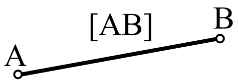
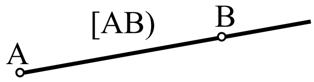
Corrigé : I. Quelques rappels de géométrie

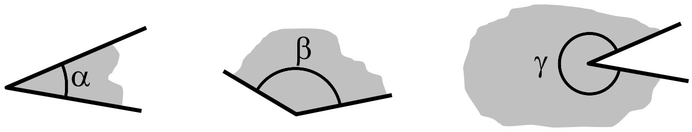
Un **segment de droite** est la portion de droite limitée par deux points.
On notera **[AB]** le segment de droite limitée par les deux points A et B.



Une **demi-droite** est une portion de droite limitée par un point.
On notera **[AB)** la demi-droite limitée par le point A, passant par le point B.



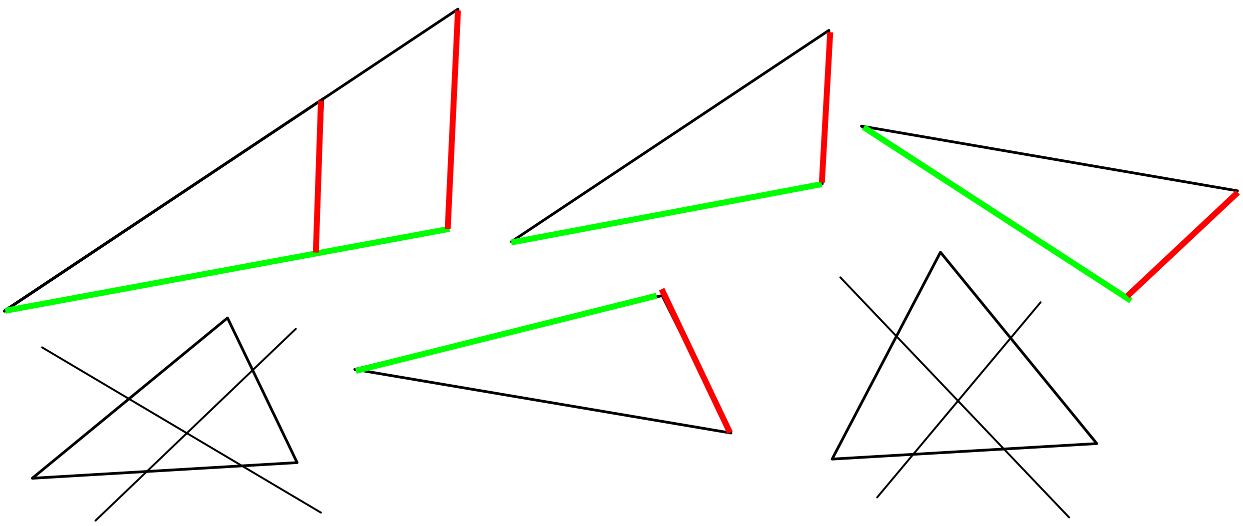
Les extrémités d'un segment de droite et l'extrémité d'une demi-droite sont appelées **sommets**.
A et B sont les **sommets** du segment [AB].
A est le **sommet** de la demi-droite [AB).



Un **angle** est une portion de plan limitée par deux demi-droites de même sommet.
Il se mesure en **degré**, qui est basé sur une subdivision d'un disque en 360 angles de même grandeur.

Deux triangles sont **semblables** s'ils ont trois angles respectivement égaux. (deux angles égaux suffisent)
Les côtés joignant les angles de même valeur sont dits **homologues**.

<u>Exercice I.1</u>
Parmi les sept triangles ci-dessous, éliminez ceux qui ne sont pas semblable à un autre.
Dessinez d'une même couleur les côtés homologues des triangles semblables.

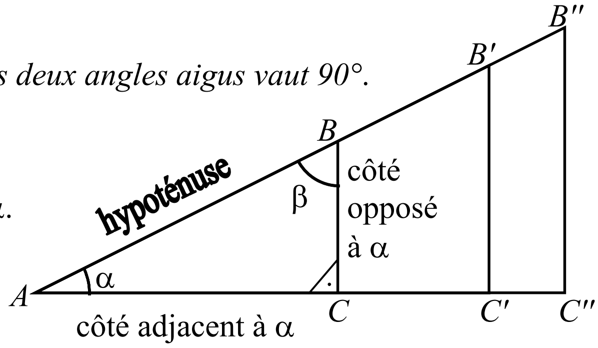


<u>Théorème de Thalès :</u>
Le théorème de Thalès dit que :

Si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles semblables, alors : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC}$.

Rappelons que *la somme des angles d'un triangle vaut 180°.*
En particulier, *dans un triangle rectangle, la somme* $\alpha + \beta$ *des deux angles aigus vaut 90°.*

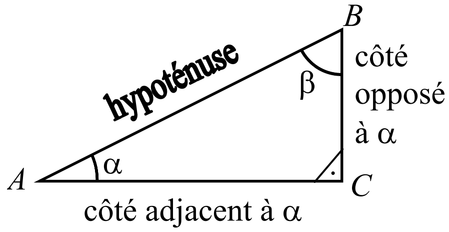
En conséquences, dans un triangle rectangle, les rapports
$\dfrac{BC}{AB}$; $\dfrac{AC}{AB}$ et $\dfrac{BC}{AC}$ ne dépendent que de la mesure l'angle α.
Cette remarque permet les définitions de la page suivante.



Complétez...

$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{B'C'}{AB'} = \dfrac{B"C"}{AB"}$ $\qquad$ $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AC'}{AB'} = \dfrac{AC"}{AB"}$ $\qquad$ $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{B'C'}{AC'} = \dfrac{B"C"}{AC"}$

Corrigé : II. Rappels de trigonométrie dans un triangle rectangle



Conventions :
ABC désignera les sommets d'un triangle rectangle.
L'angle de sommet C sera l'angle droit.
α désignera la mesure de l'angle de sommet A.
β désignera la mesure de l'angle de sommet B.

Définitions :
Le plus long côté du triangle rectangle s'appelle : **l'hypoténuse**

Les autres côtés du triangle rectangle s'appellent : **les cathètes**

Le **côté** **adjacent** à α est le côté $[AC]$.

Le **côté** **opposé** à α est le côté $[BC]$.

Le **côté** **opposé** à β est le côté $[AC]$.

Le **côté** **adjacent** à β est le côté $[BC]$.

Les trois côtés sont reliés par la formule : $AC^2 + BC^2 = AB^2$ par le théorème de Pythagore.

Selon le théorème de Thalès, les rapports $\frac{BC}{AB}$; $\frac{AC}{AB}$; $\frac{BC}{AC}$ ne dépendent que de l'angle α.

sin(α) $= \dfrac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$ On dit : "**Sinus** de alpha"

cos(α) $= \dfrac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$ On dit : "**Cosinus** de alpha"

tan(α) $= \dfrac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha}$ On dit : "**Tangente** de alpha"

Truc mnémotechnique pour s'en souvenir :

"**sin op ip**" signifie : **sinus égale côté opposé sur hypoténuse**

"**cos adj ip**" signifie : **cosinus égale côté adjacent sur hypoténuse**

"**tan op adj**" signifie : **tangente égale côté opposé sur côté adjacent**

Fonctions réciproques :
Si on connaît les longueurs des côtés du triangle rectangle, on peut déterminer les angles comme suit :

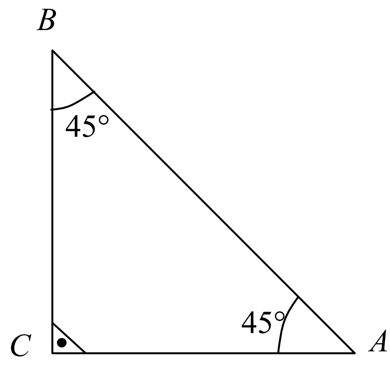
$\alpha = \mathbf{arcsin}\left(\frac{BC}{AB}\right) = \mathbf{sin}^{-1}\left(\frac{BC}{AB}\right)$ sur la calculatrice. On dit : "**arc sinus** de **BC** sur **AB** "

$\alpha = \mathbf{arccos}\left(\frac{AC}{AB}\right) = \mathbf{cos}^{-1}\left(\frac{AC}{AB}\right)$ sur la calculatrice. On dit : "**arc cosinus** de **AC** sur **AB** "

$\alpha = \mathbf{arctan}\left(\frac{BC}{AC}\right) = \mathbf{tan}^{-1}\left(\frac{BC}{AC}\right)$ sur la calculatrice. On dit : "**arc tangente** de **BC** sur **AC** "

Exercice II.2

En raisonnant sur les triangles suivants, déterminez les valeurs exactes de $\sin(\alpha)$; $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ pour les angles α de 30° ; 45° et 60°



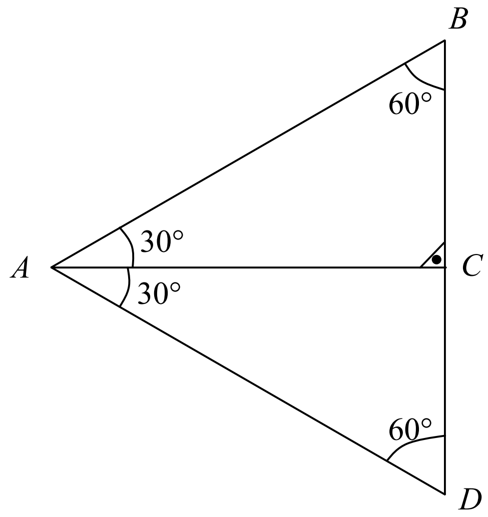
AC = BC et

par Pythagore :

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2 \cdot AC^2} = \sqrt{2} \cdot AC$$

$$\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(45°) = \frac{\sin(45°)}{\cos(45°)} = 1$$



Le triangle ABD est équilatéral, donc BD = AB.

