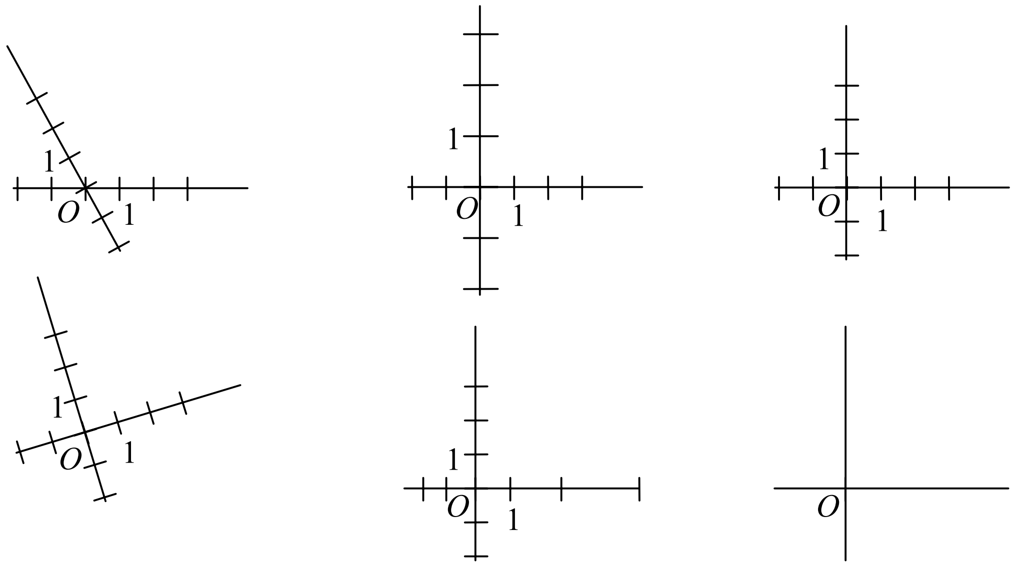
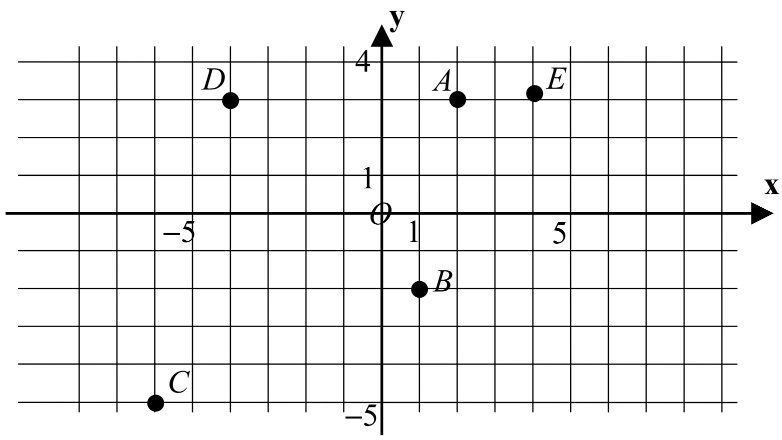
Exercice 2.1 : Parmi les repères suivant, lesquels sont des repères orthonormés ?



- ° Le premier repère n'est pas orthonormé car l'angle entre les axes n'est pas de 90°.
- ° Le deuxième repère n'est pas orthonormé car les graduations des axes sont de longueurs différentes.
- ° Le troisième est orthonormé car les axes sont perpendiculaires et leurs graduations sont de même longueurs.
- ° Le quatrième est orthonormé car les axes sont perpendiculaires et leurs graduations sont de même longueurs. Le faite que les axes ne sont pas horizontal et vertical n'a pas d'importance.
- ° Le cinquième repère n'est pas orthonormé car les graduations de l'axe X ne sont pas réguliers.
- ° Le sixième repère n'est pas orthonormé car les axes n'ont pas de graduations.

Exercice 2.2 :

Représentez sur un même repère les points $A(2\ ;\ 3)$, $B(1\ ;\ -2)$, $C(-6\ ;\ -5)$, $D(-4\ ;\ 3)$ et $E(4\ ;\ \pi)$.



Exercice 2.3 :

Soient les points $A(2\ ;\ 3)$, $B(1\ ;\ -2)$ et $C(-6\ ;\ -5)$.

Calculez les distances entre : a) A et B b) B et C c) A et C d) C et A

a) $AB = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{26}$

b) $BC = \sqrt{(-6-1)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

c) $AC = \sqrt{(-6-2)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{2 \cdot 8^2} = 8 \cdot \sqrt{2}$ attention : $AC \neq AB + BC$

d) $CA = \sqrt{(2+6)^2 + (3+5)^2} = 8 \cdot \sqrt{2} = AC$

Exercice 2.4 :

Soit $O(0;0)$ l'origine du repère. Quels sont les points $P(x\,;y)$ qui vérifient les conditions suivantes ?
a) $OP=5$ et $x=4$ **b)** $OP=14$ et $y=12$ **c)** $OP=8$ et $x=y$ **d)** $OP=8$ et $x^2=y^2$

e) $OP=8$

a) $4^2+y^2=5^2 \Rightarrow$ il y a deux solutions qui sont : $P(4\,;3)$ et $P(4\,;-3)$.

b) $x^2+12^2=14^2 \Rightarrow$ il y a deux solutions qui sont : $P\left(2\cdot\sqrt{13}\,;12\right)$ et $P\left(-2\cdot\sqrt{13}\,;12\right)$.

c) $x^2+x^2=8^2 \Rightarrow$ il y a deux solutions qui sont : $P\left(4\cdot\sqrt{2}\,;4\cdot\sqrt{2}\right)$ et $P\left(-4\cdot\sqrt{2}\,;-4\cdot\sqrt{2}\right)$.

d) $x^2+x^2=8^2 \Rightarrow$ il y a quatre solutions qui sont : $P\left(\pm4\cdot\sqrt{2}\,;\pm4\cdot\sqrt{2}\right)$.

e) $x^2+y^2=8^2 \Rightarrow$ il y a une infinité de solutions qui sont : $P\left(x\,;\sqrt{8^2-x^2}\right)$, avec $x\in\left[-8\,;8\right]$.

L'ensemble de ces points représentent le cercle centré à l'origine, de rayon 8.

Exercice 2.5 :

Les points $A(4\,;-6)$, $B(6\,;10)$, $C(-6\,;1)$ et $D(1\,;-7)$ pris dans cet ordre sont les sommets d'un quadrilatère $ABCD$ et M, N, P et Q respectivement les points milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

a) Calculez les coordonnées des points M, N, P et Q.

$$M=\left\langle\frac{4+6}{2};\frac{-6+10}{2}\right\rangle=\left\langle5\,;2\right\rangle\;;\;N=\left\langle0\,;5{,}5\right\rangle\;;\;P=\left\langle-2{,}5\,;-3\right\rangle\;;\;Q=\left\langle2{,}5\,;-6{,}5\right\rangle$$

b) Calculez les longueurs des segments $[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$, $[QM]$.
Que constatez-vous ? (C.f. point c)

$MN=\sqrt{5^2+3{,}5^2}=\sqrt{37{,}25}$; $NP=\sqrt{2{,}5^2+8{,}5^2}=\sqrt{78{,}5}$;

$PQ=\sqrt{5^2+3{,}5^2}=\sqrt{37{,}25}$; $QM=\sqrt{2{,}5^2+8{,}5^2}=\sqrt{78{,}5}$

On constate que $MN = PQ$ et que $NP = QM$.
Donc le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

d*) Pouvez-vous montrer que la constatation ci-dessus est toujours satisfaites, indépendamment des positions des points A, B, C et D ? (Cela mène au théorème de Varignon)
De façon générale on a :

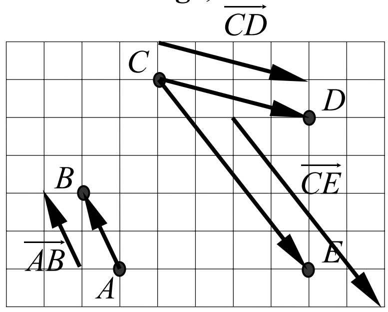
$$M=\left\langle\frac{a_x+b_x}{2};\frac{a_y+b_y}{2}\right\rangle\;;\;N=\left\langle\frac{b_x+c_x}{2};\frac{b_y+c_y}{2}\right\rangle\;;\;P=\left\langle\frac{c_x+d_x}{2};\frac{c_y+d_y}{2}\right\rangle\;;\;Q=\left\langle\frac{d_x+a_x}{2};\frac{d_y+a_y}{2}\right\rangle$$

$$MN=\sqrt{\left(\frac{b_x+c_x}{2}-\frac{a_x+b_x}{2}\right)^2+\left(\frac{b_y+c_y}{2}-\frac{a_y+b_y}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{c_x-a_x}{2}\right)^2+\left(\frac{c_y-a_y}{2}\right)^2}$$

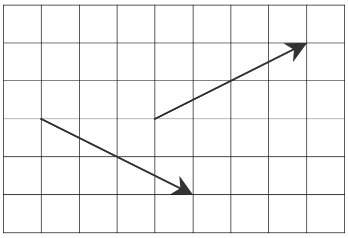
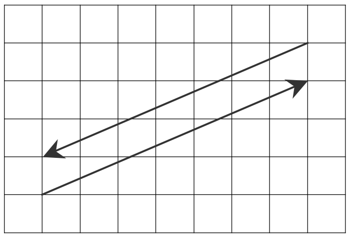
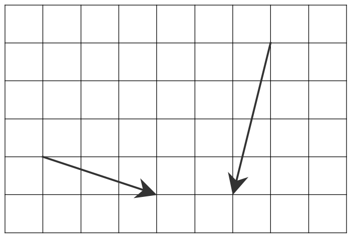
$$PQ=\sqrt{\left(\frac{d_x+a_x}{2}-\frac{c_x+d_x}{2}\right)^2+\left(\frac{d_y+a_y}{2}-\frac{c_y+d_y}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a_x-c_x}{2}\right)^2+\left(\frac{a_y-c_y}{2}\right)^2}=MN$$

De même on trouve que $NP = QM$, donc les points milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ forment toujours un parallélogramme.
Cet exercice donne un exemple de l'utilité de la géométrie analytique, qui permet de montrer par un simple calcul algébrique une propriété géométrique.

