Exercice 1

A =

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 1'000) = -\infty$, car moins un nombre gigantesque au cube donne moins un nombre gigantesque.

B =

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5}{x} - x \right) = 0 - \infty = -\infty$$

C =

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{5}{x} - x \right) = \begin{cases} \to +\infty \text{ si } x \to 0^+ \\ \to -\infty \text{ si } x \to 0^- \end{cases}$$

, donc la limite n'existe pas.

D =

$$\lim_{x \to 3} \frac{x}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{x}{(x+3)\cdot(x-3)} = \begin{cases} \to +\infty \text{ si } x \to 3^+ \\ \to -\infty \text{ si } x \to 3^- \end{cases}$$

, donc la limite n'existe pas.

E =

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 11x + 9}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cdot(2x-9)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x-9)}{(x-1)} = \begin{cases} \to -\infty \text{ si } x \to 1^+ \\ \to +\infty \text{ si } x \to 1^- \end{cases},$$

donc la limite n'existe pas.

F =

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 11x + 9}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cdot(2x-9)}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x-9)}{(x+1)} = -\frac{7}{2}$$

G =

par division polynomiale de $3x^3 - x^2 - x - 1$ par $x - 1$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(3x^2 + 2x + 1)\cdot(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} 3x^2 + 2x + 1 = 6$$

H =

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - x^2 - x - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(3x^2 + 2x + 1)\cdot(x-1)}{(2x+1)\cdot(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(3x^2 + 2x + 1)}{(2x+1)} = \frac{6}{3} = 2$$

I =

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^4}\right)} = \frac{1}{+\infty \cdot 1} = 0^+$$

J =

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-7x^3 + 1}{1 - 2x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 \cdot \left(-7 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \cdot \left(\frac{1}{x^3} - 2\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-7 + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3} - 2} = \frac{-7}{-2} = +\frac{7}{2}$$

K =

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 \cdot \left(4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \left(4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{-\infty \cdot 4}{2} = -\infty$$

L =

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^4 + 9x^7}{12x^8 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^7 \cdot \left(\frac{5}{x^3} + 9\right)}{x^8 \cdot \left(12 - \frac{1}{x^8}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{5}{x^3} + 9}{x \cdot \left(12 - \frac{1}{x^8}\right)} = \frac{9}{-\infty \cdot 12} = 0^-$$

Exercice 1, suite

M =

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-9}{(5-x)\cdot(x+3)} = \begin{cases} \to -\infty \text{ si } x\to 5^+ \\ \to +\infty \text{ si } x\to 5^- \end{cases}$$, donc la limite n'existe pas.

N =

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{(5-x)\cdot(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)\cdot(x+3)}{(5-x)\cdot(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{x-3}{5-x} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

O =

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{169x^{10}+13x^6+1}}{x^5+20} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^{10}\cdot\left(169+\frac{13}{x^4}+\frac{1}{x^{10}}\right)}}{x^5\cdot\left(1+\frac{20}{x^5}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^5\cdot\sqrt{169+\frac{13}{x^4}+\frac{1}{x^{10}}}}{x^5\cdot\left(1+\frac{20}{x^5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{169+\frac{13}{x^4}+\frac{1}{x^{10}}}}{1+\frac{20}{x^5}} = \sqrt{169} = 13$$

P =

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{169x^{10}+13x^6+1}}{x^5+20} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^{10}\cdot\left(169+\frac{13}{x^4}+\frac{1}{x^{10}}\right)}}{x^5\cdot\left(1+\frac{20}{x^5}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^5\cdot\sqrt{169+\frac{13}{x^4}+\frac{1}{x^{10}}}}{x^5\cdot\left(1+\frac{20}{x^5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{169+\frac{13}{x^4}+\frac{1}{x^{10}}}}{1+\frac{20}{x^5}} = -\sqrt{169} = -13$$

Remarquez que : $\sqrt{x^{10}} = \sqrt{\left(x^5\right)^2} = -x^5$, quand x est négatif !

Q =

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(a+h\right)^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^2+2a\cdot h+h^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot\left(2a+h\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\ 2a+h = 2a$$

R =

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\left(x-a\right)\cdot\left(x+a\right)}{x-a} = \lim_{x\to a}\ x+a = 2a$$

Remarquez qu'en substituant x par $(a+h)$ et $x\to a$ par $h\to 0$, on obtient l'exercice précédent.

S =

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(a+h\right)^3-a^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^3+3a^2\cdot h+3a\cdot h^2+h^3-a^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot\left(3a^2+3a\cdot h+h^2\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\ 3a^2+3a\cdot h+h^2 = 3a^2$$

T =

$$\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\left(x-a\right)\cdot\left[x^2+x\cdot a+a^2\right]}{x-a} = \lim_{x\to a}\ x^2+x\cdot a+a^2 = 3a^2$$

Remarquez qu'en substituant x par $(a+h)$ et $x\to a$ par $h\to 0$, on obtient l'exercice précédent.

Exercice 1, suite

U = $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}}{1} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{a-x}{x\cdot a}\cdot\dfrac{1}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{-(x-a)}{x\cdot a\cdot(x-a)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{-1}{x\cdot a} = -\dfrac{1}{a^2}$
V = $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}}{x-a}}{1} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^2-x^2}{x^2\cdot a^2}\cdot\dfrac{1}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(a-x)\cdot(a+x)}{x^2\cdot a^2\cdot(x-a)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{-(x-a)\cdot(a+x)}{x^2\cdot a^2\cdot(x-a)} =$ $= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{-(a+x)}{x^2\cdot a^2} = \dfrac{-(a+a)}{a^2\cdot a^2} = -\dfrac{2a}{a^4} = -\dfrac{2}{a^3}$
W = $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\dfrac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{a^3}}{x-a}}{1} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^3-x^3}{x^3\cdot a^3}\cdot\dfrac{1}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(a-x)\cdot(a^2+ax+x^2)}{x^3\cdot a^3\cdot(x-a)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{-(x-a)\cdot(a^2+ax+x^2)}{x^3\cdot a^3\cdot(x-a)} =$ $= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{-(a^2+ax+x^2)}{x^3\cdot a^3} = \dfrac{-(a^2+a^2+a^2)}{a^3\cdot a^3} = -\dfrac{3a^2}{a^6} = -\dfrac{3}{a^4}$
X = $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{(x-a)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{a}}$

Exercice 2

a. Remarquez que : $\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1-\frac{1}{8}$ etc.