La longueur BC = 0,5 · BD = 0,5 · AB.

Donc $\sin(30°) = \frac{BC}{AB} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

Par Pythagore :

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \sqrt{\frac{3}{4}AB^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB$$

Donc $\cos(30°) = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan(30°) = \frac{\sin(30°)}{\cos(30°)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

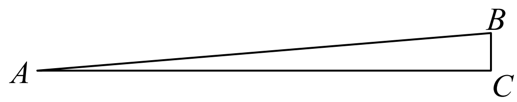
$$\cos(60°) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(60°) = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(60°) = \frac{\sin(60°)}{\cos(30°)} = \sqrt{3}$$

Exercice II.3

Par une extension naturelle, il est raisonnable de définir les valeurs ci-dessous.
Donnez ces valeurs avec des justifications.



$\sin(\ 0°) = 0$ $\quad$ $\sin(90°) = 1$

$\cos(\ 0°) = 1$ $\quad$ $\cos(90°) = 0$

$\tan(\ 0°) = 0$ $\quad$ Pourquoi $\tan(90°)$ n'est-il pas défini ?

Tan(90°) n'est pas défini, car on ne peut pas diviser par 0.

Si $\alpha \approx 0°$, alors $BC \approx 0$ et $AC \approx AB$.

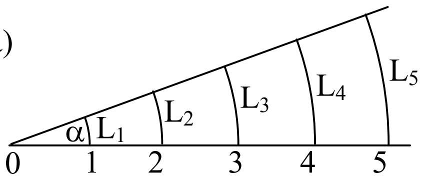
Si $\alpha \approx 90°$, alors $BC \approx AB$ et $AC \approx 0$.

Exercice III.1

Mesurez avec un rapporteur les grandeurs des angles ci-dessous.
Déterminez les longueurs d'arcs L_1 ; L_2 ; L_3 ; L_4 ; L_5 ci-dessous, et dans chaque cas le rapport de la longueur d'arc sur la longueur du rayon du cercle correspondant.
Ecrivez vos résultats avec 3 chiffres après la virgule. Les longueurs sont en [cm].

Cet exercice montre une **manière naturelle** de définir la grandeur d'un angle. Laquelle ?

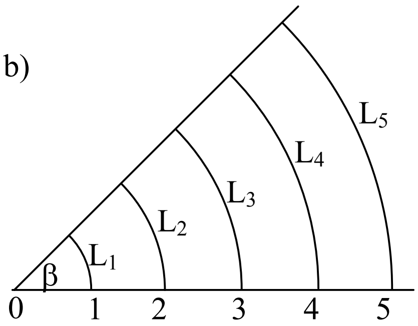
a)



$\alpha \approx 20°$

$L_1 \approx 0{,}349$	$L_1 / 1 \approx 0{,}349$
$L_2 \approx 0{,}698$	$L_2 / 2 \approx 0{,}349$
$L_3 \approx 1{,}047$	$L_3 / 3 \approx 0{,}349$
$L_4 \approx 1{,}396$	$L_4 / 4 \approx 0{,}349$
$L_5 \approx 1{,}745$	$L_5 / 5 \approx 0{,}349$

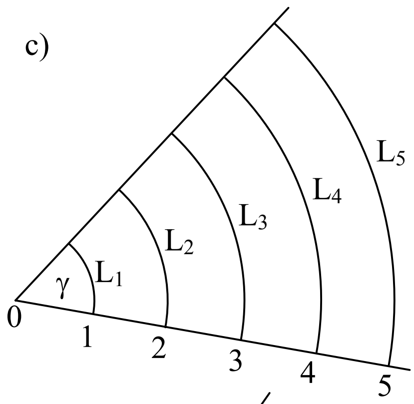
b)



$\beta \approx 45°$

$L_1 \approx 0{,}785$	$L_1 / 1 \approx 0{,}785$
$L_2 \approx 1{,}571$	$L_2 / 2 \approx 0{,}785$
$L_3 \approx 2{,}356$	$L_3 / 3 \approx 0{,}785$
$L_4 \approx 3{,}142$	$L_4 / 4 \approx 0{,}785$
$L_5 \approx 3{,}927$	$L_5 / 5 \approx 0{,}785$

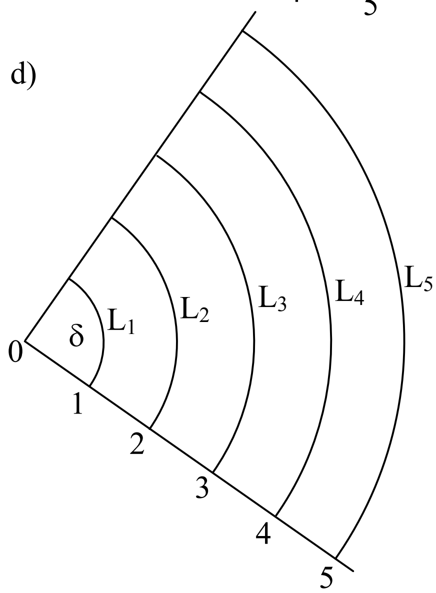
c)



$\gamma \approx 57{,}3°$

$L_1 = \mathbf{1{,}000}$	$L_1 / 1 = 1{,}000$
$L_2 = 2{,}000$	$L_2 / 2 = 1{,}000$
$L_3 = 3{,}000$	$L_3 / 3 = 1{,}000$
$L_4 = 4{,}000$	$L_4 / 4 = 1{,}000$
$L_5 = 5{,}000$	$L_5 / 5 = 1{,}000$

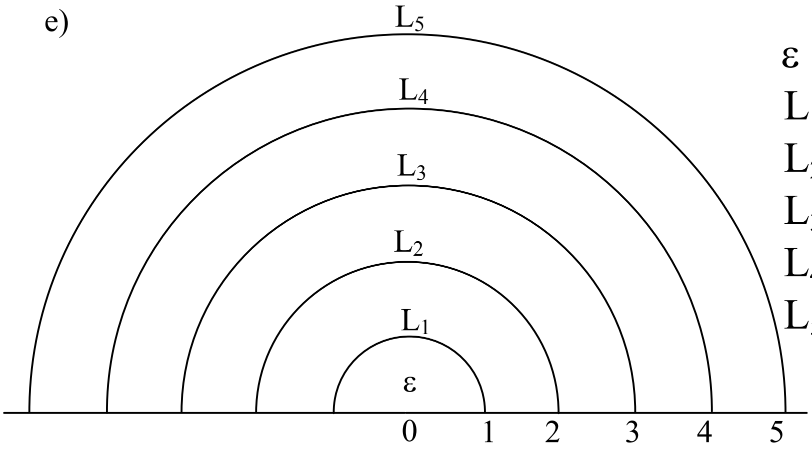
d)



$\delta = \mathbf{90°}$

$L_1 = \pi / 2$	$L_1 / 1 = \pi / 2$
$L_2 = 2\pi / 2$	$L_2 / 2 = \pi / 2$
$L_3 = 3\pi / 2$	$L_3 / 3 = \pi / 2$
$L_4 = 4\pi / 2$	$L_4 / 4 = \pi / 2$
$L_5 = 5\pi / 2$	$L_5 / 5 = \pi / 2$

e)



ε = **180°**

$L_1 = \pi$	$L_1 / 1 = \pi$
$L_2 = 2\pi$	$L_2 / 2 = \pi$
$L_3 = 3\pi$	$L_3 / 3 = \pi$
$L_4 = 4\pi$	$L_4 / 4 = \pi$
$L_5 = 5\pi$	$L_5 / 5 = \pi$

Cet exercice montre une **manière naturelle** de définir la grandeur d'un angle. Laquelle ?

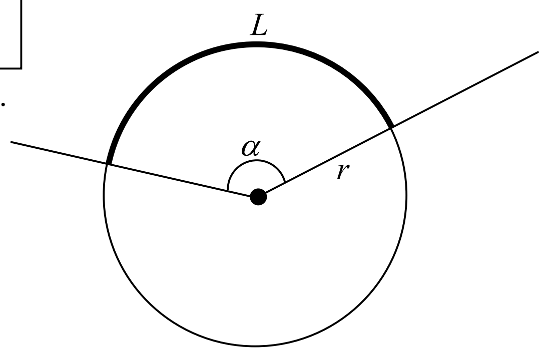
On remarque que le rapport $\dfrac{L}{r}$ est indépendant du rayon r !

Au lieu de définir un angle en degrés, on peut définir un angle par le rapport $\dfrac{L}{r}$ vu ci-dessus.