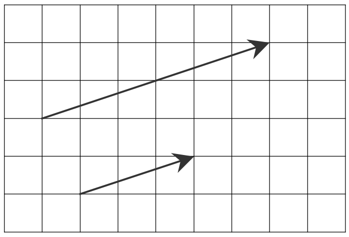
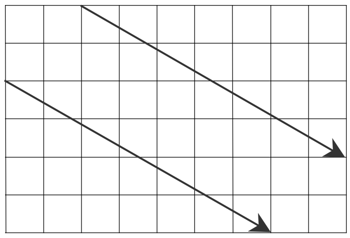
3.1 Dessinez **deux** représentants des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CD}$.



3.2 Dans chacun des dessins suivants, les deux flèches représentent-elles le même vecteur ?

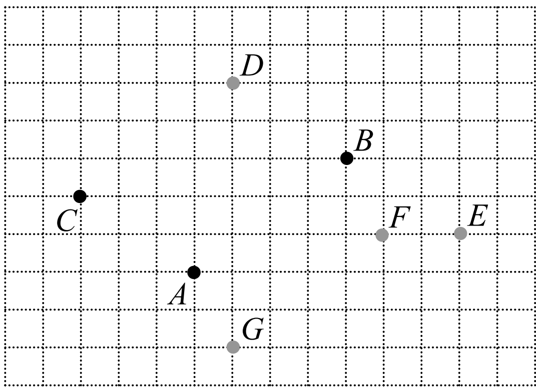
a)  b)  c) 

a) et c) : Non, car la direction des flèches est différente.
b) Non, car le sens des flèches est différent.

d)  e)  f) 

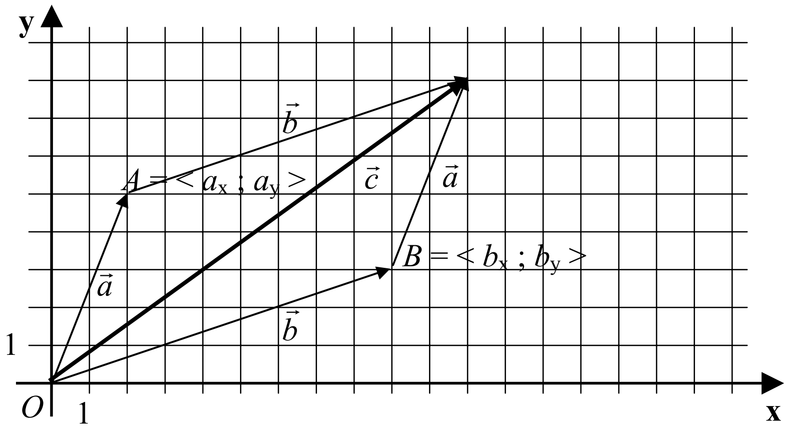
e) : Non, car les longueurs des flèches sont différentes.
d) et f) : Oui, car les flèches ont même direction, même sens et même longueur.

3.3 Trouvez des points D, E, F et G tels que :
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BA}$.



4.1 L'addition dans $\mathbb{R}^2$

Soient $\vec{a} = < a_x ; a_y >$ et $\vec{b} = < b_x ; b_y >$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.



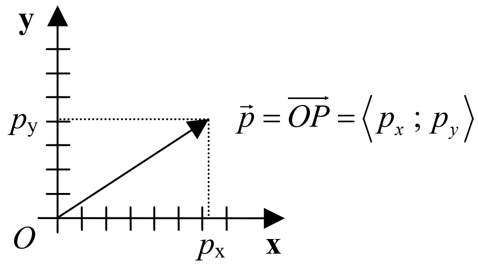
Représentez sur le graphique le vecteur $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Déterminez les composantes de ce vecteur $\vec{c}$. $\vec{c} = < a_x + b_x ; a_y + b_y >$

On définit donc : $\boxed{< a_x ; a_y > + < b_x ; b_y > = < a_x + b_x ; a_y + b_y >}$

4.2 Norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$

La **norme** du vecteur $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \langle p_x ; p_y \rangle$ est définie par la longueur du segment $[OP]$.
Elle se calcule facilement à l'aide du théorème de Pythagore :



$$\boxed{\|\vec{p}\| = \|\langle p_x ; p_y \rangle\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}$$

4.1 Soient A, B, C, D, E et F des points quelconques du plan. Complétez, si possible :

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF}$

c) $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DB}$

d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

e) $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

f) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

g) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DF} =$ on ne peut pas compléter. On le pourrait si les lettes D et F étaient inversées.

h) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB}$

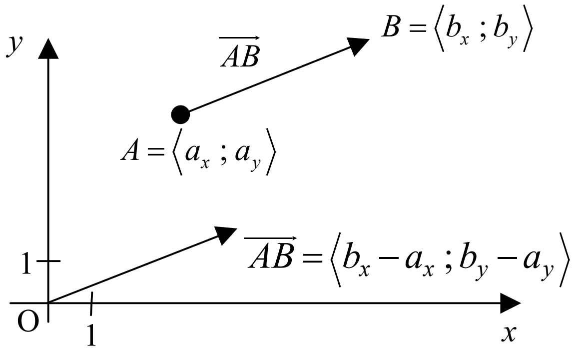
i) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

j) $\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EB} = 2 \cdot \overrightarrow{EB}$

On définit donc : $\boxed{\lambda \cdot < a_x \,;\, a_y > = < \lambda \cdot a_x \,;\, \lambda \cdot a_y >}$

Remarque :

Si $A = < a_x \,;\, a_y >$ et $B = < b_x \,;\, b_y >$ sont deux points du plan, alors : $\boxed{\overrightarrow{AB} = \langle b_x - a_x \,;\, b_y - a_y \rangle}$



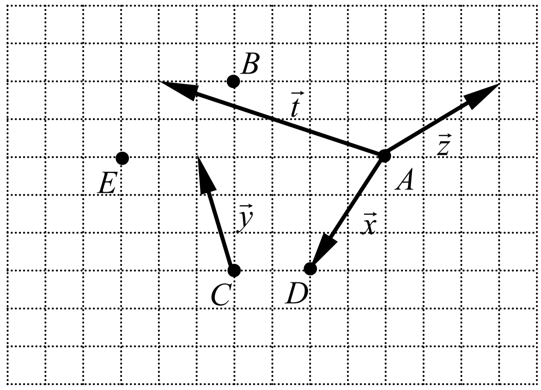
4.2 Dessinez un représentant des vecteurs suivants :

$\vec{x} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$

$\vec{y} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}$

$\vec{z} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}$

$\vec{t} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$



4.3 Dessinez un représentant de :

a) $\vec{v}_1 = -\vec{x}$

b) $\vec{v}_2 = -\vec{z}$

c) $\vec{v}_3 = 2\vec{x}$

d) $\vec{v}_4 = 1,5 \cdot \vec{y}$

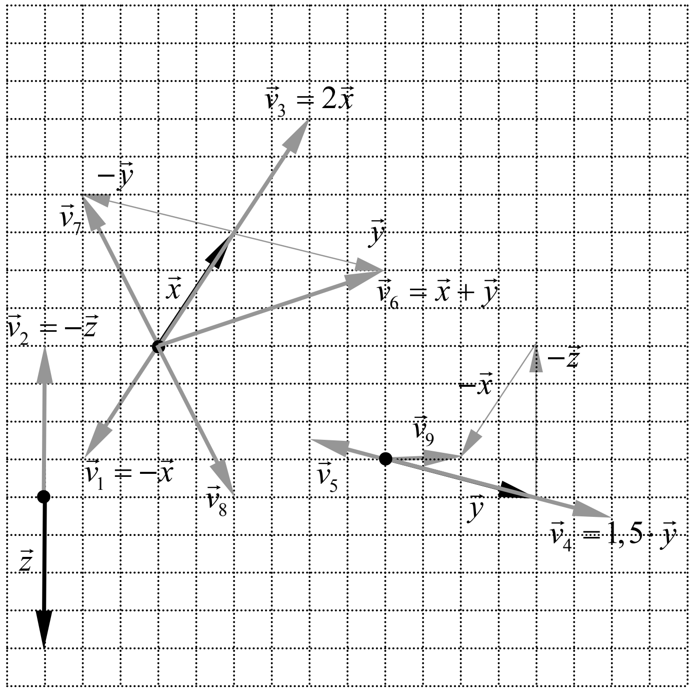
e) $\vec{v}_5 = -0,5 \cdot \vec{y}$

f) $\vec{v}_6 = \vec{x} + \vec{y}$

g) $\vec{v}_7 = \vec{x} - \vec{y}$

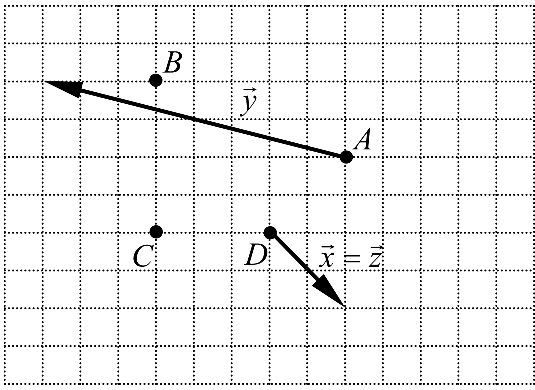
h) $\vec{v}_8 = \vec{y} - \vec{x}$

i) $\vec{v}_9 = \vec{y} - \vec{z} - \vec{x}$



4.4 Dessinez un représentant des vecteurs suivants :

$\vec{x}$ tel que $\overrightarrow{AB}+\vec{x} = \overrightarrow{DC}$,
$\vec{y}$ tel que $\overrightarrow{CD}+\vec{y} = \overrightarrow{AB}$,
$\vec{z}$ tel que $\overrightarrow{CB}+\vec{z} = \overrightarrow{DA}$
$\vec{x} = \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}$
$\vec{y} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$
$\vec{z} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$
On remarque que : $\vec{z} = \vec{x}$



