Le théorème du sinus dit que : $\dfrac{AB}{\sin(\gamma)}=\dfrac{AC}{\sin(\beta)}=\dfrac{BC}{\sin(\alpha)}$

Le théorème du cosinus dit que : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos(\gamma)$ et

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos(\beta)$ et

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos(\alpha)$

On sait aussi que : $\alpha+\beta+\gamma = 180°$

1) Le théorème du cosinus permet de calculer la valeur de x :

$x^2 = AC^2 + BC^2 - 2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos(\gamma) = 24^2 + 36^2 - 2\cdot 24\cdot 36\cdot\cos(44°) \approx 628{,}98$

Donc $\underline{x \approx 25{,}08}$.

Le théorème du sinus permet de calculer les angles α et β.

$\dfrac{x}{\sin(44°)}=\dfrac{AC}{\sin(\beta)}=\dfrac{24}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow \sin(\beta)=\dfrac{24\cdot\sin(44°)}{x}\approx 0{,}6647$

Puisque 24 n'est pas le plus long côté, $0° < \beta < 90°$, donc $\underline{\underline{\beta \approx \arcsin(0{,}6647)\approx 41{,}66°}}$

$\dfrac{x}{\sin(44°)}=\dfrac{BC}{\sin(\alpha)}=\dfrac{36}{\sin(\alpha)} \Leftrightarrow \sin(\alpha)=\dfrac{36\cdot\sin(44°)}{x}\approx 0{,}9971$

Puisque $36^2 > 24^2 + 25{,}08^2$, $90° < \beta < 180°$, donc $\underline{\underline{\alpha \approx 180° - \arcsin(0{,}9971)\approx 94{,}36°}}$

Il est bon de vérifier que $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.

On aurait pu utiliser le théorème du cosinus pour calculer les angles α et β. Exemple :

$\alpha = \arccos\left(\dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}\right)\approx \arccos(-0{,}07559)\approx 94{,}33°$

L'aire = 0,5·base · hauteur = $0{,}5\cdot 36\cdot \mathit{hauteur} = 0{,}5\cdot 36\cdot 24\cdot\sin(44°)\approx 0{,}5\cdot 36\cdot 16{,}672 \approx 300{,}09$

---

2) $\alpha = \arccos\left(\dfrac{AH^2 + AC^2 - CH^2}{2\cdot AH\cdot AC}\right) = \arccos\left(\dfrac{9^2 + 15^2 - 7{,}8^2}{2\cdot 9\cdot 15}\right) = \arccos(0{,}908)\approx 24{,}77°$

L'angle en C du triangle ABC égale : $\gamma = 180° - 22° - \alpha \approx 180° - 22° - 24{,}77° = 133{,}23°$.

L'angle en C du triangle AHC égale :

$\gamma_1 = \arccos\left(\dfrac{CH^2 + AC^2 - AH^2}{2\cdot CH\cdot AC}\right) = \arccos\left(\dfrac{7{,}8^2 + 15^2 - 9^2}{2\cdot 7{,}8\cdot 15}\right)\approx \arccos(0{,}875)\approx 28{,}91°$

$\gamma_2 = \gamma - \gamma_1 \approx 133{,}23° - 28{,}91° \approx 104{,}32°$

Le théorème du sinus permet de conclure.

$\dfrac{x}{\sin(\gamma_2)}=\dfrac{CH}{\sin(\beta)}=\dfrac{7{,}8}{\sin(22°)} \Leftrightarrow x \approx \dfrac{7{,}8\cdot\sin(104{,}34°)}{\sin(22°)}\approx \underline{\underline{x\approx 20{,}17}}$

$\dfrac{y}{\sin(\eta_2)}=\dfrac{CH}{\sin(\beta)}=\dfrac{7{,}8}{\sin(22°)} \Leftrightarrow y \approx \dfrac{7{,}8\cdot\sin(180° - 22° - 104{,}33°)}{\sin(22°)}\approx \underline{\underline{y\approx 16{,}77}}$

L'aire = 0,5·base · hauteur = $0{,}5\cdot(x+9)\cdot(y\cdot\sin(22°))\approx 0{,}5\cdot 29{,}17\cdot 6{,}282\approx 91{,}63$

3.1) $a^2 = 40^2 + 60^2 - 2\cdot 40\cdot 60\cdot\cos(28°)\approx 961{,}85$, donc $a\approx\sqrt{961{,}85}\approx 31{,}01$

$\beta = \arccos\left(\dfrac{60^2 + a^2 - 40^2}{2\cdot 60\cdot a}\right)\approx \arccos(0{,}7958)\approx 37{,}26°$

$\gamma = \arccos\left(\dfrac{40^2 + a^2 - 60^2}{2\cdot 40\cdot a}\right)\approx \arccos(-0{,}4184)\approx 114{,}73°$

Il est bon de vérifier que : $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 114{,}74°$.