Définition :

Le **radian** est une unité de mesure d'angle : $\boxed{\text{angle} = \dfrac{L}{r}\ [\text{radians}]}$

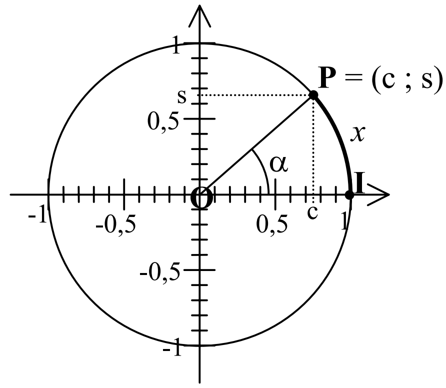
r = la longueur du rayon d'un cercle centré au sommet de l'angle.
L = la longueur de l'arc qui est intercepté par l'angle.



Nous avons constaté que, pour un angle donné, le rapport $\dfrac{L}{r}$ est indépendant du rayon r choisi. En particulier :

$\boxed{\textbf{Si } r = \textbf{1 unité, alors l'angle en radians = } L.}$

Corrigé : III. L'unité "radian" et le cercle trigonométrique



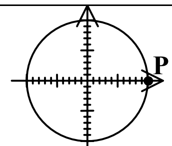
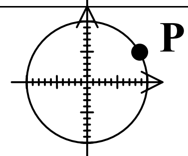
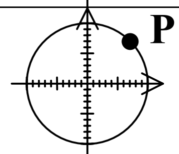
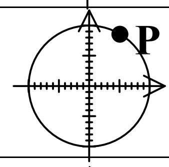
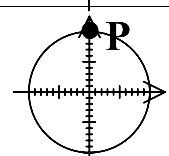
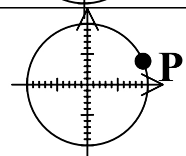
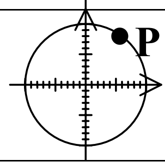
Considérons un point **P** sur le cercle de rayon 1, centré à l'origine.
Notons **O** le centre du cercle, et **I** le point de coordonnées (1 ; 0).
Ce point **P** peut être déterminé de différentes manières.

i) Par ses coordonnées, que nous noterons (c ; s).

ii) Par la grandeur de l'angle $\widehat{IOP}$, que nous noterons α en degrés.

iii) Par la longueur x de l'arc de cercle intercepté par l'angle $\widehat{IOP}$.
On a vu que x = l'angle $\widehat{IOP}$ exprimé en **radians**.

Complétez le tableau suivant :

α	x	c	s	dessin de **P**
0°	0	1	0	
30°	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin(30°) = \dfrac{1}{2}$	
45°	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	
60°	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	
90°	$\dfrac{\pi}{2}$	0	1	
20°	$\dfrac{\pi}{9}$	cos(20°)	sin(20°)	
57,3°	$\dfrac{57{,}3}{180}\cdot\pi \approx 1$	cos(57,3°)	sin(57,3°)	
α°	$\dfrac{\alpha}{180}\cdot\pi$	cos(α°)	sin(α°)	
$\dfrac{x}{\pi}\cdot 180°$	x	$\cos\left(\dfrac{x}{\pi}\cdot 180°\right)$	$\sin\left(\dfrac{x}{\pi}\cdot 180°\right)$	

Quels liens constatez-vous entre α ; x ; c et s ?

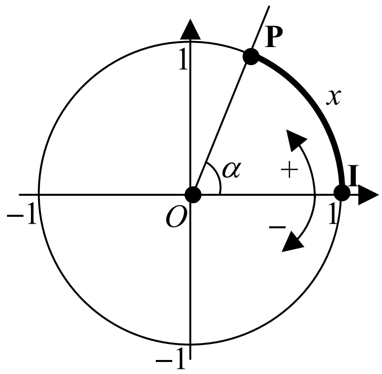
Les deux dernières lignes ci-dessus donnent les liens entre :

- L'angle α exprimé en degrés et l'angle x exprimé en radians. $\boxed{x = \dfrac{\pi}{180}\cdot\alpha}$ et $\boxed{\alpha = \dfrac{180}{\pi}\cdot x}$
- c = cos(α°)
- s = sin(α°)

Remarquez que l'exercice qui précède montre que pour des angles α entre 0° et 90°,
la premère coordonnée du point **P** égale $\cos(\alpha)$ et que
la deuxième coordonnée du point **P** égale $\sin(\alpha)$.

Avant de passer à la généralisation des définitions des fonctions trigonométriques, les deux définitions suivantes sont nécessaires.

Définitions :
Le **cercle trigonométrique** est le cercle de rayon 1, centré à l'origine.



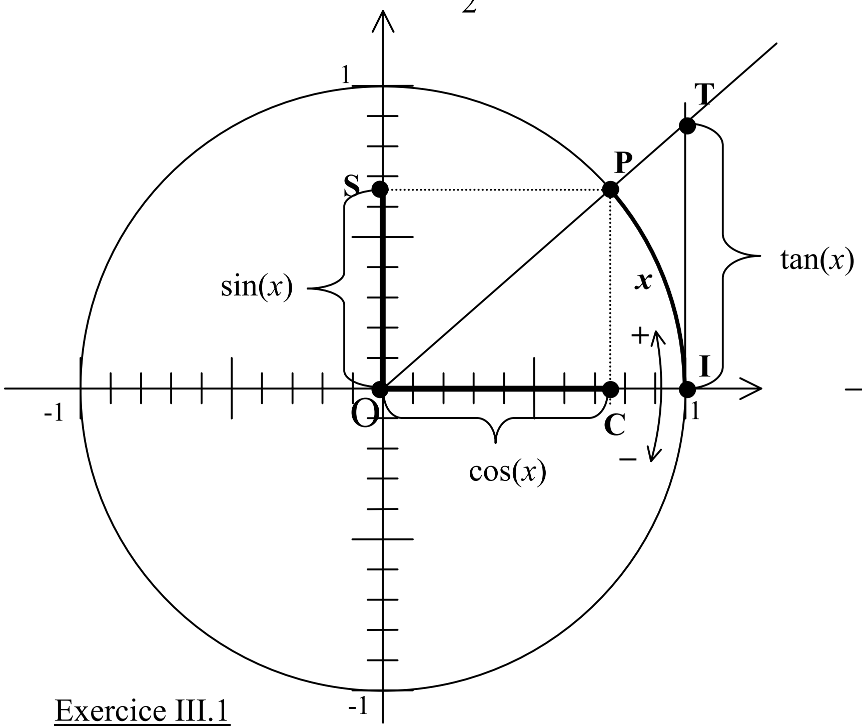
L'abscisse curviligne x d'un point **P** sur le cercle trigonométrique est la distance à parcourir le long du cercle, en partant du point **I** = (1 ; 0), pour arriver au point **P**. Elle est comptée positivement quand on se déplace dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, négativement quand on se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre.
Elle coïncide avec la mesure de l'angle $\widehat{\text{IOP}}$ exprimée en **radians**.

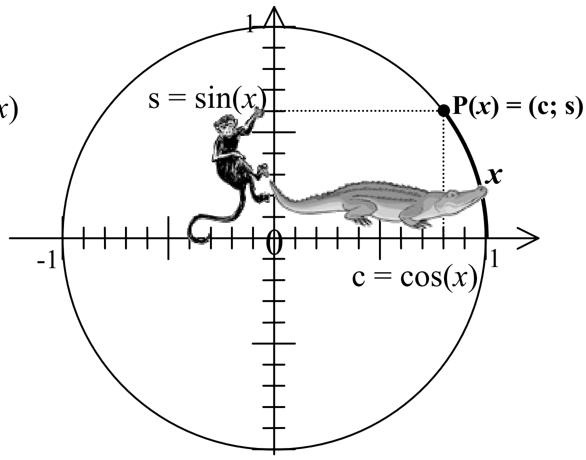
Généralisation des définitions des fonctions trigonométriques.
La **fonction Cosinus** est définie par : $\mathbf{cos} : \mathbb{R} \to [-1 ; 1]$
$\mathbf{cos}(x) =$ *la première coordonnée* du point **P** d'abscisse curviligne x.

La **fonction Sinus** est définie par : $\mathbf{sin} : \mathbb{R} \to [-1 ; 1]$
$\mathbf{sin}(x) =$ *la deuxième coordonnée* du point **P** d'abscisse curviligne x.

La **fonction Tangente** est définie par : $\mathbf{tan} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \mathbf{tan}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Elle n'est pas définie pour $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, où $k \in \mathbb{Z}$





Truc mnémotechnique :

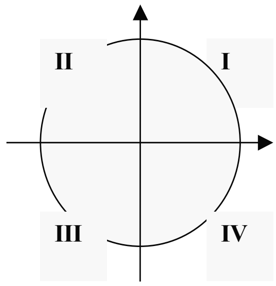
s = le **s̲inge** qui grimpe

c = le **c̲rocodile** qui rampe

Exercice III.1
Montrez que la longueur **IT** notée $\tan(x)$ correspond bien à la tangente de l'angle x.