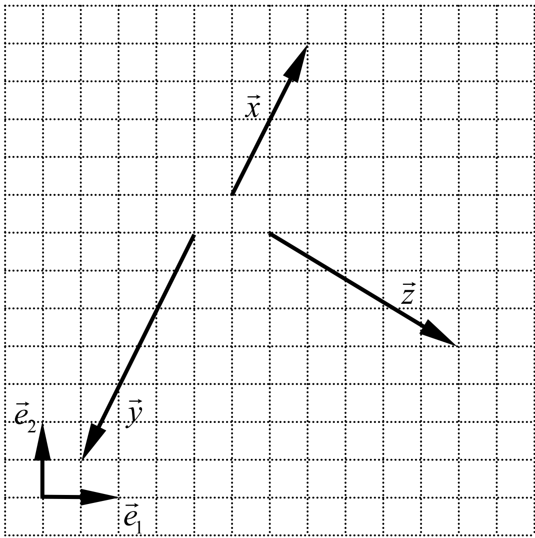
4.5 a) La norme de $\vec{y}$ est 1,5 fois plus grande que celle de $\vec{x}$ et le sens de $\vec{y}$ est opposé au sens de $\vec{x}$, donc $k = -1{,}5$.

b) $h = 1 / k = -2 / 3 = -0{,}\overline{6}$.

c) $\lambda = 1$ et $\mu = 2$ car en partant d'un point, on avance de 2 carrés horizontalement et on montre de 4 verticalement pour représenter le vecteur $\vec{x} = \lambda \cdot \vec{e}_1 + \mu \cdot \vec{e}_2$.

d) $\alpha = 5/2$ et $\beta = -3/2$ pour $\vec{z} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2$.

e) Trouvez deux nombres δ et ε tels que : $\vec{z} = \delta \cdot \vec{x} + \varepsilon \cdot \vec{y}$. !?!?
Ce n'est **pas possible**, car $\delta \cdot \vec{x} + \varepsilon \cdot \vec{y}$ donne un vecteur de même direction que $\vec{x}$.



4.6 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB} \quad \Leftrightarrow$

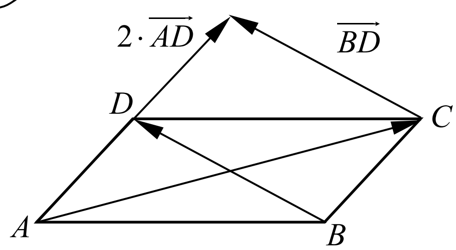
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, donc l'égalité de la première ligne est vraie.

4.7 Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, les segments orientés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles, donc de même direction et ils sont de même sens et de même longueur. Ils représentent donc le même vecteur, c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. La même remarque s'applique à : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

4.8 Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, l'exercice 4.3 indique que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

De l'exercice 4.2 on a :

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD} = 2\cdot\overrightarrow{AD}$ CQFD.



4.9 Par définition du milieu M d'un segment $[AB]$, la longueur AM égale la longueur BM.
De plus les segments orientés $[AM]$, $[MB]$ et $[AB]$, ont même direction et même sens.
Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.
Puisque $2 \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$, on a $\overrightarrow{AM} = 0,5 \cdot \overrightarrow{AB}$.

4.10 $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ et $\overrightarrow{OJ} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$, donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} - \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}$.

4.11* On a : $\overrightarrow{OM} = 0,5 \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, car
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + 0,5 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + 0,5 \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = 0,5 \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.
De même : $\overrightarrow{ON} = 0,5 \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$; $\overrightarrow{OP} = 0,5 \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ et $\overrightarrow{OQ} = 0,5 \cdot (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})$.
Donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = 0,5 \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) - 0,5 \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = 0,5 \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$ et
Donc $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = 0,5 \cdot \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) - 0,5 \cdot \left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\right) = 0,5 \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$
On a montré que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, c'est-à-dire que les segments $[MN]$ et $[QP]$ sont parallèle et de même longueur, donc $MNPQ$ est un parallélogramme.
Si vous avez des doutes, montrez encore que $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AQ}$.

4.12a) $\langle x\,;y\rangle = \langle\, 6,5 + 7 - 2 \cdot 5\,; -2 + 1 - 2 \cdot (-3)\,\rangle = \langle\, 3,5\,; 5\,\rangle$

b) $\langle\, 3\,; -1\,\rangle + \langle\, x\,; y\,\rangle = \langle\, 2\,; 0\,\rangle \iff \langle\, x\,; y\,\rangle = \langle\, 2\,; 0\,\rangle - \langle\, 3\,; -1\,\rangle = \langle\, -1\,; 1\,\rangle$

c) $\langle\, 3\,; -2\,\rangle + \langle\, x\,; y\,\rangle = \langle\, -3\,; 2\,\rangle \iff \langle\, x\,; y\,\rangle = \langle\, -3\,; 2\,\rangle - \langle\, 3\,; -2\,\rangle = \langle\, -6\,; 4\,\rangle$

d) $\langle\, x\,; y\,\rangle + \langle\, x\,; y\,\rangle = \langle\, 6\,; -2\,\rangle \iff \langle\, 2x\,; 2y\,\rangle = \langle\, 6\,; -2\,\rangle \iff \langle\, x\,; y\,\rangle = \langle\, 3\,; -1\,\rangle$

4.13a) $k \cdot \langle\, 5\,; 6\,\rangle = \langle\, 10\,; 12\,\rangle \iff k = 2$

b) $k \cdot \langle\, -4\,; 0\,\rangle = \langle\, 4\,; 0\,\rangle \iff k = -1$

c) $k \cdot \langle\, 2\,; 3\,\rangle = \langle\, 3\,; 2\,\rangle \iff 2k = 3$ et $3k = 2$, ce n'est pas possible.

4.14 $A = \langle\, -3\,; 1\,\rangle$; $B = \langle\, 1\,; 3\,\rangle$; $C = \langle\, 4\,; 1\,\rangle$ et $D = \langle\, 2\,; 0\,\rangle$
Montrons que : $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \langle 1\,; 3\rangle - \langle -3\,; 1\rangle = \langle 4\,; 2\rangle$
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \langle 2\,; 0\rangle - \langle 4\,; 1\rangle = \langle -2\,; -1\rangle = -0,5 \cdot \langle 4\,; 2\rangle = -0,5 \cdot \overrightarrow{AB}$
Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont multiple l'un de l'autre, ils sont parallèle.

4.15 $A=\langle\ 2\,;1\ \rangle$; $B=\langle\ 6\,;4\ \rangle$ et $C=\langle\ 2\,;6\ \rangle$

a) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\ \langle\ 6\,;4\ \rangle-\langle 2\,;1\rangle\ \right\|=\left\|\ \langle\ 4\,;3\ \rangle\ \right\|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

b) $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\ \langle\ 2\,;6\ \rangle-\langle 2\,;1\rangle\ \right\|=\left\|\ \langle\ 0\,;5\ \rangle\ \right\|=\sqrt{0^2+5^2}=\sqrt{25}=5$

c) Puisque les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont de même longueur, le triangle est isocèle.

4.16 $A=\langle\ 0\,;0\ \rangle$; $B=\langle\ 6\,;8\ \rangle$ et $C=\left\langle\ 3+4\cdot\sqrt{3}\,;4-3\cdot\sqrt{3}\ \right\rangle$

a) Pour montrer que le triangle ABC est équilatéral, il faut montrer que la longueur des trois côtés est la même.

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\ \langle\ 6\,;8\ \rangle\ \right\|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\ \left\langle\ 3+4\cdot\sqrt{3}\,;4-3\cdot\sqrt{3}\ \right\rangle\ \right\|=\sqrt{\left(3+4\cdot\sqrt{3}\right)^2+\left(4-3\cdot\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{100}=10$

$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\ \left\langle\ 3+4\cdot\sqrt{3}\,;4-3\cdot\sqrt{3}\ \right\rangle-\langle\ 6\,;8\ \rangle\ \right\|=\sqrt{\left(-3+4\cdot\sqrt{3}\right)^2+\left(-4-3\cdot\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{100}=10$

Le triangle ABC est équilatéral, car les trois côtés sont de même longueur.

