❶ Selon l'énoncé, on sait que : $\beta = \gamma = 50°$ et que $BC = 21$ [cm].

Donc $\alpha = 180° - 50° - 50° = 80°$

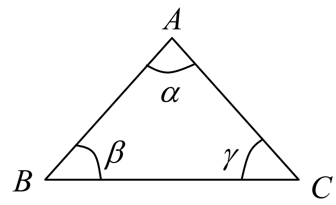
On peut appliquer le théorème du sinus.

$$\frac{AB}{\sin(\gamma)} = \frac{BC}{\sin(\alpha)}, \text{ donc}$$

$$AB = \sin(\gamma) \cdot \frac{BC}{\sin(\alpha)} = \sin(50°) \cdot \frac{21\,[cm]}{\sin(80°)} = \underline{\underline{AB \approx 16{,}34\,[cm]}}$$

Le triangle est isocèle, $\beta = \gamma$, donc $AC = AB \approx 16{,}34$ [cm].

Le périmètre est de 21 + 16,34 + 16,34 ≈ 53,68 [cm]




---

❷ Un schéma montre clairement le triangle à considérer.

Les 14° ont été obtenus en faisant : 47° - 33°.

Le théorème du cosinus permet de trouver la longueur $x$.

$x^2 = 128^2 + 240^2 - 2 \cdot 128 \cdot 240 \cdot \cos(14°)$ Donc

$$x = \sqrt{128^2 + 240^2 - 2 \cdot 128 \cdot 240 \cdot \cos(14°)} \approx \sqrt{14'369} \approx 119{,}87\,[km]$$

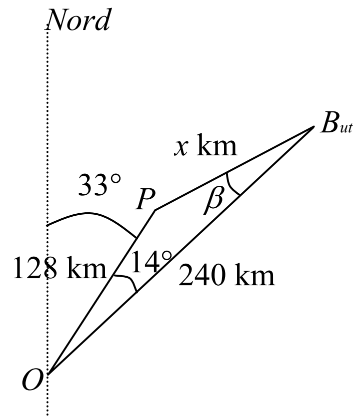
La distance séparant le bateau du port est environ de 119,87 [km].

L'angle en $B$ peut se calculer avec le théorème du cosinus ou du sinus.

$$\frac{119{,}87}{\sin(14°)} \approx \frac{128}{\sin(\beta)}, \text{ donc } \beta \approx \arcsin\left(\sin(14°) \cdot \frac{128}{119{,}87}\right) \approx 14{,}97°$$

L'angle entre la verticale et le segment [$PB$] est environ de 47° + 14,97° = 61,97°.

Le bateau doit prendre la direction N61,97°E.




---

❸ L'angle $DEB$ vaut $90° - 25° = 65°$. L'angle $DEA$ vaut $180° - 65° = 115°$

La distance $d$ peut être calculée avec le théorème du sinus.

$$\frac{d}{\sin(20°)} \approx \frac{3}{\sin(115°)}, \text{ donc } d = \frac{\sin(20°) \cdot 3}{\sin(115°)} \approx 1{,}13\,[\text{m}]$$

Une autre manière de faire est :

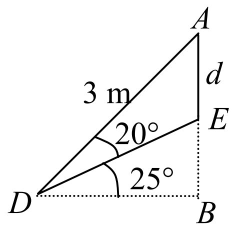
$ABD$ est isocèle, donc

$AB = BD = \sin(45°) \cdot 3 \approx 2.12\,[\text{m}]$

$BE = \tan(25°) \cdot DE \approx 0{,}989\,[\text{m}]$

Donc $d = AB - BE \approx 1{,}13\,[\text{m}]$

La longueur du support du panneau est environ de 1,13 [m].




---

❹ $\alpha = 15°$, $\beta = 20°$, donc $\gamma = 180° - \beta = 160°$ et $\delta = 180 - \alpha - \gamma = 5°$.

Le théorème du sinus permet de calculer la distance $QT$.