Par Thalès : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{CP}{OC} = \dfrac{IT}{OI} = IT.$

Les quatre quadrants du cercle trigonométrique sont :



Exercice IV.1 :

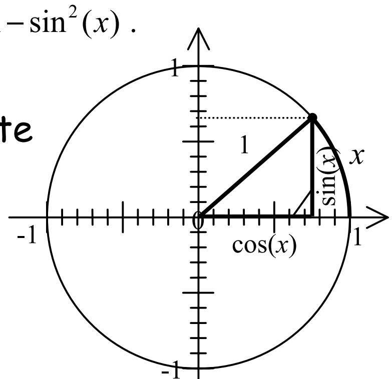
Montrez que la relation $\boxed{\sin^2(x)+\cos^2(x)=1}$ est toujours vraie, quelle que soit la valeur de x.

Remarquez qu'on en déduit que : $\sin(x)=\pm\sqrt{1-\cos^2(x)}$ et $\cos(x)=\pm\sqrt{1-\sin^2(x)}$.

Par Pythagore, sin(x) = la longueur d'une cathète d'un triangle rectangle, cos(x) = la longueur de l'autre cathète et le diamètre est de longueur 1, donc

$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1^2$

$\sin^2(x)$ est une autre écriture pour $(\sin(x))^2$.



Exercice IV.2 :

Remplissez le tableau suivant en indiquant le signe de cos(x), sin(x) et tan(x) suivant le quadrant dans lequel se trouve le point P(x) d'abscisse curviligne x :

signe	I	II	III	IV
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tan	+	–	+	–

Exercice IV.3 :

Complétez le tableau suivant en écrivant les valeurs exactes.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\alpha(x)$ en °	0°	30°	45°	60°	90°
sin(x)	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
cos(x)	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$
tan(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

La page suivante permet de répondre à la question suivante :

"Comment évaluer les fonctions trigonométriques en des valeurs non comprises entre 0 et $\pi/2$?"

Convention de couleurs : (utile au tableau noir)

Noir : l'angle exprimé en degré. Désigné par une lettre grecque α ; β ; γ ; ... (Noir = Blanc au tableau noir)

Jaune : l'angle exprimé en radian. Désigné par x ; y ou z.

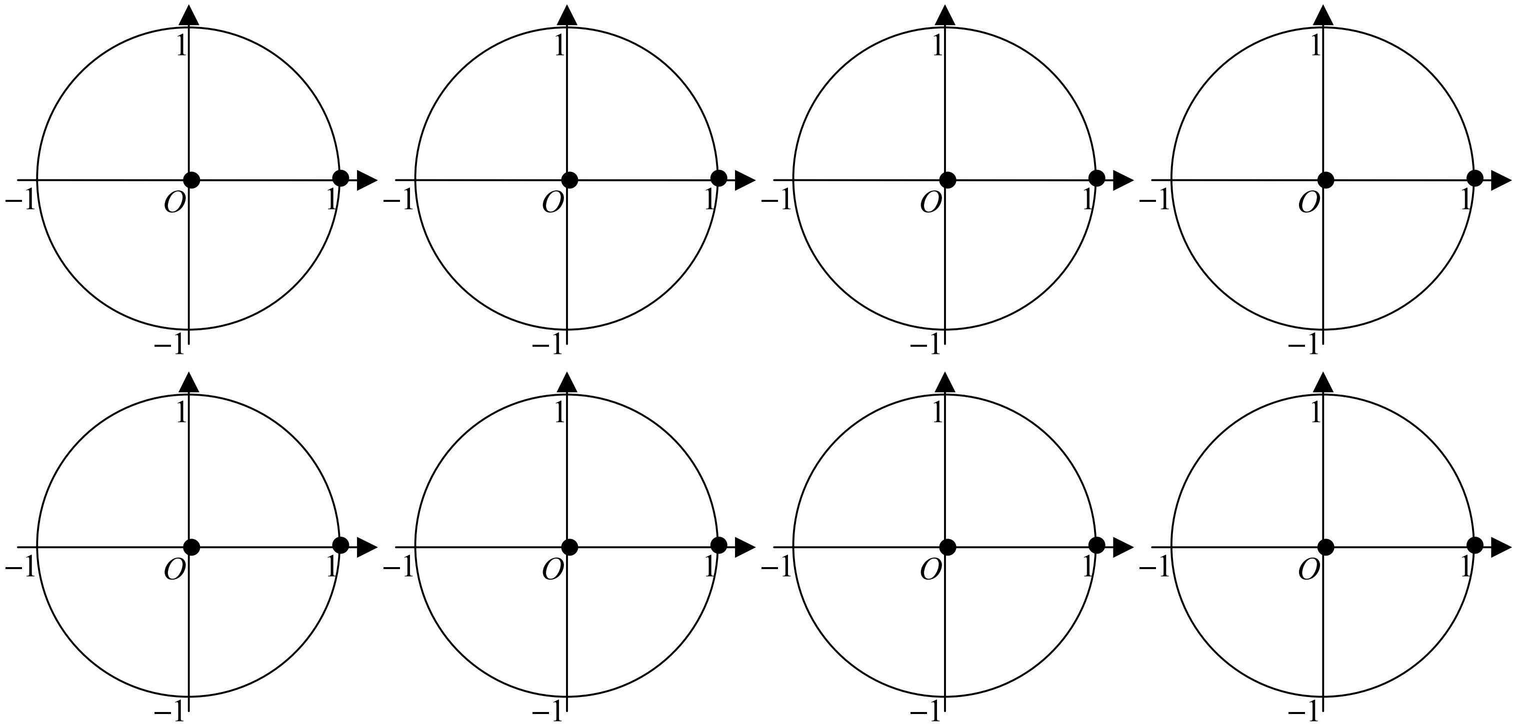
Vert : le cosinus. C'est la couleur du crocodile et de la plaine horizontale.

Rouge : le sinus. C'est la couleur de certains singes et du feu qui monte.

Orange : la tangente. Orange ou brun est plus ou moins un mélange de rouge et vert.

<u>Exercice IV.4 :</u>

En dessinant et raisonnant sur des cercles trigonométriques, complétez les égalités suivantes avec $\cos(x)$, $\sin(x)$ ou leur opposé.



$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$	$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
$\cos(x - 2\pi) = \cos(x)$	$\sin(x - 2\pi) = \sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$	$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
$\cos(x - \pi) = -\cos(x)$	$\sin(x - \pi) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$	$\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$
$\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$	$\sin(x - \pi/2) = -\cos(x)$
$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$	$\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

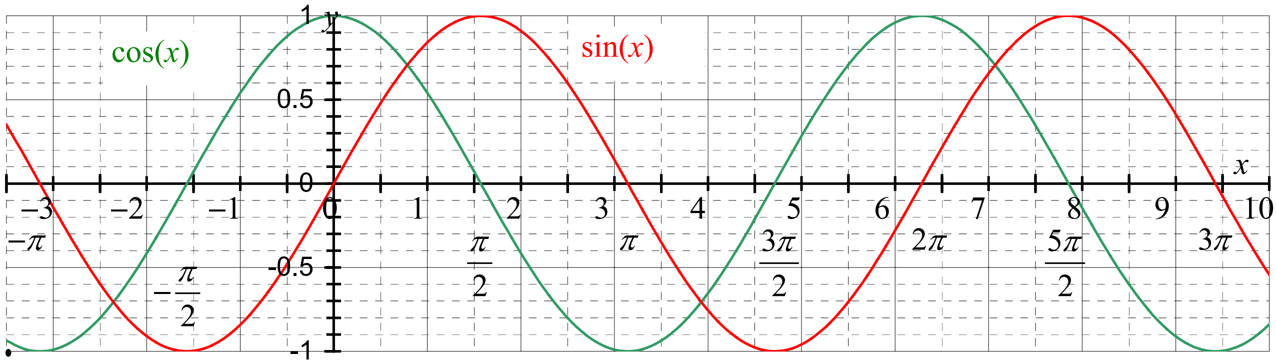
Complétez en écrivant à droite des égalités suivantes des expressions avec $\tan(x)$, son opposé, son inverse ou l'opposé de son inverse.

$\tan(x + 2\pi) = \tan(x)$	$\tan(x - 2\pi) = \tan(x)$
$\tan(x + \pi) = \tan(x)$	$\tan(x - \pi) = \tan(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
$\tan(x + \pi/2) = -1 / \tan(x)$	$\tan(x - \pi/2) = -1 / \tan(x)$
$\tan(\pi/2 - x) = 1 / \tan(x)$	

Dans le graphique suivant, placez les abscisses $x = -\pi$; $x = -\pi/2$; $x = \pi/2$; $x = \pi$; $x = 3\pi/2$; $x = 2\pi$; $x = 2{,}5\pi$; $x = 3\pi$.

1) Evaluez la fonction **cosinus** en ces valeurs et représentez-la sur le graphique.

2) Faites de même pour la fonction **sinus**.