4.17 $A=\langle\ 3\,;8\ \rangle$; $B=\langle\ -11\,;3\ \rangle$ et $C=\langle\ -8\,;-2\ \rangle$

Calculons la longueur des trois côtés, pour montrer que deux côtés sont de même longueur et donc que le triangle ABC est isocèle.

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\ \langle\ -11\,;3\ \rangle-\langle 3\,;8\rangle\ \right\|=\left\|\ \langle\ -14\,;-5\ \rangle\ \right\|=\sqrt{(-14)^2+(-5)^2}=\sqrt{221}$

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\ \langle\ -8\,;-2\ \rangle-\langle 3\,;8\rangle\ \right\|=\left\|\ \langle\ -11\,;-10\ \rangle\ \right\|=\sqrt{(-11)^2+(-10)^2}=\sqrt{221}$

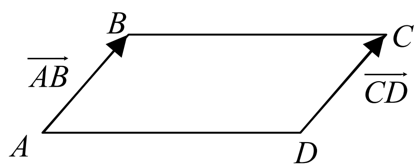
Puisque les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont de même longueur, le triangle est isocèle.

Pour savoir s'il est équilatéral, calculons la longueur du côté $[BC]$.

$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\ \langle\ -8\,;-2\ \rangle-\langle -11\,;3\rangle\ \right\|=\left\|\ \langle\ 3\,;-5\ \rangle\ \right\|=\sqrt{(3)^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$

On peut en conclure que le triangle n'est pas équilatérale.

4.18 $A=\langle\ 5\,;2\ \rangle$; $B=\langle\ 0\,;0\ \rangle$; $C=\langle\ 4\,;-10\ \rangle$ et $D=\langle\ 9\,;-8\ \rangle$



$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB}=\langle\ 0\,;0\ \rangle-\langle 5\,;2\ \rangle=\langle\ -5\,;-2\ \rangle$

$\overrightarrow{DC}=\langle\ 4\,;-10\ \rangle-\langle 9\,;-8\ \rangle=\langle\ -5\,;-2\ \rangle$

On a bien $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Une autre manière de faire est de calculer la longueur des côtés.

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\langle\ -5\,;-2\ \rangle\right\|=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$; $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\left\|\langle\ -5\,;-2\ \rangle\right\|=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

$\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\langle\ 9-5\,;-8-2\ \rangle\right\|=\left\|\langle\ 4\,;-10\ \rangle\right\|=\sqrt{16+100}=\sqrt{116}$; $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\langle\ 4\,;-10\ \rangle\right\|=\sqrt{16+100}=\sqrt{116}$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

C'est plus long, mais correcte.

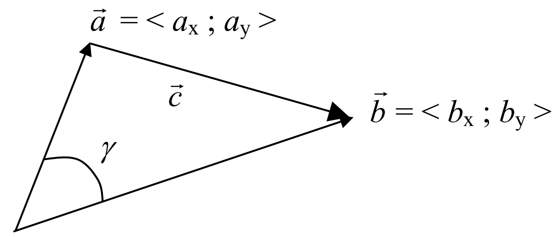
4.19* Soient $\vec{a} = < a_x ; a_y >$ et $\vec{b} = < b_x ; b_y >$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Le but est de déterminer l'angle γ entre ces deux vecteurs.

a) Dessinez le vecteur $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$

b) Exprimez les composantes du vecteur $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$

c) En utilisant le théorème du cosinus, exprimez $\cos(\gamma)$ en fonction des normes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

d) Ecrivez le numérateur en utilisant les composantes de $\vec{a}$, $\vec{b}$, développez et simplifiez.



b) $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a} = \left\langle b_x - a_x ; b_y - a_y \right\rangle$

c) Le théorème du cosinus donne :

$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\gamma)$, donc

$$\cos(\gamma) = \frac{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{c}\|^2}{2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

d) En composantes, cela devient : $\cos(\gamma) = \dfrac{a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - (b_x - a_x)^2 - (b_y - a_y)^2}{2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$

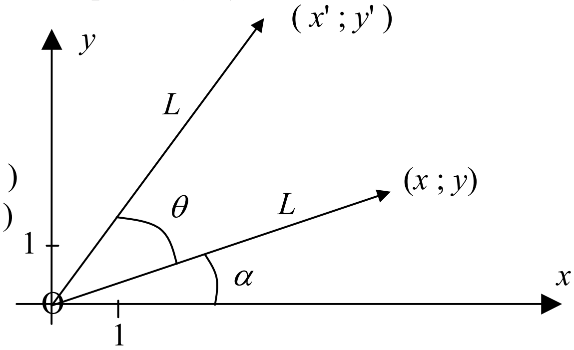
$\cos(\gamma) = \dfrac{2 \cdot (a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y)}{2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$ après développement et simplification.

Finalement on obtient : $\boxed{\cos(\gamma) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}}$ où

$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$ s'appelle le produit scalaire de $\vec{a}$ avec $\vec{b}$.

Exercice 4.20* :

Exprimez $(x' ; y')$ en fonction de $x ; y$ et θ sans utiliser les fonctions arcsin, arccos ni arctan.
$(x' ; y')$ est obtenu par rotation d'angle θ autour de l'origine du point $(x ; y)$.



Exprimons les coordonnées à l'aide des angles.

$x = L \cdot \cos(\alpha)$

$y = L \cdot \sin(\alpha)$

$x' = L \cdot \cos(\alpha + \theta) = L \cdot (\cos(\alpha) \cdot \cos(\theta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\theta))$

$y' = L \cdot \sin(\alpha + \theta) = L \cdot (\sin(\alpha) \cdot \cos(\theta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta))$

En développant, on obtient :

$x' = L \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\theta) - L \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\theta)$

$y' = L \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\theta) + L \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta)$

En substituant, on obtient :

$x' = x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta)$

$y' = y \cdot \cos(\theta) + x \cdot \sin(\theta)$

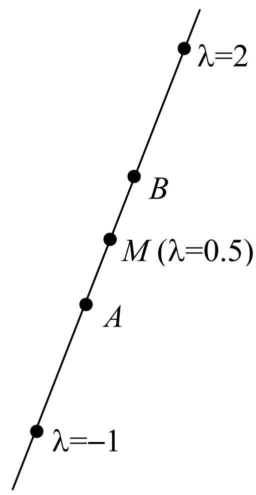
La relation entre $(x' ; y')$ et $(x ; y)$ est simple !

5.1 Déterminez une équation vectorielle de la droite **D** de l'exemple du graphique ci-dessus.
$A = (7 ; 0)$ et $B = (0 ; 6)$ sont deux points de la droite.
Donc $\vec{a} = (0 ; 6)$ est un vecteur position de la droite et
$\vec{d} = (7 ; 0) - (0 ; 6) = (7 ; -6)$ est un vecteur directeur de la droite.
Donc une équation vectorielle de la droite **D** est :
$\vec{v} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{d} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, écrite plus explicitement, on l'appelle l'équation paramétrique de la droite **D** :
$(x ; y) = (p_x ; p_y) + \lambda \cdot (d_x , d_y) = (0 ; 6) + \lambda \cdot (7 ; -6) \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

5.2 $A = (a_1 ; a_2)$ et $B = (b_1 ; b_2)$.
Un vecteur directeur de la droite passant par A et B est :
$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (b_1 ; b_2) - (a_1 ; a_2) = (b_1 - a_1 ; b_2 - a_2)$
Une équation vectorielle de cette droite est : $\vec{v} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{d} \quad \lambda \in \mathbb{R}$
L'équation paramétrique correspondante est : $(x ; y) = (a_1 ; a_2) + \lambda \cdot (b_1 - a_1 ; b_2 - a_2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$
On confond souvent l'équation vectorielle avec l'équation paramétrique et ce n'est pas important !

5.3 Une équation vectorielle ou plutôt une équation paramétrique de la droite passant par les points $(-1 ; 5)$ et $(4 ; 2)$ est : $(x ; y) = (-1 ; 5) + \lambda \cdot (\underbrace{5}_{4-(-1)} ; \underbrace{-3}_{2-5}) \quad \lambda \in \mathbb{R}$.
Une autre équation paramétrique est : $(x ; y) = (4 ; 2) + \lambda \cdot (\underbrace{-5}_{-1-4} ; \underbrace{3}_{5-2}) \quad \lambda \in \mathbb{R}$
Il y en a encore des infinités d'autres !

5.4 Soient deux points $A = (a_1 ; a_2)$ et $B = (b_1 ; b_2)$ d'une droite. Soit $\vec{d} = (b_1 - a_1 ; b_2 - a_2)$.
Soit l'équation paramétrique de cette droite : $(x ; y) = (a_1 ; a_2) + \lambda \cdot (d_1 ; d_2) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}$.
Examinez les points correspondants aux valeurs suivantes de λ.



Le point correspondant à $\lambda = 0$ est le point A.

Le point correspondant à $\lambda = 1$ est le point B.

Le point correspondant à $\lambda = 0{,}5$ est le point M au milieu entre A et B.

$$(m_1 ; m_2) = (a_1 ; a_2) + 0{,}5 \cdot (b_1 - a_1 ; b_2 - a_2) = \left(\frac{b_1 + a_1}{2} ; \frac{b_2 + a_2}{2} \right)$$

Le point correspondant à $\lambda = -1$ est le point symétrique de B par rapport à A.
Les coordonnées de ce point sont : $(a_1 ; a_2) + (a_1 - b_1 ; a_2 - b_2) = (2 \cdot a_1 - b_1 ; 2 \cdot a_2 - b_2)$

Le point correspondant à $\lambda = 2$ est le point symétrique de A par rapport à B.
Les coordonnées de ce point sont : $(a_1 ; a_2) + 2 \cdot (b_1 - a_1 ; b_2 - a_2) = (2 \cdot b_1 - a_1 ; 2 \cdot b_2 - a_2)$.