3.2) $\alpha = \arccos\left(\dfrac{8^2+10^2-11^2}{2\cdot 8\cdot 10}\right) = \arccos(0,26875) \approx 74,41°$

$\beta = \arccos\left(\dfrac{10^2+11^2-8^2}{2\cdot 10\cdot 11}\right) \approx \arccos(0,7136) \approx 44,47°$

$\gamma = \arccos\left(\dfrac{8^2+11^2-10^2}{2\cdot 8\cdot 11}\right) \approx \arccos(0,483) \approx 61,12°$

Il est bon de vérifier que : $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 61,12°$.

3.3) Ici, le théorème du sinus est plus agréable à utiliser. (Celui du cosinus est utilisable)

$\dfrac{18}{\sin(\alpha)} = \dfrac{36}{\sin(70°)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \dfrac{18}{36}\cdot\sin(70°) \approx 0,4698$

$18 < 36$, donc $\alpha < 90°$, donc $\alpha \approx \arcsin(0,4698) \approx 28,02°$

$\beta = 180° - \alpha - 70° \approx 81,96°$.

$b^2 = 36^2 + 18^2 - 2\cdot 36\cdot 18\cdot\cos(\beta°) \approx 1'439,09$, donc $b \approx \sqrt{1'439,09} \approx 37,94$

Il est bon de vérifier que : $\dfrac{18}{\sin(\alpha)} = \dfrac{36}{\sin(70°)} = \dfrac{b}{\sin(\beta°)} \approx 38,31$.

3.4) $\beta = 180° - 45° - 60° = 75°$.

Ici, seul le théorème du sinus est utilisable.

$\dfrac{a}{\sin(60°)} = \dfrac{20}{\sin(45°)} \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{20\cdot\sin(60°)}{\sin(45°)} \approx 24,49$

$\dfrac{b}{\sin(75°)} = \dfrac{20}{\sin(45°)} \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{20\cdot\sin(75°)}{\sin(45°)} \approx 27,32$

---

4) On utilise le théorème du cosinus pour calculer divers angles.

$\alpha_1 = \arccos\left(\dfrac{54^2+56^2-10^2}{2\cdot 54\cdot 56}\right) \approx \arccos(0,984) \approx 10,22°$

$\gamma_1 = \arccos\left(\dfrac{56^2+10^2-54^2}{2\cdot 56\cdot 10}\right) \approx \arccos(0,2857) \approx 73,398°$

$\delta_1 = \arccos\left(\dfrac{10^2+54^2-56^2}{2\cdot 10\cdot 54}\right) \approx \arccos(-0,111) \approx 96,379°$

Il est bon de vérifier que : $\alpha_1 + \gamma_1 + \delta_1 \approx 180°$

$\alpha 2 = \arccos\left(\dfrac{33^2+54^2-27^2}{2\cdot 33\cdot 54}\right) \approx \arccos(0,91919) \approx 23,19°$

$\varepsilon 2 = \arccos\left(\dfrac{33^2+27^2-54^2}{2\cdot 33\cdot 27}\right) \approx \arccos(-0,61616) \approx 128,04°$

Donc $\varepsilon_3 = 180° - \varepsilon_2 \approx 51,96°$

$\beta_3 = 180° - \alpha - \gamma_1 = 180° - \alpha_1 - \alpha_2 - \gamma_1 \approx 73,19°$

$\delta_3 = 180° - \varepsilon_3 - \beta_3 \approx 54,85°$

Le théorème du sinus permet de conclure.

$\dfrac{x}{\sin(\delta 3)} = \dfrac{27}{\sin(\beta_3°)} \quad \Leftrightarrow \quad x \approx \dfrac{27\cdot\sin(54,85°)}{\sin(73,19°)} \approx \underline{\underline{x \approx 23,06}}$

$\dfrac{y}{\sin(\varepsilon 3)} = \dfrac{27}{\sin(\beta_3°)} \quad \Leftrightarrow \quad y \approx \dfrac{27\cdot\sin(51,96°)}{\sin(73,19°)} \approx \underline{\underline{y \approx 22,21}}$