Complétez :

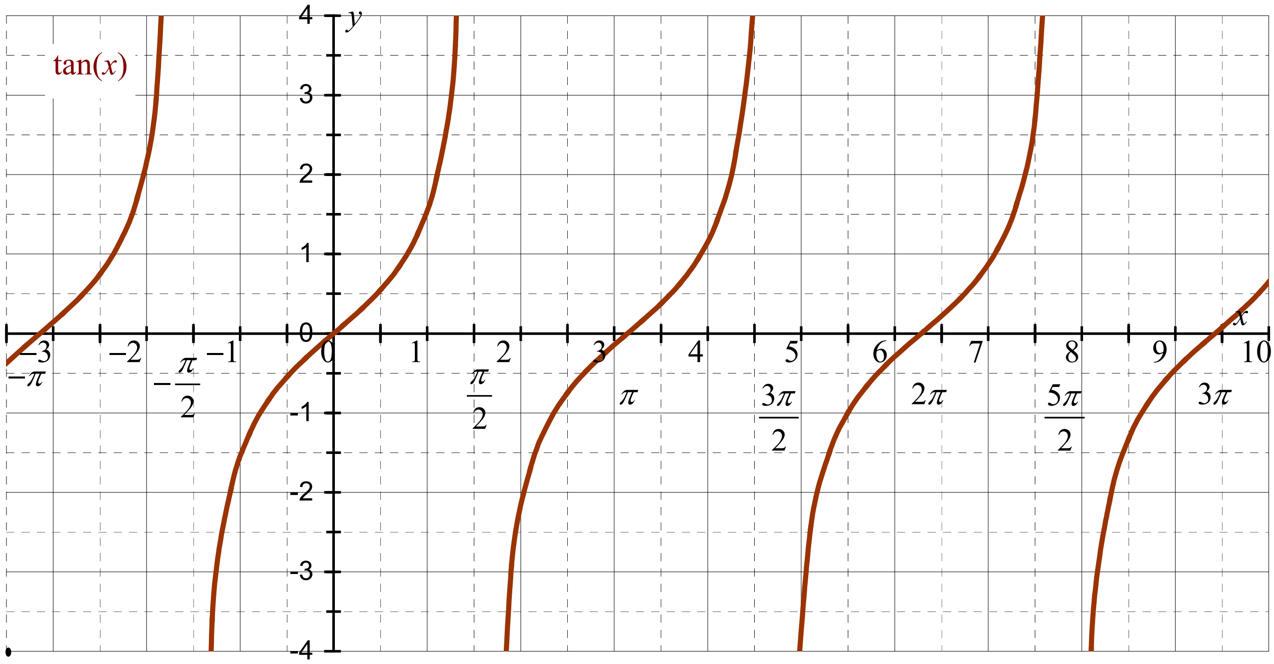
$\mathrm{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$ $\mathrm{Dom}(\sin) = \mathbb{R}$

$\text{Zéros}(\cos) = \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ $\text{Zéros}(\sin) = \left\{ x = k\cdot\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Puisque $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, on dit que les fonctions sinus cosinus sont **périodiques**, de **période 2π**.

Dans le graphique suivant, placez les abscisses $x = -\pi$; $x = -\pi/2$; $x = \pi/2$; $x = \pi$; $x = 3\pi/2$; $x = 2\pi$; $x = 2{,}5\pi$; $x = 3\pi$.

Evaluez (si possible) la fonction **tangente** en ces valeurs et représentez-la sur le graphique.



Complétez :

$\mathrm{Dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

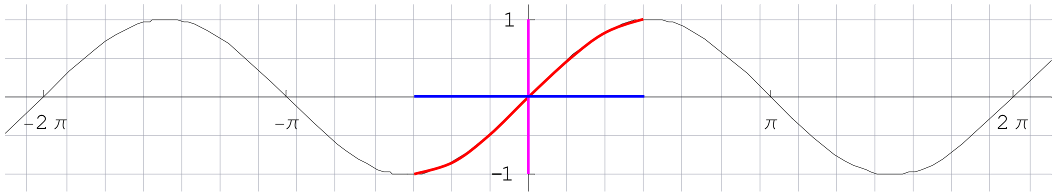
$\text{Zéros}(\tan) = \left\{ x = k\cdot\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Puisque $\tan(x + \pi) = \tan(x)$, on dit que la fonction tangente est **périodique**, de **période** π.

Corrigé : VI. Fonctions trigonométriques inverses

Le but de ce chapitre est de répondre aux trois questions suivantes :
1) Etant donné un nombre y entre -1 et 1, comment trouver une valeur x telle que $\sin(x) = y$?
2) Etant donné un nombre y entre -1 et 1, comment trouver une valeur x telle que $\cos(x) = y$?
3) Etant donné un nombre réel y, comment trouver une valeur x telle que $\tan(x) = y$?

Voici une représentation graphique de la fonction **sinus** :



$\sin : \mathbb{R} \to [-1;1]$

Exercice VI.1 :

a) Déterminez un intervalle de l'axe des abscisses de telle sorte que chaque nombre de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ possède exactement une et une seule préimage.

Sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, chaque nombre de l'intervalle [-1 ; 1] possède exactement une seule préimage.

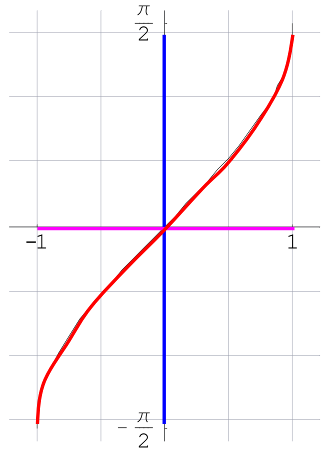
b) Colorez l'un de ces intervalles sur le repère ci-dessus, ainsi que la courbe et l'ensemble image correspondants.

Définition :
La fonction **arc sinus** est définie comme suit :
arcsin : $[-1\ ;\ 1] \to [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$

$y \mapsto x$ tel que $\sin(x) = y$; $x \in [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$

Donc : $\boxed{\arcsin(y) = x \iff y = \sin(x), \text{ pour } x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$

Beaucoup de calculatrices affichent "$\mathbf{sin}^{-1}$" au lieu de "arcsin".



$\arcsin : [-1;1] \to [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$

Exercice VI.2 :
Calculez les valeurs suivantes :

a) $\arcsin(0) = 0$

b) $\arcsin(0{,}5) = \pi / 6 \approx 0{,}523598776$

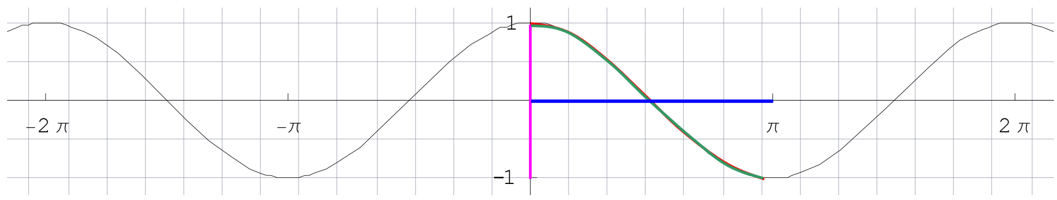
c) $\arcsin(-0{,}5) = -\pi / 6 \approx -0{,}523598776$

d) $\arcsin(1) = \pi / 2 \approx 1{,}570796327$

e) $\arcsin(-0{,}8) \approx -0{,}927295218$

f) $\arcsin(0{,}9) \approx 1{,}119769515$

Voici une représentation graphique de la fonction **cosinus** :



$\cos : \mathbb{R} \to [-1;1]$

Exercice VI.3 :

a) Déterminez un intervalle de l'axe des abscisses de telle sorte que chaque nombre de l'intervalle [–1 ; 1] possède exactement une et une seule préimage.

Sur l'intervalle $[0;\pi]$, chaque nombre de l'intervalle [-1 ; 1] possède exactement une seule préimage.

b) Colorez l'un de ces intervalles sur le repère ci-dessus, ainsi que la courbe et l'ensemble image correspondants.

Définition :

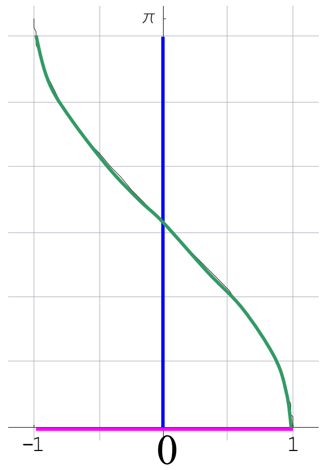
La fonction **arc cosinus** est définie comme suit :

arccos : $[-1\,;\,1] \to [0\,;\pi]$

$y \quad \mapsto \quad x$ tel que $\cos(x) = y$; $x \in [0\,;\pi]$

Donc : $\boxed{\arccos(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \cos(x), \quad \text{pour} \quad x \in [0\,;\pi]}$

Beaucoup de calculatrices affichent "$\mathbf{cos}^{-1}$" au lieu de "arccos".



