❶a **1.A** La fonction se rapproche de la verticale qui correspond à l'axe $x = 1$, qui correspond donc à une asymptote verticale d'équation $x = 1$.
La fonction se rapproche de l'horizontale à hauteur $y = 3$, qui correspond donc à une asymptote horizontale d'équation $y = 3$.

1.B La fonction se rapproche de la verticale qui correspond à l'axe $x = 0{,}5$, qui correspond donc à une asymptote verticale d'équation $x = 0{,}5$.
La fonction se rapproche d'une droite oblique, qui correspond à une asymptote oblique. Il reste à déterminer son équation : $y = a\cdot x + b$.

$$a = pente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-0}{0-(-1)} = -1$$

b = ordonnée à l'origine = –1.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = -x - 1$.

1.C La fonction possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
La fonction se rapproche d'une droite oblique, qui correspond à une asymptote oblique. Il reste à déterminer son équation : $y = a\cdot x + b$.

$$a = pente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{2-0} = 1$$

b = ordonnée à l'origine = 0.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = x$.

1.D Cette fonction possède trois asymptotes verticales d'équations $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$.
La fonction se rapproche d'une droite oblique, qui correspond à une asymptote oblique. Il reste à déterminer son équation : $y = a\cdot x + b$.

$$a = pente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{2-0} = 1$$

b = ordonnée à l'origine = 0.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = x$.
On remarque qu'il est possible que la fonction croise l'asymptote oblique !

1.E La fonction possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
Sur la gauche et sur la droite, la fonction se rapproche de deux droites obliques, qui correspond à deux asymptotes obliques. Il reste à déterminer leur équation : $y = a\cdot x + b$.

A gauche : $a = pente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{0-(-1)} = -1$

b = ordonnée à l'origine = 0.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = -x$.

A droite : $a = pente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{1-0} = 1$

b = ordonnée à l'origine = 0.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = x$.

1.F La fonction possède une asymptote verticale d'équation $x = -1$.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation : $y = a\cdot x + b$.

$$a = pente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{2-0} = -1$$

b = ordonnée à l'origine = 2.
La fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = -x + 2$.

❶b Associons à chacune des fonctions le graphique correspondant.

1) $f_1(x) = -x - 1 + \dfrac{1}{(2x-1)^2}$

Le dernier terme, $\varepsilon(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, donc cette fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = -x - 1$.
De plus elle possède une asymptote verticale d'équation $x = 0{,}5$, car $\lim\limits_{x \to 0,5} |f_1(x)| = \infty$.
Ce sont les caractéristiques du graphique B.

2) $f_2(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Le dernier terme, $\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, donc cette fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = x$.
De plus elle possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$, car $\lim\limits_{x \to 0} |f_2(x)| = \infty$.
Ce sont les caractéristiques du graphique C.

3) $f_3(x) = |x| + \dfrac{1}{x}$

Le dernier terme, $\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, donc cette fonction possède deux asymptotes oblique. Une à droite d'équation $y = x$ et une à gauche d'équation $y = -x$
De plus elle possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$, car $\lim\limits_{x \to 0} |f_3(x)| = \infty$.
Ce sont les caractéristiques du graphique E.

4) $f_4(x) = -x + 2 + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

Le dernier terme, $\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, donc cette fonction possède une asymptote oblique d'équation $y = -x + 2$.
De plus elle possède une asymptote verticale d'équation $x = -1$, car $\lim\limits_{x \to 0} |f_4(x)| = \infty$.
De plus, elle n'est pas définie pour $x \leq -1$ à cause de la racine carrée.
Ce sont les caractéristiques du graphique F.

5) $f_5(x) = \dfrac{x^4 - 2}{x \cdot (x^2 - 1)}$

Cette fonction possède trois asymptotes verticales, d'équations : $x = -1$; $x = 0$ et $x = 1$.
Ce sont les caractéristiques du graphique D.

6) $f_6(x) = \dfrac{3x^2 - 6}{(x-1)^2} = \dfrac{3x^2 - 6}{x^2 - 2x + 1} = 3 + \varepsilon(x)$

Cette fonction possède une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ et une asymptote verticale d'équation $x = 1$, car $\lim\limits_{x \to 1} |f_6(x)| = \infty$.
Ce sont les caractéristiques du graphique A.