Exercices 5.5 :

a. $\alpha = b_y - a_y$; $\beta = a_x - b_x$ et $\gamma = \alpha \cdot a_x + \beta \cdot a_y$,

L'équation : $(b_y - a_y) \cdot (x - a_x) = (b_x - a_x) \cdot (y - a_y)$ devient : $\alpha \cdot (x - a_x) = -\beta \cdot (y - a_y)$

En la développant, elle devient : $\alpha \cdot x - \alpha \cdot a_x = -\beta \cdot y + \beta \cdot a_y$ et donc

$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha \cdot a_x + \beta \cdot a_y = \gamma$.

b. Si $a_x = b_x$, alors $\beta = 0$ et $\gamma = \alpha \cdot a_x$, donc $\alpha \cdot x = \alpha \cdot a_x$ et l'équation devient : $x = a_x$.

c. Si $a_y = b_y$, alors $\alpha = 0$ et $\gamma = \beta \cdot a_y$, donc $\beta \cdot y = \beta \cdot a_y$ et l'équation devient : $y = a_y$.

d. Pour passer d'une équation cartésienne à une équation paramétrique, il suffit de trouver deux points de la droite à partir de l'équation cartésienne, puis d'utiliser l'exercice 5.2.
Si une équation cartésienne de la droite est donnée : $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$
En posant $x = 0$, on obtient : $y = \gamma / \beta$, donc $(0 , \gamma / \beta)$ est un point de la droite.
En posant $y = 0$, on obtient : $x = \gamma / \alpha$, donc $(\gamma / \alpha, 0)$ est un point de la droite.

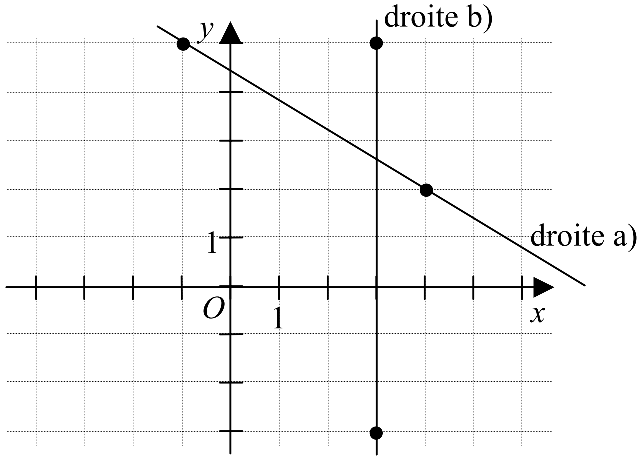
Donc $(x ; y) = \left(0 ; \frac{\gamma}{\beta}\right) + \lambda \cdot \left(\frac{\gamma}{\alpha} ; -\frac{\gamma}{\beta}\right)$ $\lambda \in \mathbb{R}$ est une équation paramétrique de la droite.

Une équation plus simple est : $(x ; y) = \left(0 ; \frac{\gamma}{\beta}\right) + \lambda \cdot (\beta ; -\alpha)$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une autre est simple est : $(x ; y) = (\gamma / \alpha ; 0) + \lambda \cdot (\beta ; -\alpha)$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, une des deux équations ci-dessus est inutilisable, car elle contient une division par zéro.

Exercices 5.6 :



a. Selon ce qui précède, une équation cartésienne de la droite passant par les points $(-1 ; 5)$ et $(4 ; 2)$ est : $(2-5) \cdot (x-(-1)) = (4-(-1)) \cdot (y-5)$.
Développée et simplifiée, cela devient :
$3x + 5y = 22$.
On peut aussi utiliser la bonne vieille méthode :
y = pente $\cdot\, x + b$.
pente $= -3 / 5$.
$b = y$ − pente $\cdot\, x$ pour un point $(x ; y)$ de la droite.
$b = 2 - (-3 / 5) \cdot 4 = 22 / 5$.
Donc $y = (-3 / 5) \cdot x + 22 / 5$ est aussi une équation cartésienne de la droite.

b. Une équation cartésienne de la droite passant par les points $(3 ; -3)$ et $(3 ; 5)$ est :
$x = 3$. Cela signifie que la première coordonnée "x" est fixée égale à 3, la deuxième "y" est quelconque.

Exercice 5.7 :

Droite définie par : $\langle x ; y \rangle = \langle 1 ; -2 \rangle + \lambda \cdot \langle 1 ; 3 \rangle$ $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $A = \langle 2 ; 1 \rangle$ appartient à la droite, cas où $\lambda = 1$.

$B = \langle 3 ; 2 \rangle$ n'appartient pas à la droite, car $3 = 1 + 2 \cdot 1$ $(\lambda = 2)$ et $2 \neq 1 + 2 \cdot 3$.

$C = \langle 1 + \pi ; -2 + 3\pi \rangle$ appartient à la droite, cas où $\lambda = \pi$.

b) $\langle 1 ; -2 \rangle$; $\langle 0 ; -5 \rangle$; $\langle 11 ; 28 \rangle$ et $\langle 1 + 10\pi ; -2 + 30\pi \rangle$ sont des points de la droite.

c) (1 ; 3) est un vecteur directeur de la droite, (2 ; 6) en est un autre.

d) L'équation cartésienne de cette droite est : $(\lambda =) \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3}$,

plus simplement : $y = 3x - 5$.

Exercice 5.8 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les points : $A=\langle -3\,;2\rangle$; $B=\langle -5\,;7\rangle$ et $C=\langle -7\,;12\rangle$.

a) Un vecteur directeur de la droite passant par A et B est : $\overrightarrow{AB}=\langle -5\,;7\rangle-\langle -3\,;2\rangle=\langle -2\,;5\rangle$

b) Une équation paramétrique de cette droite est : $\langle x\,;y\rangle=\langle -3\,;2\rangle+\lambda\cdot\langle -2\,;5\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$

c) $\langle -7\,;12\rangle=\langle -3\,;2\rangle+2\cdot\langle -2\,;5\rangle$ $(\lambda=2)$, donc C est sur la droite.

d) L'équation cartésienne de cette droite est : $(\lambda=)\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y-2}{5}$,

plus simplement : $y=-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{11}{2}$.

Exercice 5.9 :

$A=\langle 1\,;2\rangle$; $B=\langle 0\,;3\rangle$ et $C=\langle 5\,;-2\rangle$

Les points A, B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont parallèles et donc multiples l'un de l'autre. $\overrightarrow{AB}=\langle 0\,;3\rangle-\langle 1\,;2\rangle=\langle -1\,;1\rangle$; $\overrightarrow{AC}=\langle 5\,;-2\rangle-\langle 1\,;2\rangle=\langle 4\,;-4\rangle=-4\cdot\overrightarrow{AB}$, donc ces trois points sont alignés.

Exercice 5.10* :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les points :

$A=\langle -37\,;28\rangle$; $B=\langle 52\,;-67\rangle$; $C=\langle -28\,;37\rangle$ et $D=\langle 67\,;-52\rangle$.

a) Une équation paramétrique du segment de droite $[A\,;B]$ est :

$\langle x\,;y\rangle=\langle -37\,;28\rangle+\lambda\cdot\langle 52+37\,;-67-28\rangle \quad \lambda\in[0\,;1]$.

$\langle x\,;y\rangle=\langle -37\,;28\rangle+\lambda\cdot\langle 89\,;-95\rangle \quad \lambda\in[0\,;1]$.

Le paramètre λ est limité entre 0 et 1.

Pour $\lambda = 0$, l'équation correspond à A. Pour $\lambda = 1$, l'équation correspond à B.

b) Une équation paramétrique de la demi-droite $[C\,;D)$ est :

$\langle x\,;y\rangle=\langle -28\,;37\rangle+\lambda\cdot\langle 67+28\,;-52-37\rangle \quad \lambda\in[0\,;\infty[$.

Le paramètre λ est limité aux nombres non négatifs.

Exercice 6.1 :

Soient deux droites D et D', d'équation paramétrique :

$\langle x\,;y\rangle=\langle -3\,;2\rangle+\lambda\cdot\langle -2\,;5\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$ pour D et $\langle x\,;y\rangle=\langle -2\,;-3\rangle+\lambda\cdot\langle -3\,;8\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$ pour D'.

Déterminez le point d'intersection de ces deux droites.

Il faut se rendre compte que les deux paramètres λ sont indépendant l'un de l'autre et que la deuxième équation peut aussi s'écrire : $\langle x\,;y\rangle=\langle -2\,;-3\rangle+\mu\cdot\langle -3\,;8\rangle \quad \mu\in\mathbb{R}$.

Il faut donc satisfaire : $(\langle x\,;y\rangle=)$ $\langle -3\,;2\rangle+\lambda\cdot\langle -2\,;5\rangle=\langle -2\,;-3\rangle+\mu\cdot\langle -3\,;8\rangle$.

C'est un système de deux équations à deux inconnues λ et μ :

$$\begin{cases}-3-2\lambda=-2-3\mu\\ 2+5\lambda=-3+8\mu\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\lambda+3\mu=1\\ 5\lambda-8\mu=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10\lambda+15\mu=5\\ 10\lambda-16\mu=-10\end{cases}\Leftrightarrow\ -\mu=-5 \text{ et } \lambda=7$$

Le point d'intersection des deux droites est : $\langle x\,;y\rangle=\langle -3\,;2\rangle+7\cdot\langle -2\,;5\rangle\ =\ \langle -17\,;37\rangle$.