$\arccos : [-1;1] \to [0\,;\pi]$

Exercice VI.4 :

Calculez les valeurs suivantes :

a) arccos(0) = **π / 2 ≈ 1,570796327**

b) arccos(0,5) = **π / 3 ≈ 1,047197551**

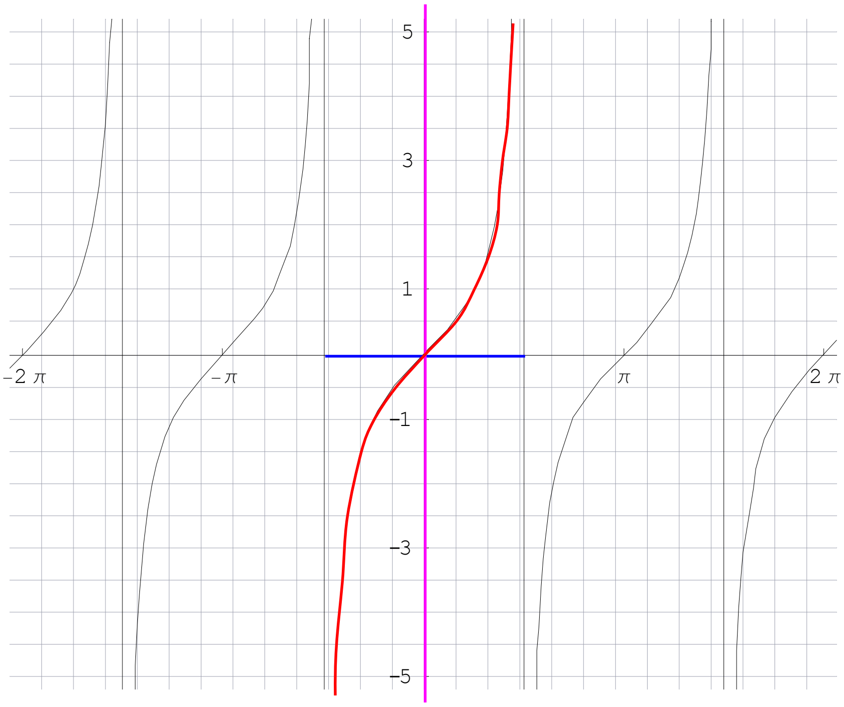
c) arccos(–0,5) = **2π / 3 ≈ 2,094395102**

d) arccos(1) = **0**

e) arccos(–0,8) ≈ **2,498091545**

f) arccos(0,9) ≈ **0,451026812**

Finalement une représentation graphique de la fonction **tangente** :



$\tan : \mathbb{R} \setminus \{ \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$

Exercice VI.5 :

a) Déterminez un intervalle de l'axe des abscisses de telle sorte que chaque nombre réel possède exactement une et une seule préimage.

Sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, chaque nombre réel possède exactement une seule préimage.

b) Colorez l'un de ces intervalles sur le repère ci-dessus, ainsi que la courbe et l'ensemble image correspondants.

Définition :

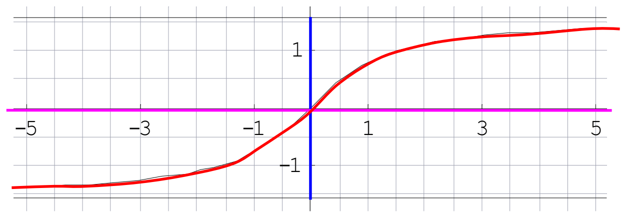
La fonction **arc tangente** est définie comme suit :

arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$

$y \mapsto x$ tel que $\tan(x) = y$; $x \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$

Donc : $\boxed{\arctan(y) = x \iff y = \tan(x),\ \text{pour}\ x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}$

Beaucoup de calculatrices affichent "**tan**$^{-1}$" au lieu de "arctan".



$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$

Exercice VI.6 :

Calculez les valeurs suivantes :

a) $\arctan(0) = 0$

b) $\arctan(1) = \pi / 4 \approx 0{,}785398163$

c) $\arctan(-3) \approx -1{,}249045772$

d) $2\cdot\arctan(100) \approx 3{,}12159332$

e) $2\cdot\arctan(-10'000) \approx -3{,}141392654 \approx \pi$

Corrigé : VII. Fonctions sinusoïdales

Définition :
Une fonction sinusoïdale est une fonction réelle du type : $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$, où A, ω et φ sont trois nombres.
ω se lit "**oméga**", φ se lit "**phi**".

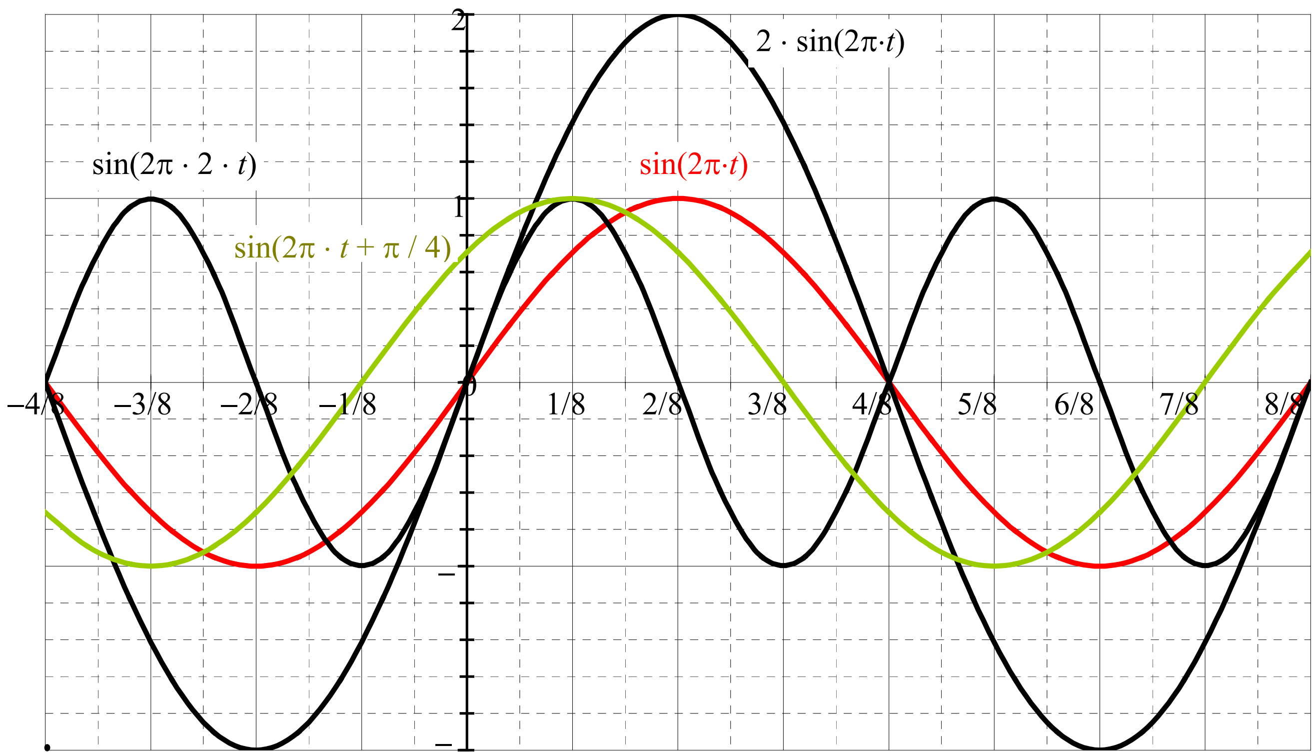
De nombreux phénomènes physiques et chimiques se modélisent à l'aide de fonctions sinusoïdales. Par exemple, la position en fonction du temps d'une corde d'un instrument de musique suit généralement une fonction sinusoïdale. On préfère écrire : $f(t) = A \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t + \varphi)$. ν se lit "**nu**".
On utilise t au lieu de x, pour une fonction qui dépend du temps.
On utilise $2\pi\nu$ au lieu de ω, car il est plus simple de décrire l'influence de ν.

Clairement, la fonction sinus est une fonction sinusoïdale. Il suffit de prendre :
$A = 1$, $\omega = 1$ c'est-à-dire $\nu = \dfrac{1}{2\pi}$ et $\varphi = 0$.

Exercice VII.1 : La fonction cosinus est-elle une fonction sinusoïdale ?

cos(x) = sin(x + π / 2), donc la fonction cosinus est une fonction sinusoïdale.
A = 1, ω = 1 et φ = π / 2.

Exercice VII.2 : Dessinez le graphe des quatre fonctions suivantes.
$f(t) = \sin(2\pi \cdot t)$ $g(t) = 2 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$ $h(t) = \sin(2\pi \cdot 2 \cdot t)$ $j(t) = \sin(2\pi \cdot t + \pi / 4)$

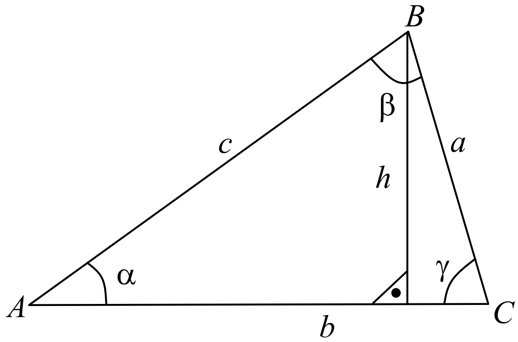


Exercice VII.3 : Quelle est l'influence des trois paramètres A, ν et φ ?
A s'appelle **l'amplitude**, ν **la fréquence**, φ **la phase**. (T = $1/\nu$ s'appelle *la période*)

L'amplitude A influence l'amplitude d'oscillation.
La fréquence ν influence le nombre d'oscillations par seconde.
La phase φ influence le décalage horizontal de la sinusoïde.

Corrigé : VIII. Le théorème du sinus

Considérons un triangle ABC quelconque.



Cherchons une relation qui relie les longueurs a et c aux deux l'angles α et γ.

1) Exprimez h en fonction de c et du sinus de α.

$h = \sin(\alpha) \cdot c$

2) Exprimez h en fonction de a et du sinus de γ.

$h = \sin(\gamma) \cdot a$

3) En éliminant l'inconnue h des deux égalités précédentes, vous obtenez une relation entre a, c, α et γ.