❷ Détermination d'asymptotes.

$f_1(x)=\dfrac{5x}{x+8}=5-\dfrac{40}{x+8}$, obtenu par division polynomiale. Dom(f_1) = $\mathbb{R}\setminus\{-8\}$

$\lim\limits_{x\to -8}|f_1(x)|=\infty$, donc f_1 possède une <u>asymptote verticale d'équation $x=-8$</u>.

$\lim\limits_{x\to \infty} f_1(x)=5$, donc f_1 possède une <u>asymptote horizontale d'équation $y=5$</u>.

$f_2(x)=\dfrac{x-4}{(x+3)\cdot(x-5)}$. Dom($f_2$) = $\mathbb{R}\setminus\{-3\ ;\ 5\}$

$\lim\limits_{x\to -3}|f_2(x)|=\infty$, donc f_2 possède une <u>asymptote verticale d'équation $x=-3$</u>.

$\lim\limits_{x\to 5}|f_2(x)|=\infty$, donc f_2 possède une <u>asymptote verticale d'équation $x=5$</u>.

$\lim\limits_{x\to \infty} f_2(x)=0$, donc f_2 possède une <u>asymptote horizontale d'équation $y=0$</u>.

$f_3(x)=\dfrac{x-x^2}{x^2+x-2}=-1+\dfrac{2x-2}{x^2+x-2}=-1+\dfrac{2\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)}=-1+\dfrac{2}{x+2}$ avec Dom(f_3) = $\mathbb{R}\setminus\{-2\ ;\ 1\}$

$\lim\limits_{x\to -2}|f_3(x)|=\infty$, donc f_3 possède une <u>asymptote verticale d'équation $x=-2$</u>.

$x=1$ n'est pas l'équation d'une asymptote verticale, car $\lim\limits_{x\to 1}|f_3(x)|\neq\infty$

$\lim\limits_{x\to \infty} f_3(x)=-1$, donc f_3 possède une <u>asymptote horizontale d'équation $y=-1$</u>.

$f_4(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x+2}=x+1-\dfrac{6}{x+2}$, obtenu par division polynomiale.. Dom(f_4) = $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Donc <u>$y=x+1$ est l'équation d'une asymptote oblique</u> de f_4.

$\lim\limits_{x\to -2}|f_4(x)|=\infty$, donc f_4 possède une <u>asymptote verticale d'équation $x=-2$</u>.

$f_5(x)=\dfrac{x^2}{x+2}=x-2+\dfrac{4}{x+2}$, par division polynomiale. Dom(f_5) = $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Donc <u>$y=x-2$ est l'équation d'une asymptote oblique</u> de f_5.

$\lim\limits_{x\to -2}|f_5(x)|=\infty$, donc f_5 possède une <u>asymptote verticale d'équation $x=-2$</u>.

$f_6(x)=\dfrac{5x^3}{(x+1)^2}=\dfrac{5x^3}{x^2+2x+1}=5x-10+\dfrac{15x+10}{x^2+2x+1}$, par division polynomiale. Dom(f_6) = $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Donc <u>$y=5x-10$ est l'équation d'une asymptote oblique</u> de f_6.

$\lim\limits_{x\to -1}|f_6(x)|=\infty$, donc f_6 possède une <u>asymptote verticale d'équation $x=-1$</u>.

$f_7(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}=\dfrac{(x-2)\cdot(x+5)}{x-2}=x+5$, Dom($f_7$) = $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Cette fonction est une fonction affine égale à son asymptote oblique d'équation $y=x+5$.

$x=2$ n'est pas l'équation d'une asymptote verticale, car $\lim\limits_{x\to 1}|f_7(x)|\neq\infty$

$f_8(x)=\dfrac{x^3-2x}{x^2-3}=\dfrac{x\cdot(x^2-2)}{\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{x\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)}{\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)}=x+\dfrac{x}{x^2-3}$, Dom($f_8$) = $\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{3}\ ;\sqrt{3}\right\}$

Donc <u>$y=x$ est l'équation d'une asymptote oblique</u> de f_8.

$\lim\limits_{x\to \pm\sqrt{3}}|f_8(x)|=\infty$, donc f_8 possède <u>deux asymptotes verticales d'équations $x=-\sqrt{3}$ et $x=\sqrt{3}$</u>.