Vérification : $\langle x\,;y\rangle=\langle -2\,;-3\rangle+5\cdot\langle -3\,;8\rangle\ =\ \langle -17\,;37\rangle$ OK.

Exercice 6.2 :
Soient deux droites D et D', d'équation cartésienne :

$y = -2,5 \cdot x - 5,5$ pour D et $y = -\frac{8}{3}x - \frac{25}{3}$ pour D'.

Déterminez le point d'intersection de ces deux droites.
C'est un système de deux équations à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} y = -2,5 \cdot x - 5,5 \\ y = -\frac{8}{3} \cdot x - \frac{25}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad -2,5 \cdot x - 5,5 = -\frac{8}{3} \cdot x - \frac{25}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{3} \cdot x - \frac{5}{2} \cdot x = 5,5 - \frac{25}{3} \quad \text{on multiplie par } 6.$$

$$\Leftrightarrow \quad 16 \cdot x - 15 \cdot x = 33 - 50 = -17 \quad \Leftrightarrow \quad x = -17 \quad \text{et} \quad y = -2,5 \cdot (-17) - 5,5 = 37$$

Le point d'intersection des deux droites est : $\langle x \,;\, y \rangle = \langle -17 \,;\, 37 \rangle$.

Vérification : $37 = -\frac{8}{3} \cdot (-17) - \frac{25}{3}$ OK.

Exercice 6.3 :
Soient deux droites D et D', d'équation paramétrique et cartésienne :

$\langle x \,;\, y \rangle = \langle 1 \,;\, -11 \rangle + \lambda \cdot \langle -3 \,;\, 8 \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$ pour D et $y = -\frac{5}{2}x - \frac{11}{2}$ pour D'.

Déterminez le point d'intersection de ces deux droites.
On a : $x = 1 - 3\lambda$ et $y = -11 + 8\lambda$, que l'on peut substituer dans l'équation cartésienne :

$-11 + 8\lambda = -\frac{5}{2} \cdot (1 - 3\lambda) - \frac{11}{2}$, qui donne une équation à une inconnue.

On trouve : $\lambda = 6$

Le point d'intersection des deux droites est : $\langle x \,;\, y \rangle = \langle 1 \,;\, -11 \rangle + 6 \cdot \langle -3 \,;\, 8 \rangle = \langle -17 \,;\, 37 \rangle$.

Vérification : $37 = -\frac{5}{2} \cdot (-17) - \frac{11}{2}$ OK.

Remarquons que les trois exercices précédents traitaient chaque fois l'intersection des deux mêmes droites, mais écrites de manières différentes !
Les résolutions des trois derniers exercices de la page précédente montrent comment déterminer les intersections de droites.

Exercice 6.4 :
Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les points : $A = \langle 1 \,;\, 2 \rangle$; $B = \langle 0 \,;\, 3 \rangle$; $C = \langle -3 \,;\, 1 \rangle$ et $D = \langle -5 \,;\, 0 \rangle$

Déterminez le point d'intersection des deux droites (AB) et (CD).

$\langle x \,;\, y \rangle = \langle 1 \,;\, 2 \rangle + \lambda \cdot \langle -1 \,;\, 1 \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$ pour (AB) et $\langle x \,;\, y \rangle = \langle -3 \,;\, 1 \rangle + \mu \cdot \langle 2 \,;\, 1 \rangle \quad \mu \in \mathbb{R}$ pour (CD).

Il faut donc satisfaire : $\left(\langle x \,;\, y \rangle =\right) \quad \langle 1 \,;\, 2 \rangle + \lambda \cdot \langle -1 \,;\, 1 \rangle = \langle -3 \,;\, 1 \rangle + \mu \cdot \langle 2 \,;\, 1 \rangle$.

C'est un système de deux équations à deux inconnues λ et μ :

$$\begin{cases} 1 - \lambda = -3 + 2\mu \\ 2 + \lambda = \ \ 1 + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3 = -2 + 3 \cdot \mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad \lambda = -1 + \mu = \frac{2}{3}$$

Le point d'intersection des deux droites est : $\langle x \,;\, y \rangle = \langle 1 \,;\, 2 \rangle + \frac{2}{3} \cdot \langle -1 \,;\, 1 \rangle = \left\langle \frac{1}{3} \,;\, \frac{8}{3} \right\rangle$.

Vérification : $\langle x \,;\, y \rangle = \langle -3 \,;\, 1 \rangle + \frac{5}{3} \cdot \langle 2 \,;\, 1 \rangle = \left\langle \frac{1}{3} \,;\, \frac{8}{3} \right\rangle$ OK.

Exercice 6.5 :

Soient deux droites D et D', d'équation paramétrique et cartésienne :

$\langle x\,;y\rangle = \langle p_x\,;p_y\rangle + \lambda\cdot\langle d_x\,;d_y\rangle$ $\lambda\in\mathbb{R}$ pour D et $\alpha\cdot x+\beta\cdot y=\gamma$ pour D'.

a) Déterminez le point d'intersection de ces deux droites.

b) Sous quelles conditions ces deux droites n'ont pas d'intersection ?

On a : $x=p_x+\lambda\cdot d_x$ et $y=p_y+\lambda\cdot d_y$, que l'on peut substituer dans l'équation cartésienne :

$\alpha\cdot(p_x+\lambda\cdot d_x)+\beta\cdot(p_y+\lambda\cdot d_y)=\gamma$, qui donne une équation à une inconnue.

$\alpha\cdot p_x+\alpha\cdot\lambda\cdot d_x+\beta\cdot p_y+\beta\cdot\lambda\cdot d_y=\gamma \;\Leftrightarrow$

$\lambda\cdot(\alpha\cdot d_x+\beta\cdot d_y)=\gamma-\alpha\cdot p_x-\beta\cdot p_y \;\Leftrightarrow$

On trouve : $\lambda=\dfrac{\gamma-\alpha\cdot p_x-\beta\cdot p_y}{\alpha\cdot d_x+\beta\cdot d_y}$. Si le dénominateur est nul, les deux droites sont parallèles.

Le point d'intersection des deux droites s'obtient en substituant λ dans l'équation paramétrique.

b) Si le dénominateur $\alpha\cdot d_x+\beta\cdot d_y$ est nul, les deux droits sont parallèles.

Si le point $\langle p_x\,;p_y\rangle$ satisfait l'équation cartésienne, i.e. $\alpha\cdot p_x+\beta\cdot p_y=\gamma$, alors les deux droites sont confondues, sinon elles n'ont pas d'intersection.

Exercice 6.6 :

Soient deux droites D et D', d'équation paramétrique :

$\langle x\,;y\rangle = \langle p_x\,;p_y\rangle + \lambda\cdot\langle d_x\,;d_y\rangle$ $\lambda\in\mathbb{R}$ pour D et $\langle x\,;y\rangle = \langle q_x\,;q_y\rangle + \mu\cdot\langle e_x\,;e_y\rangle$ $\mu\in\mathbb{R}$ pour D'.

a) Déterminez le point d'intersection de ces deux droites.

b) Sous quelles conditions ces deux droites n'ont pas d'intersection ?

Il faut donc satisfaire : $(\langle x\,;y\rangle =)$ $\langle p_x\,;p_y\rangle + \lambda\cdot\langle d_x\,;d_y\rangle = \langle q_x\,;q_y\rangle + \mu\cdot\langle e_x\,;e_y\rangle$.

C'est un système de deux équations à deux inconnues λ et μ :

$$\begin{cases} p_x+d_x\cdot\lambda=q_x+e_x\cdot\mu \\ p_y+d_y\cdot\lambda=q_y+e_y\cdot\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -e_y\cdot p_x-e_y\cdot d_x\cdot\lambda=-e_y\cdot q_x-e_y\cdot e_x\cdot\mu \\ e_x\cdot p_y+e_x\cdot d_y\cdot\lambda=\;\; e_x\cdot q_y+e_x\cdot e_y\cdot\mu \end{cases} \quad \text{on additionne :}$$

$e_x\cdot p_y+e_x\cdot d_y\cdot\lambda-e_y\cdot p_x-e_y\cdot d_x\cdot\lambda=e_x\cdot q_y-e_y\cdot q_x$

$\lambda\cdot(e_x\cdot d_y-e_y\cdot d_x)=e_x\cdot q_y-e_y\cdot q_x+e_y\cdot p_x-e_x\cdot p_y$

On trouve : $\lambda=\dfrac{e_x\cdot q_y-e_y\cdot q_x+e_y\cdot p_x-e_x\cdot p_y}{e_x\cdot d_y-e_y\cdot d_x}$. Si le dénominateur est nul, les deux droites sont parallèles.

Remarque : $\lambda=\dfrac{e_x\cdot(q_y-p_y)-e_y\cdot(q_x-p_x)}{e_x\cdot d_y-e_y\cdot d_x}$.

Le point d'intersection des deux droites s'obtient en substituant λ dans l'équation paramétrique.

b) Si le dénominateur $e_x\cdot d_y-e_y\cdot d_x$ est nul, les deux droits sont parallèles.

Si le point $\langle p_x\,;p_y\rangle$ satisfait la deuxième équation paramétrique (ce qui est le cas si et seulement si le numérateur $e_x\cdot(q_y-p_y)-e_y\cdot(q_x-p_x)$ est nul), alors les deux droites sont confondues, sinon elles n'ont pas d'intersection.