Donc

$\sin(\alpha) \cdot c = \sin(\gamma) \cdot a$

4) Ecrivez cette relation en mettant a et α d'un côté de l'égalité et c et γ de l'autre côté.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

5) Trouvez une relation correspondante entre a, α, b et β.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$ se trouve de la même manière.

6) Les deux relations s'appellent "**le théorème du sinus**". Ecrivez-les dans le cadre ci-dessous.

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

Remarquez qu'il est insuffisant de connaître le sinus s d'un angle α d'un triangle, pour en déterminer l'angle α. Il reste deux possibilités : soit $\alpha = \arcsin(s)$, soit $\alpha = 180° - \arcsin(s)$.

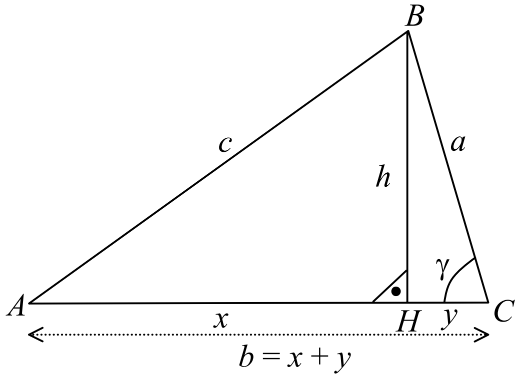
En étudiants les côtés du triangle on peut conclure.

Si $a^2 < b^2 + c^2$, alors $\alpha < 90°$ ($\alpha \in 1^{er}$ quadrant), donc $\alpha = \arcsin(s)$.

Si $a^2 > b^2 + c^2$, alors $\alpha > 90°$ ($\alpha \in 2^{ème}$ quadrant), donc $\alpha = 180° - \arcsin(s)$.

Corrigé : IX. Le théorème du cosinus

Considérons un triangle ABC quelconque.
$x = AH$, $y = HC$, les autres longueurs sont assez explicites, j'espère.



Cherchons une relation qui relie les longueurs a, b, c des trois côtés à l'angle γ.

1) A l'aide du théorème de Pythagore, exprimez c^2 en fonction de x^2 et h^2.
$c^2 = x^2 + h^2$

2) A l'aide du théorème de Pythagore, exprimez h^2 en fonction de a^2 et y^2.
$h^2 = a^2 - y^2$

3) Substituez la valeur de h^2 dans l'expression obtenue en 1).
Donc
$c^2 = x^2 + a^2 - y^2$

4) Utilisez une identité remarquable, pour factoriser $x^2 - y^2$ de l'expression précédente.
$c^2 = a^2 + (x + y) \cdot (x - y)$

5) Utilisez $b = x + y$ pour éliminez x de l'expression obtenue précédemment.
$c^2 = a^2 + b \cdot (b - 2y)$

6) Développez l'expression.
$c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot y$

7) Exprimez y en fonction de a et de $\cos(\gamma)$ et remplacez-le dans l'expression.
$y = a \cdot \cos(\gamma)$ Donc $c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot a \cdot \cos(\gamma)$

8) Vous avez exprimez c^2 en fonction de a^2, b^2 et $\cos(\gamma)$.
Cette relation s'appelle "**le théorème du cosinus**". Ecrivez-là dans le cadre ci-dessous.

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)}$$

On a aussi : $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)}$

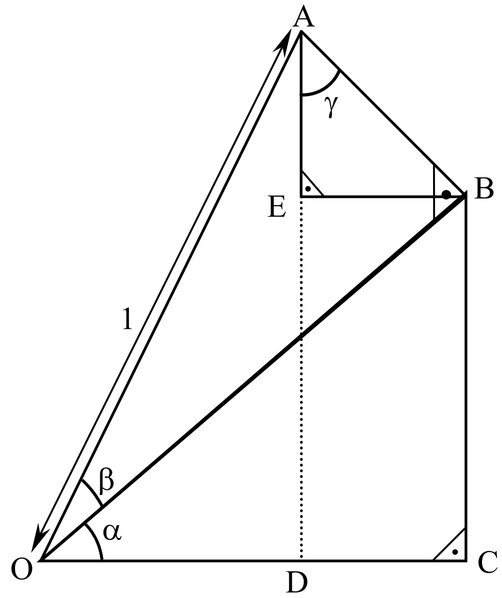
+) Remarquez que ce théorème généralise le théorème de Pythagore.
Ecrivez le dans le cas particulier où $\gamma = 90°$.
Si $\gamma = 90°$, alors $\cos(\gamma) = 0$, donc
Si $\gamma = 90°$, alors $c^2 = a^2 + b^2$

+) Ecrivez le théorème dans le cas particulier où $\gamma = 0°$.
La relation obtenue, exprime simplement que dans ce cas particulier, $c = |b - a|$
Si $\gamma = 0°$, alors $\cos(\gamma) = 1$, donc
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b = (a - b)^2$
donc $c = |a - b|$

+) Ecrivez le théorème dans le cas particulier où $\gamma = 180°$.
La relation obtenue, exprime simplement que dans ce cas particulier, $c = b + a$
Si $\gamma = 180°$, alors $\cos(\gamma) = -1$, donc
$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b = (a + b)^2$
donc $c = a + b$

Montrez que la relation suivante est exacte dans le premier quadrant.
Il est facile de montrer ensuite qu'elle est aussi exacte dans les autres quadrants.

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)}$$



Marche à suivre :

La longueur OA = 1 et les angles α et β sont supposés connus.

1) Exprimez l'angle γ en fonction de α et β.

$\gamma = \alpha$, s'observe par rotation de 90° de l'angle γ sur la gauche.

2) Exprimez la longueur OB en fonction de β.

$OB = \cos(\beta)$.

3) Exprimez la longueur AB en fonction de β.

$AB = \sin(\beta)$.

4) Exprimez la longueur BC en fonction de α et β.

$\sin(\alpha) = BC / OB \Rightarrow BC = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$.

5) Exprimez la longueur ED en fonction de α et β.

$ED = BC = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$.

6) Exprimez la longueur AE en fonction de α et β.

$\cos(\alpha) = \cos(\gamma) = AE / AB \Rightarrow AE = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.

7) Exprimez la longueur AD en fonction de α et β.

$AD = \sin(\alpha + \beta)$.

8) Concluez en exprimant $\sin(\alpha + \beta)$ en fonction de $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\beta)$ et $\sin(\beta)$.

$\sin(\alpha + \beta) = AD = AE + ED = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$ CQFD.

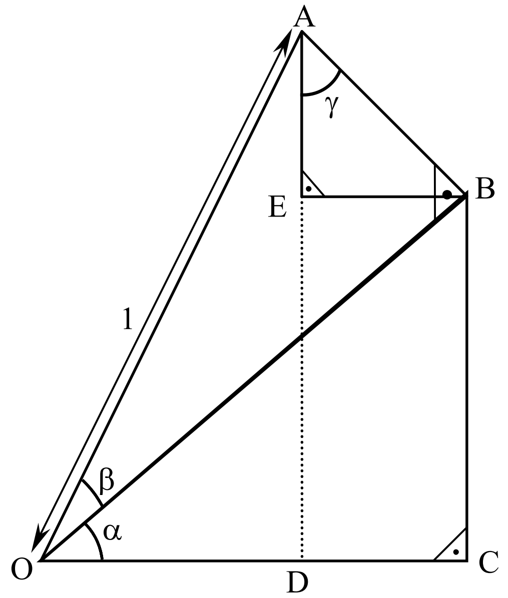
Quelle formule obtenez-vous en remplaçant β par $-\beta$?

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)}$$

Corrigé : X. Image de la somme de deux angles

Montrez que la relation suivante est exacte dans le premier quadrant.
Il est facile de montrer ensuite qu'elle est aussi exacte dans les autres quadrants.

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}$$



Marche à suivre :

La longueur $OA = 1$ et les angles α et β sont supposés connus.

1) Exprimez l'angle γ en fonction de α et β.

$\gamma = \alpha$, s'observe par rotation de 90° de l'angle γ sur la gauche.

2) Exprimez la longueur OB en fonction de β.

$OB = \cos(\beta)$.

3) Exprimez la longueur AB en fonction de β.

$AB = \sin(\beta)$.

4) Exprimez la longueur OC en fonction de α et β.

$\cos(\alpha) = OC / OB \Rightarrow OC = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$.

5) Exprimez la longueur BE en fonction de α et β.

$\sin(\alpha) = \sin(\gamma) = BE / AB \Rightarrow BE = \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.

6) Exprimez la longueur CD en fonction de α et β.

$CD = BE = \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.

7) Exprimez la longueur OD en fonction de α et β.

$OD = \cos(\alpha + \beta)$.

8) Concluez en exprimant $\sin(\alpha + \beta)$ en fonction de $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\beta)$ et $\sin(\beta)$.

$\cos(\alpha + \beta) = OD = OC - CD = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ CQFD.

Quelle formule obtenez-vous en remplaçant β par $-\beta$?

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}$$

Corrigé : X. Image de la somme de deux angles

En utilisant les relations précédentes, montrez que :

En divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)$ et en simplifiant.