On constate que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$, la somme se rapproche de plus en plus de 1. La tortue dépassera donc la distance de 0,99 km, mais elle n'atteindra jamais une distance de 1,00 km.

b. Remarquez que : $\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=1-\frac{1}{9}$ et $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}=1-\frac{1}{27}$ etc.

On constate que $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+...+\frac{2}{3^n}=1-\frac{1}{3^n}$, la somme se rapproche de plus en plus de 1. La tortue dépassera donc la distance de 0,99 km, mais elle n'atteindra jamais une distance de 1,00 km.

Exercice 3

A = par division polynomiale de $3x^3 - 10x^2 + 11x - 4$ par $x - 1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 10x^2 + 11x - 4}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x^2 - 7x + 4)\cdot(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} 3x^2 - 7x + 4 = 0$$

B =

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 10x^2 + 11x - 4}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x^2 - 7x + 4)\cdot(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x-4)\cdot(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} 3x - 4 = -1$$

C =

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 10x^2 + 11x - 4}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x^2 - 7x + 4)\cdot(x-1)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x-4)\cdot(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x-4}{x-1} = \begin{cases} \to -\infty \text{ si } x \to 1^+ \\ \to +\infty \text{ si } x \to 1^- \end{cases}$$ donc la limite n'existe pas !

D =

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 10x^2 + 11x - 4}{(x-1)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\cdot\left(3 - \frac{10}{x} + \frac{11}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3} = 3$$

E = par division polynomiale de $3x^3 - x^2 - x - 1$ par $x - 1$. C.f. ex. 1.7

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - x^2 - x - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x^2 + 2x + 1)\cdot(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} 3x^2 + 2x + 1 = 6$$

F =

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - x^2 - x - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x^2 + 2x + 1)\cdot(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x-1} = \begin{cases} \to +\infty \text{ si } x \to 1^+ \\ \to -\infty \text{ si } x \to 1^- \end{cases},$$

donc la limite n'existe pas !

G =

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - x^2 - x - 1}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x^2 + 2x + 1)\cdot(x-1)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2} = "\frac{6}{0^+}" = +\infty$$

H =

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3 - x^2 - x - 1}{(x-1)^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\cdot\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3} = 3$$

I =

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4}}{\frac{h}{1}} = \lim_{h\to 0} \frac{4 - (2+h)^2}{4\cdot(2+h)^2}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4 - (4 + 4h + h^2)}{4\cdot(2+h)^2}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-4h - h^2}{4\cdot(2+h)^2}\cdot\frac{1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h\cdot(4+h)}{4\cdot(2+h)^2\cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(4+h)}{4\cdot(2+h)^2} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$$

J =

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}}{\frac{x-2}{1}} = \lim_{x\to 2} \frac{4 - x^2}{x^2\cdot 4}\cdot\frac{1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)\cdot(2+x)}{x^2\cdot 4\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)\cdot(2+x)}{x^2\cdot 4\cdot(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-(2+x)}{x^2\cdot 4} = \frac{-(2+2)}{2^2\cdot 4} = -\frac{1}{4}$$

Remarquez qu'en substituant x par $(a + h)$ et $x \to a$ par $h \to 0$, on obtient l'exercice précédent.

Exercice 3, suite

K = $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-11x+9}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x-9)\cdot(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} 2x-9 = -7$
L = $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-11x+9}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x-9)\cdot(x-1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-9}{x-1} = \begin{cases} \to -\infty \text{ si } x\to 1^+ \\ \to +\infty \text{ si } x\to 1^- \end{cases}$, donc la limite n'existe pas.
M = $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{49x^6-2x^2+1}}{5x^3-x+3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^6\cdot\left(49-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^6}\right)}}{x^3\cdot\left(5-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x^3\cdot\sqrt{49-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^6}}}{x^3\cdot\left(5-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)} = -\dfrac{\sqrt{49}}{5} = -\dfrac{7}{5}$
N = $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-2x-15} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(x-3)\cdot(x-5)}{(x+3)\cdot(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-3}{x+3} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$
O = $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5x-8}{x^2-2x+7} = \dfrac{25-8}{25-10+7} = \dfrac{17}{22}$, c'est une limite immédiate.
P = $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(9x^3-5x\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^3\cdot\left(9-\dfrac{5}{x^2}\right) = -\infty\cdot 9 = -\infty$, c'est une limite quasi immédiate.
Q = $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x^3-2x^2+1}{2x^2-x+3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3\cdot\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\cdot\left(2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x\cdot\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = \dfrac{-\infty\cdot 4}{2} = -\infty$
R = $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\cdot\sqrt{x}+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}+1 = 2$
S = $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-3x-x^2}{3x-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-1\right)}{x\cdot\left(3-\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-1\right)}{3-\frac{1}{x}} = \dfrac{-\infty\cdot(-1)}{3} = +\infty$
T = $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-3x+1}{(x+1)\cdot(3x-1)} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-3x+1}{3x^2+2x-1} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2\cdot\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{3}$