Exercice 6.7 :

Soient deux droites D et D', d'équation cartésienne :

$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$ pour D et $\delta \cdot x + \varepsilon \cdot y = \eta$ pour D'.

a) Déterminez le point d'intersection de ces deux droites.

b) Sous quelles conditions ces deux droites n'ont pas d'intersection ?

C'est un système de deux équations à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} \alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma \\ \delta \cdot x + \varepsilon \cdot y = \eta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon \cdot \alpha \cdot x + \varepsilon \cdot \beta \cdot y = \varepsilon \cdot \gamma \\ -\beta \cdot \delta \cdot x - \beta \cdot \varepsilon \cdot y = -\beta \cdot \eta \end{cases}$$ on additionne :

$\varepsilon \cdot \alpha \cdot x - \beta \cdot \delta \cdot x = \varepsilon \cdot \gamma - \beta \cdot \eta$

$(\alpha \cdot \varepsilon - \beta \cdot \delta) \cdot x = \gamma \cdot \varepsilon - \beta \cdot \eta$

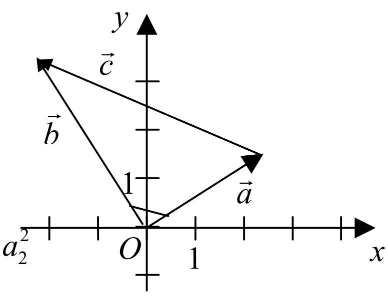
On trouve : $x = \dfrac{\gamma \cdot \varepsilon - \beta \cdot \eta}{\alpha \cdot \varepsilon - \beta \cdot \delta}$. Si le dénominateur est nul, les deux droites sont parallèles.

On trouve : $y = \dfrac{\alpha \cdot \eta - \gamma \cdot \delta}{\alpha \cdot \varepsilon - \beta \cdot \delta}$ par symétrie ou par substitution.

Le point d'intersection des deux droites est le points de coordonnées $(x ; y)$ ci-dessus.

b) Si le dénominateur $\alpha \cdot \varepsilon - \beta \cdot \delta$ est nul, les deux droits sont parallèles.
Si un des deux numérateurs de x ou de y est nul, alors l'autre est aussi nul et les deux droites sont confondues, sinon elles n'ont pas d'intersection.

Exercice 7.1 :



$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a} = (b_1 - a_1 ; b_2 - a_2)$

$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$ $\quad \|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2$ $\quad \|\vec{c}\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$

Le théorème de Pythagore indique que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires si et seulement si : $\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{c}\|^2 \Leftrightarrow$

$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = b_1^2 - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 + a_2^2$

En simplifiant, on obtient : $0 = -2 \cdot a_1 \cdot b_1 - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 = -2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2)$.

Donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires si et seulement si : $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

c'est-à-dire : $\boxed{\vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ sont perpendiculaires si et seulement si } a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0}$

Exercice 7.2 :

Soit une droite **D** d'équation cartésienne : $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$

a) Deux points de cette droite sont : $A = (0 , \gamma / \beta)$ et $B = (\gamma / \alpha, 0)$.

b) Un vecteur directeur est : $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (\gamma / \alpha ; 0) - (0 ; \gamma / \beta) = (\gamma / \alpha ; -\gamma / \beta)$
En le multipliant par $\alpha \cdot \beta / \gamma$ on trouve le vecteur directeur : $\vec{d} = (\beta ; -\alpha)$.

c) Puisque $(\beta ; -\alpha) \bullet (\alpha ; \beta) = \beta \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta = 0$, les deux vecteurs : $(\beta ; -\alpha)$ et $(\alpha ; \beta)$ sont perpendiculaires.
Puisque $(\beta ; -\alpha)$ est un vecteur directeur de la droite, on a $(\alpha ; \beta)$ est normal à cette droite.

Il est utile de se rappeler que :

$(\alpha ; \beta)$ est un vecteur perpendiculaire à la droite d'équation : $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$
$(\beta ; -\alpha)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation : $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$

Exercice 7.3 :

Soient les droites : $\mathbf{D_1}$: $4x - 2y = 1$ et $\mathbf{D_2}$: $3x + 6y = 5$.
Un vecteur directeur de $\mathbf{D_1}$ est : (2 ; 4)
Un vecteur directeur de $\mathbf{D_2}$ est : (6 ; −3)
On a : $(2 ; 4)\bullet(6 ; -3) = 2 \cdot 6 + 4 \cdot (-3) = 0$, donc les directions de ses deux droites sont perpendiculaires, donc elles sont orthogonales.

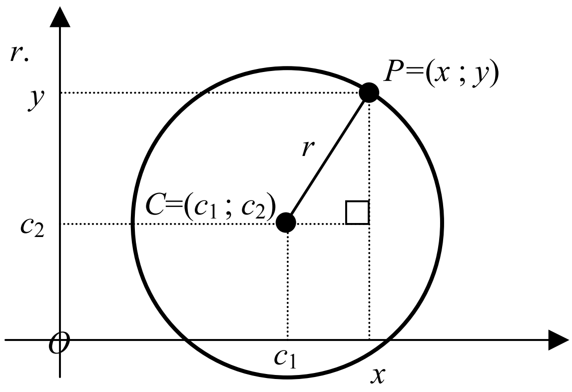
Exercice 8.1 :

Soit $P=(x ; y)$ un point appartenant au **cercle** Γ de rayon r et de centre $C=(0 ; 0)$.
Déterminez une équation reliant x et y.
Un exercice similaire a déjà été vu en 2.4e).
La distance entre le point P et l'origine O est constante égale à r.
Cette distance est la norme du vecteur $(x ; y)$, donc $\sqrt{x^2 + y^2} = r$.
Pour éviter une racine carrée, on écrit : $x^2 + y^2 = r^2$.

Exercice 8.2 :

Soit $P=(x ; y)$ un point appartenant au **cercle** Γ de rayon r et de centre $C=(c_1 ; c_2)$.

Déterminez une équation reliant x et y.
La distance entre le point P et le point C est constante égale à r.
Cette distance est la norme du vecteur $(x ; y) - (c_1 ; c_2)$.
donc $\sqrt{(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2} = r$.
Pour éviter une racine carrée, on écrit : $(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = r^2$



En résumé l'exercice 8.2 montre que

$$\boxed{(x ; y) \in \Gamma \iff (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = r^2}$$

Cette équation s'appelle **l'équation cartésienne** du cercle Γ.

Exercice 8.3 :

Déterminez l'équation cartésienne du cercle de rayon r et de centre $C=(c_1 ; c_2)$ où :

a) $C=(3 ; 0)$ et $r = 2$.
$(x-3)^2 + y^2 = 4$

b) $C=(17 ; -24)$ et $r = \sqrt{12}$.
$(x-17)^2 + (y+24)^2 = 12$

c) $C=(0 ; 0)$ et $r = 1$. Comment s'appelle ce cercle ?
$x^2 + y^2 = 1$. C'est le cercle trigonométrique. Utile pour l'exercice 8.4*.

Exercice 8.4* :

Déterminez une **équation paramétrique** du cercle de rayon r et de centre $C=(c_1 ; c_2)$.

Les points sur le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre $(0 ; 0)$ et de rayon 1 sont :

$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$ $t \in [0 ; 2\pi[$ C'est l'équation paramétrique du cercle trigonométrique.

Une équation paramétrique du cercle de centre $(0 ; 0)$ et de rayon r est

$\begin{cases} x = r \cdot \cos(t) \\ y = r \cdot \sin(t) \end{cases}$ $t \in [0 ; 2\pi[$

Pour obtenir un cercle de centre $(c_1 ; c_2)$ et de rayon r, il suffit d'additionner $(c_1 ; c_2)$ à $(x ; y)$.

$\begin{cases} x = c_1 + r \cdot \cos(t) \\ y = c_2 + r \cdot \sin(t) \end{cases}$ $t \in [0 ; 2\pi[$ est une équation paramétrique du cercle de centre $(c_1 ; c_2)$ et rayon r.

Exercice 8.5 :

L'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ détermine bien un cercle.

Quel est son centre et quel est son rayon ?

Cette équation peut s'écrire sous la forme : $x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 4$.

On a ajouté deux fois 0, ce qui a l'avantage de mettre en évidence deux identités remarquables.

L'équation devient : $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 + 2^2 + 1$, donc $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$.

C'est l'équation cartésienne d'un cercle de centre : $(2 ; -1)$ et de rayon 3.

Exercice 8.6 :

L'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 4 = 0$ détermine-t-il un cercle.

Si oui, quel est son centre et quel est son rayon ?

Il n'existe aucune valeur de x et de y dans $\mathbb{R}$ satisfaisant cette équation, elle ne détermine donc aucun point et donc aucun cercle.

Exercice 8.7 :

L'équation cartésienne $4x^2 + 4y^2 + 40x - 48y + 219 = 0$ détermine-t-il un cercle.

Si oui, quel est son centre et quel est son rayon ?

On peut commencer par simplifier en divisant tout par 4 : $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 54,75 = 0$

Comme dans l'exercice 8.5, cette équation peut s'écrire sous une forme plus utile :

$x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2 - 5^2 + y^2 - 2 \cdot 6y + 6^2 - 6^2 + 54,75 = 0$.

L'équation devient : $(x+5)^2 + (y-6)^2 = 25 + 36 - 54,75$, donc $(x+5)^2 + (y-6)^2 = 6,25 = 2,5^2$.

C'est l'équation cartésienne d'un cercle de centre : $(-5 ; 6)$ et de rayon 2,5.

