Dans tout ce qui suit, il est important que x soit en **radians**. Si x était en degrés, les résultats donneraient des nombres à virgules moins simples !

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{1}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}=3\cdot 1=3$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}=\frac{3}{2}\cdot\lim_{3x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/3)}{2x}=\lim_{\frac{x}{3}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{2\cdot 3}{1}\cdot\frac{x}{3}}=\frac{1}{6}\cdot\lim_{\frac{x}{3}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}}=\frac{1}{6}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{1}\cdot\frac{\sin(ax)}{ax}=\frac{a}{1}\cdot\lim_{ax\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=a\cdot 1=a$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(ax)}=\lim_{ax\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}\cdot\lim_{ax\to 0}\frac{1}{\cos(ax)}\overbrace{=}^{\text{utilisation de 4.}}a\cdot 1=a$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}=\frac{2}{3}\cdot\lim_{2x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\lim_{3x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)}=\frac{2}{3}$

Naturellement, le résultat 4. pourrait être directement utilisé.

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{x}=1\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$, donc cette limite n'existe pas !

8. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot\frac{x}{1}=\lim_{x^2\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{1}=1\cdot 0=0$

9.

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\cdot\cos(x)}=1\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$, donc cette limite n'existe pas !

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{3}\cdot\frac{\tan(5x)}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}=\frac{5}{3}\cdot\lim_{5x\to 0}\frac{\tan(5x)}{5x}\cdot\lim_{3x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)}=\frac{5}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{3}$

Naturellement, les résutats 4. et 6. pourraient être directement utilisés.

11. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=\lim_{(x-1)\to 0}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=1$

12. $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(x)}{x-\pi/2}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin(\pi/2-x)}{x-\pi/2}=\lim_{(x-\pi/2)\to 0}\frac{-\sin(x-\pi/2)}{x-\pi/2}=-1\cdot\lim_{(x-\pi/2)\to 0}\frac{\sin(x-\pi/2)}{x-\pi/2}=-1\cdot 1=-1$

13. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1\cdot 1=1$

14. $\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\tan(x)+\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\tan(x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=2\cdot 1+1=3$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-2x)}{x^2-2x}=\lim_{x^2-2x\to 0}\frac{\sin(x^2-2x)}{x^2-2x}=1$

16. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-2x)}{x^2-2x}=\frac{\sin(1^2-2)}{1^2-2}=\frac{\sin(-1)}{-1}=\frac{-\sin(1)}{-1}=\sin(1)$ C'est une limite immédiate !

17. $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-2x)}{x^2-2x}=\lim_{x^2-2x\to 0}\frac{\sin(x^2-2x)}{x^2-2x}=1$ Très similaire à la limite n° 15.

18. $\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x^2-2x)}{x^2-2x}=\frac{\sin(3^2-2\cdot 3)}{3^2-2\cdot 3}=\frac{\sin(3)}{3}$ C'est une limite immédiate !

19. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}=\ldots$ par application de la formule $\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}=\underbrace{\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}_{\to\cos(a)}\cdot\underbrace{\lim_{\frac{x-a}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}}_{\to 1}=\cos(a)$$

Avec la limite suivante, ce sont les limites les plus importantes de cette série !

20. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}=\ldots$ par application de la formule $\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-2\cdot\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}=\underbrace{\lim_{x\to a}-\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}_{\to -\sin(a)}\cdot\underbrace{\lim_{\frac{x-a}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}}_{\to 1}=-\sin(a)$$

Avec la limite précédente, ce sont les limites les plus importantes de cette série !

21.

En substituant $h=x-a$; $x=a+h$; $h\to 0$; $x\to a$ on retrouve exactement la limite n° 19, donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}=\ldots=\cos(a)$$

22.

En substituant $h=x-a$; $x=a+h$; $h\to 0$; $x\to a$ on retrouve exactement la limite n° 20, donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}=\ldots=-\sin(a)$$