac{x^2-10x+25}{x-5}=\dfrac{(x-5)^2}{x-5}=x-5$ avec $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

f se confond avec une application affine d'équation $y = x - 5$.

Aucun graphique ne possède cette caractéristique.

Donc aucun des six graphiques ne correspond à cette fonction.

j) $f(x) = \dfrac{0,5x^2-1,5x}{x-1}$ avec $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Aucun graphique ne possède la caractéristique $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Donc aucun des six graphiques ne correspond à cette fonction.

k) Cette fonction est exactement la même que celle du point d). $\Rightarrow$ même conclusion qu'en d).

l) Cette fonction est exactement la même que celle du point a). $\Rightarrow$ même conclusion qu'en a).

Exercice 2

$f(x)=\dfrac{5x}{x+8}=5-\dfrac{40}{x+8}$, obtenu par division polynomiale.

$\lim\limits_{x\to -8}|f(x)|=\infty$, donc f possède une asymptote verticale d'équation $x=-8$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=5$, donc f possède une asymptote horizontale d'équation $y=5$.

$g(x)=\dfrac{x-4}{(x+3)\cdot(x-5)}$

$\lim\limits_{x\to -3}|g(x)|=\infty$, donc g possède une asymptote verticale d'équation $x=-3$.

$\lim\limits_{x\to 5}|g(x)|=\infty$, donc g possède une asymptote verticale d'équation $x=5$.

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$, donc g possède une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

$h(x)=\dfrac{x-x^2}{x^2+x-2}=-1+\dfrac{2x-2}{x^2+x-2}=-1+\dfrac{2\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)}=-1+\dfrac{2}{x+2}$ avec Dom(f) = $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;\,1\}$

$\lim\limits_{x\to -2}|h(x)|=\infty$, donc h possède une asymptote verticale d'équation $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=-1$, donc h possède une asymptote horizontale d'équation $y=-1$.

$k(x)=\dfrac{x^2}{x+2}=x-2+\dfrac{4}{x+2}$, par division polynomiale. Dom(f) = $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$\lim\limits_{x\to -2}|k(x)|=\infty$, donc k possède une asymptote verticale d'équation $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to\infty} k(x)-(x-2)=0$, donc k possède une asymptote oblique d'équation $y=x-2$.

Une autre méthode pour chercher une asymptote oblique est de chercher a et b pour annuler les plus grandes puissances de x de $\dfrac{x^2}{x+2}-ax-b$

$$\frac{x^2}{x+2}-ax-b=\frac{x^2-ax^2-2ax-bx-2b}{x+2}=\frac{x^2\cdot(1-a)-x\cdot(2a+b)-2b}{x+2}$$

Pour $a=1$ et $b=-2a=-2$, le numérateur est de degré plus petit que celui du dénominateur, donc k possède une asymptote oblique d'équation $y=ax+b=x-2$.

$s(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}=\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}=x-2+\dfrac{3x+2}{x^2+2x+1}$, par division polynomiale. Dom(f) = $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\lim\limits_{x\to -1}|s(x)|=\infty$, donc s possède une asymptote verticale d'équation $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to\infty} s(x)-(x-2)=0$, donc s possède une asymptote oblique d'équation $y=x-2$.

$t(x)=\dfrac{x^3-2x}{x^2-3}=x+\dfrac{x}{x^2-3}$, par division polynomiale. Dom(f) = $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\}$

$\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}|t(x)|=\infty$, donc t possède une asymptote verticale d'équation $x=-\sqrt{3}$.

$\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}|t(x)|=\infty$, donc t possède une asymptote verticale d'équation $x=\sqrt{3}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} t(x)-x=0$, donc t possède une asymptote oblique d'équation $y=x$.