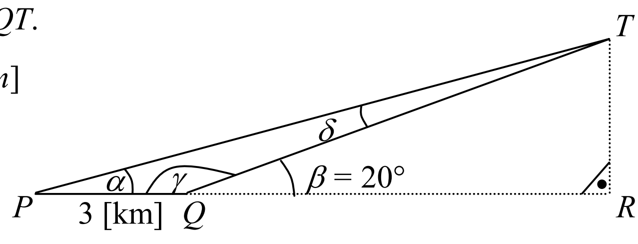
$$\frac{QT}{\sin(\alpha)} \approx \frac{3\,[km]}{\sin(\delta)} \Rightarrow QT = \frac{\sin(15°) \cdot 3\,[km]}{\sin(5°)} \approx 8{,}91\,[km]$$

Le triangle $QRT$ est rectangle,

$$\text{donc } \sin(\beta) = \frac{RT}{QT}, \text{ donc}$$

$$RT = QT \cdot \sin(\beta) \approx 8{,}91 \cdot \sin(20°) \approx 3{,}05\,[km]$$

La hauteur de la montagne est d'environ 3,05 kilomètres.




---

❺ Il faut connaître les formules d'additions d'arcs.

-> $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ ; $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

-> $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ ; $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

$$A=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}}$$

$$B=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}}$$

$$C=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}}$$

$$D=\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{3+1-2\cdot\sqrt{3}}{2}\underline{\underline{=2-\sqrt{3}}}$$

Les deux réponses sont acceptées.

$$E=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}}$$

$$F=\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}}$$

$$G=\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}}$$

$$H=\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{3+1+2\cdot\sqrt{3}}{2}\underline{\underline{=2+\sqrt{3}}}$$

Les deux réponses sont acceptées.

❺bis Remplissez le tableau suivant avec des valeurs exactes.

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{2\cdot\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$ | $\frac{3\cdot\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$ | $\frac{4\cdot\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\cdot\pi}{12}$ | $\frac{6\cdot\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$ $\approx 0{,}259$ | 0,5 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\approx 0{,}707$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\approx 0{,}866$ | $\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$ $\approx 0{,}966$ | 1 |
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$ $\approx 0{,}966$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\approx 0{,}866$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\approx 0{,}707$ | 0,5 | $\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$ $\approx 0{,}259$ | 0 |
| $\tan(x)$ | 0 | $2-\sqrt{3}$ $\approx 0{,}268$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\approx 0{,}577$ | 1 | $\sqrt{3}$ $\approx 1{,}732$ | $2+\sqrt{3}$ $\approx 3{,}732$ | pas défini |

Voici comment se ramener au premier cadran :
Si $x$ correspond à un point du 2$^{\text{ème}}$ cadran, $\sin(x)=\sin(\pi-x)$ ; $\cos(x)=-\cos(\pi-x)$
Si $x$ correspond à un point du 3$^{\text{ème}}$ cadran, $\sin(x)=-\sin(x-\pi)$ ; $\cos(x)=-\cos(x-\pi)$
Si $x$ correspond à un point du 4$^{\text{ème}}$ cadran, $\sin(x)=-\sin(-x)$ ; $\cos(x)=\cos(-x)$
On peut toujours utiliser : $\sin(x)=\sin(x\pm 2\cdot\pi)$ ; $\cos(x)=\cos(x\pm 2\cdot\pi)$

$$I=\sin\left(\frac{7\cdot\pi}{12}\right)=\sin\left(\pi-\frac{5\cdot\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{5\cdot\pi}{12}\right)=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3+1}\right)}}$$

$$J=\cos\left(\frac{11\cdot\pi}{12}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$$

$$K=\sin\left(\frac{17\cdot\pi}{12}\right)=-\sin\left(\frac{17\cdot\pi}{12}-\pi\right)=-\sin\left(\frac{5\cdot\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3+1}\right)$$

$$L=\cos\left(\frac{22\cdot\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{22\cdot\pi}{12}-2\pi\right)=\cos\left(-\frac{2\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vérifiez vos résultats avec la calculatrice !!!