1) $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

2) $$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\alpha+(-\beta))=\frac{\tan(\alpha)+\tan(-\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(-\beta)}=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

A partir des relations vues dans les pages précédentes et ci-dessus, écrivez les expressions suivantes en fonctions de **sin(α), cos(α)** et **tan(α)**.

3) $\mathbf{\sin(2\alpha)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)=2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}$

4) $\mathbf{\cos(2\alpha)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha)=(\cos(\alpha))^2-(\sin(\alpha))^2}$

On préfère écrire : $\mathbf{\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)}$

5) $$\mathbf{\tan(2\alpha)}=\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=\frac{2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}{\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)}=\frac{2\cdot\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1-\dfrac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}=\underline{\underline{\frac{2\cdot\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}}}$$

ici, on a divisé par $\cos^2(\alpha)$ le numérateur et le dénominateur.

En utilisant aussi la relation : $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$, montrez que :

6) $\cos(2\alpha)=2\cdot\cos^2(\alpha)-1$ est à montrer.

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=\cos^2(\alpha)-\left[1-\cos^2(\alpha)\right]=\cos^2(\alpha)-1+\cos^2(\alpha)=2\cdot\cos^2(\alpha)-1$$

$\sin^2(\alpha)=1-\cos^2(\alpha)$ se déduit de $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

7) $\cos(2\alpha)=1-2\cdot\sin^2(\alpha)$ est à montrer.

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=\left[1-\sin^2(\alpha)\right]-\sin^2(\alpha)=1-2\cdot\sin^2(\alpha)$$

$\cos^2(\alpha)=1-\sin^2(\alpha)$ se déduit de $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

8) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$ est à montrer.

En utilisant la relation obtenue en 6, en remplaçant α par $\frac{\alpha}{2}$, on obtient :

$\cos(\alpha) = 2\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$ donc $\cos(\alpha)+1 = 2\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, donc $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos(\alpha)}{2}$

En prenant la racine carrée, on obtient la relation cherchée.

9) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$ est à montrer.

En utilisant la relation obtenue en 7, en remplaçant α par $\frac{\alpha}{2}$, on obtient :

$\cos(\alpha) = 1 - 2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ donc $2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1-\cos(\alpha)$, donc $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$

En prenant la racine carrée, on obtient la relation cherchée.

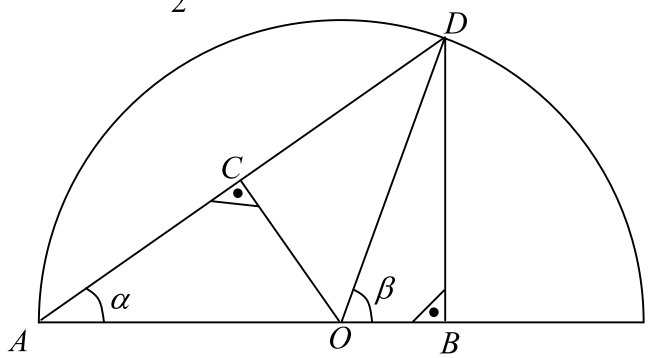
10) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$ est à montrer.

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$$

Pour les curieux, voici une manière de montrer que : $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

Le demi-cercle suivant est de rayon $1 = OA = OD$.
Justifiez les égalités ci-dessous.

1) $\beta = 2\alpha$.
2) $\cos(2\alpha) = OB$
3) $AC = CD$
4) $\cos(\alpha) = AC$
5) $\cos(\alpha) = \frac{AB}{AD} = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2\cdot\cos(\alpha)}$
6) $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$



Exercices :

i) Vérifiez cette formule pour $\alpha = 45°$ et $\alpha = 30°$
ii) Utilisez cette formule pour calculer exactement : cos(22,5°) et cos(15°).
iii) Calculez également exactement : sin(22,5°) et sin(15°).

$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

i) $\cos^2(45°) = \frac{1+\cos(2\cdot 45°)}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos(90°)}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

i) $\cos^2(30°) = \frac{1+\cos(2\cdot 30°)}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos(60°)}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{1,5}{2}$

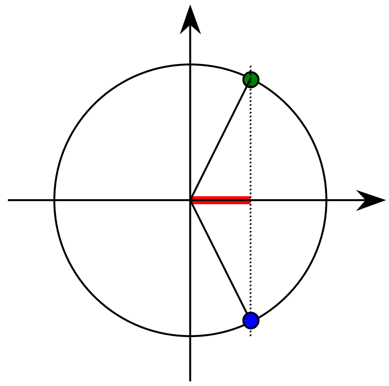
ii) $\cos(22,5°) = \sqrt{\frac{1+\cos(45°)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\cos(15°) = \sqrt{\frac{1+\cos(30°)}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

iii) $\sin(22,5) = \sqrt{1-\cos^2(22,5)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\sin(15) = \sqrt{1-\cos^2(15)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Remarque :
Une **équation trigonométrique** est une équation contenant l'une au moins des fonctions trigonométriques vues dans les paragraphes précédents.

Voici trois exemples d'équation trigonométrique.

Equation n°1 : $\cos(x) = \cos(y)$.



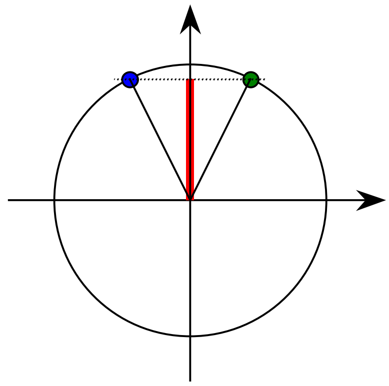
Cette équation lie les deux variables x et y.
A l'aide du croquis, déterminez deux liens distincts entre x et y.

Premier lien : $x = y$.

Deuxième lien : $x = -y$.

Ensemble des solutions : $x = y + 2 \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou
$x = -y + 2 \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Equation n°2 : $\sin(x) = \sin(y)$.



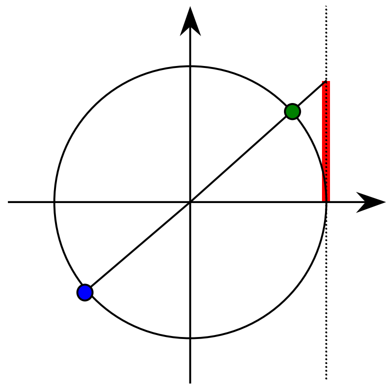
Cette équation lie les deux variables x et y.
A l'aide du croquis, déterminez deux liens distincts entre x et y.

Premier lien : $x = y$.

Deuxième lien : $x = \pi - y$.

Ensemble des solutions : $x = y + 2 \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou
$x = \pi - y + 2 \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Equation n°3 : $\tan(x) = \tan(y)$.



Cette équation lie les deux variables x et y.
A l'aide du croquis, déterminez deux liens distincts entre x et y.

Premier lien : $x = y$.

Deuxième lien : $x = \pi + y$.

Ensemble des solutions : $x = y + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exercice XI.1
Trouvez toutes les solutions de :

a) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos(x) = 0,5$ c'est la même équation que ci-dessus, car $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,5$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

c) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Exercice XI.1 suite Trouvez toutes les solutions de :

d) $\sin(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$x=\frac{\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x=\frac{3\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

e) $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ c'est la même équation que ci-dessus, car $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x=\frac{\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x=\frac{3\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

f) $\sin(x)=0,5 = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$x=\frac{\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x=\frac{5\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

g) $\tan(x)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

h) $\tan(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ c'est la même équation que ci-dessus, car $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

i) $\tan(x)=1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Exercice XI.2 Trouvez toutes les solutions de :

a) $\cos(3x)=0,5 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$3x=\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad 3x=-\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{donc}$$

$$x=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

b) $\cos(x)=\cos(2x)$

$$x=2x+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x=-2x+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{donc}$$

$$x=-2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x=\frac{2}{3}\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

c) $\sin(3x)=0,5$

$$3x=\frac{\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad 3x=\frac{5\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{donc}$$

$$x=\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

d) $\sin(x)=\sin(2x)$ $x=2x+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ou $x=\pi-2x+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ donc

$$x=-2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Index

Abscisse curviligne, 7
Adjacent (côté), 2
Amplitude, 14
Angle, 1
Arc cosinus, 2
Arc sinus, 2
Arc tangente, 2
Arccos (graphique), 12
Arcsin (graphique), 11
Arctan (graphique), 13
Cathète, 2
Cercle trigonométrique, 7
$\cos^{-1}$, 2, 12
$\text{Cos}(\alpha + \beta)$, 18
Cosinus, 2, 7
Cosinus (graphique), 12
Cosinus (théorème), 16
Côté adjacent, 2
Côté opposé, 2
Demi-droite, 1
Equation trigonométrique, 21
Fréquence, 14
Fonction sinusoïdale, 14
Homologue, 1
Hypoténuse, 2
Opposé (côté), 2
Période, 10, 14
Phase, 14
Quadrants, 8
Radian, 5
Segment de droite, 1
Semblable, 1
$\sin^{-1}$, 2, 11
$\text{Sin}(\alpha + \beta)$, 17
Sinus, 2, 7
Sinus (graphique), 11
Sinus (théorème), 15
Sommet, 1
$\tan^{-1}$, 2, 13
Tangente, 2, 7
Tangente (graphique), 13
Théorème du sinus, 15
Triangle rectangle, 2