Exercice 8.9 :

L'équation cartésienne $4x^2 + 4y^2 + 40x - 48y + 260 = 0$ détermine-t-il un cercle.

Si oui, quel est son centre et quel est son rayon ?

On peut commencer par simplifier en divisant tout par 4 : $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 65 = 0$

Comme précédemment, cette équation peut s'écrire sous une forme plus utile :

$x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2 - 5^2 + y^2 - 2 \cdot 6y + 6^2 - 6^2 + 65 = 0$.

L'équation devient : $(x+5)^2 + (y-6)^2 = 25 + 36 - 65$, donc $(x+5)^2 + (y-6)^2 = -4$.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, cette équation n'a pas de solution et ne détermine pas de cercle.

Les mathématiciens ne s'arrêtent pas là et imagine un cercle de rayon $\sqrt{-4} = 2 \cdot i$ dans le plan complexes $\mathbb{C}^2$, indispensable à la physique moderne (mécanique quantique).

Exercice 8.10 :

a) Comment passer d'une équation cartésienne d'un cercle à une équation paramétrique du cercle ?
b) Comment passer d'une équation paramétrique d'un cercle à une équation cartésienne du cercle ?

a) Si le cercle est donné sous la forme $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$, alors, son centre et son rayon sont connus, donc l'équation paramétrique associée est immédiate : $\begin{cases} x=c_1+r\cdot\cos(t) \\ y=c_2+r\cdot\sin(t) \end{cases}$ $t\in[0\,;2\pi[$

b) Dans l'autre sens, l'équation paramétrique donne le centre et le rayon immédiatement.

Exercice 8.11 :

Soit Γ un cercle d'équation $(x-3)^2+(y+2)^2=36$.

a) Donnez le centre et le rayon de Γ. Centre = (3 ; –2), rayon = 6

b) Le point A=(2 ; –4) appartient-il à Γ ? $(2-3)^2+(-4+2)^2=1+4\neq 36$, donc non $A\notin\Gamma$.

c) Trouvez les coordonnées des points de Γ ayant pour abscisse $x=-2$.

Il faut trouver les y satisfaisant : $(-2-3)^2+(y+2)^2=36$

Donc $(y+2)^2=36-25=11$, donc $y+2=\pm\sqrt{11}$, $y=\pm\sqrt{11}-2$.

Il y a deux points de Γ ayant pour abscisse $x=-2$, qui sont : $(-2\,;\sqrt{11}-2)$ et $(-2\,;-\sqrt{11}-2)$.

d) Trouvez les coordonnées des points de Γ ayant pour ordonnée $y=0$.

Il faut trouver les y satisfaisant : $(x-3)^2+(0+2)^2=36$

Donc $(x-3)^2=36-4=32$, donc $x-3=\pm\sqrt{32}=\pm 4\cdot\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{11}-2$.

Il y a deux points de Γ ayant pour ordonnée $y=0$, qui sont : $(4\cdot\sqrt{2}+3\,;0)$ et $(-4\cdot\sqrt{2}+3\,;0)$.

Réponses en valeur exacte.

Exercice 8.12 :

Si cela est possible, déterminer le centre C et le rayon r des cercles suivants :

a) Γ : $x^2+y^2-25=0$. Centre = (0 ; 0), rayon = 5.

b) Γ : $x^2+y^2+36=0$ pas de solutions, donc ce n'est pas un cercle.

c) Γ : $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

$x^2-4x+2^2-2^2+y^2+6y+3^3-3^2+4=0$

$(x-2)^2+(y+3)^2=4+9-4=9$. Centre = (2 ; –3), rayon = 3.

d) Γ : $x^2+y^2+4x+6y+13=0$

$x^2+4x+2^2-2^2+y^2+6y+3^3-3^2+13=0$

$(x+2)^2+(y+3)^2=4+9-13=0$.

Les solutions de cette équation se réduisent à un point qui est (–2 ; –3). Ce n'est pas un cercle.

8.12, suite.

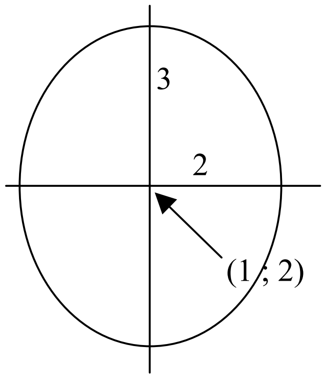
e) $\Gamma : \ x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
$x^2 - 8x + 4^2 - 4^2 + y^2 - 6y + 3^3 - 3^2 = 0$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 16 + 9 = 25$. Centre = (4 ; 3), rayon = 5.

f) $\Gamma : \ x^2 + y^2 - 27 = 0$. Centre = (0 ; 0), rayon = $\sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3}$.
g) $\Gamma : \ 2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y + 8 = 0$
Il est bon de simplifier par 2 au départ : $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$
C'est la même équation et donc le même cercle qu'en c).
h*) $\Gamma : \ 9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$
Cette fois, x^2 et y^2 ne sont pas multiplié par le même nombre. transformons cette équation :
$(3x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3x + 3^2 - 3^2 + (2y)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2y + 4^2 - 4^2 - 11 = 0$.
$(3x-3)^2 + (2y-4)^2 = 11 + 3^2 + 4^2$.
$3^2 \cdot (x-1)^2 + 2^2 \cdot (y-2)^2 = 36$.

On écrit généralement ceci sous la forme : $\dfrac{(x-1)^2}{2^2} + \dfrac{(y-2)^2}{3^2} = 1$.

Ce n'est pas l'équation d'un cercle, mais d'une ellipse, centrée en (1 ; 2),
de demi petit axe = 2 en x et de demi grand axe = 3 en y.
L'équation paramétrique correspondante est : $\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \cos(t) \\ y = 2 + 3 \cdot \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0 ; 2\pi[$



Exercice 8.13* :
Déterminer *l'équation*, *le centre* et *le rayon* du cercle passant par les points :
$E = (3 ; 1)$; $F = (0 ; 2)$; $G = (-2 ; -4)$.

Notons $(s ; t)$ le centre du cercle. Les distances au centre doivent être les mêmes, donc :

$(3-s)^2 + (1-t)^2 = (0-s)^2 + (2-t)^2 = (-2-s)^2 + (-4-t)^2$ On développe et simplifie par $s^2 + t^2$.

$9 - 6s + 1 - 2t = 4 - 4t = 4 + 4s + 16 + 8t$ De la 2ème égalité, on a : $-16 - 12t = 4s$, donc $s = -4 - 3t$.
On substitue dans la première égalité : $-6 \cdot (-4 - 3t) - 2t + 10 = 4 - 4t$, donc
$24 + 18t - 2t + 10 = 4 - 4t$, $20t = -30$, on trouve : $\underline{\underline{t = -1{,}5}}$ et donc $s = -4 + 3 \cdot 1{,}5 = \underline{\underline{s = 0{,}5}}$

Maintenant que l'on a le centre, le rayon au carré vaut : $r^2 = (0 - 0{,}5)^2 + (2 + 1{,}5)^2 = 12{,}5$
L'équation du cercle passant par ces trois points est : $\underline{\underline{(x - 0{,}5)^2 + (y + 1{,}5)^2 = 12{,}5}}$

Exercice 9.1 :
Soit le cercle Γ d'équation : $x^2 + y^2 - 25 = 0$ et

la droite D d'équation : $\langle x ; y \rangle = \langle -18 ; 1 \rangle + \lambda \cdot \langle 7 ; 1 \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Déterminez les points d'intersections de cette droite D et de ce cercle Γ.
Il faut résoudre : $(-18 + 7\lambda)^2 + (1 + \lambda)^2 - 25 = 0$
Donc $18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 7\lambda + 49\lambda^2 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 - 25 = 0 \quad \Leftrightarrow$
$50\lambda^2 - 250\lambda + 300 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 3) = 0$
Soit $\lambda = 2$ et $\langle x ; y \rangle = \langle -18 ; 1 \rangle + 2 \cdot \langle 7 ; 1 \rangle = \langle -4 ; 3 \rangle$ est un point d'intersection,
soit $\lambda = 3$ et $\langle x ; y \rangle = \langle -18 ; 1 \rangle + 3 \cdot \langle 7 ; 1 \rangle = \langle 3 ; 4 \rangle$ est un autre point d'intersection.
Il n'y en a pas d'autres.

Exercice 9.2 :

Soit le cercle Γ d'équation : $(x-3)^2+(y+7)^2-169=0$ et

la droite D d'équation : $\left\langle x\,;y\right\rangle=\left\langle 8\,;5\right\rangle+\lambda\cdot\left\langle 2\,;7\right\rangle$ $\lambda\in\mathbb{R}$.

Déterminez les points d'intersections de cette droite D et de ce cercle Γ.

Il faut résoudre : $(8+2\lambda-3)^2+(5+7\lambda+6)^2-169=0$ i.e. $(5+2\lambda)^2+(12+7\lambda)^2-169=0$

Donc $5^2+2\cdot5\cdot2\lambda+4\lambda^2+12^2+2\cdot12\cdot7\lambda+49\lambda^2-169=0$ $\Leftrightarrow$

$53\lambda^2+188\lambda=0$

Soit $\lambda=0$ et $\left\langle x\,;y\right\rangle=\left\langle 8\,;5\right\rangle$ est un point d'intersection,

soit $\lambda=-\dfrac{188}{53}$ et $\left\langle x\,;y\right\rangle=\left\langle 8\,;5\right\rangle-\dfrac{188}{53}\cdot\left\langle 2\,;7\right\rangle=\left\langle\dfrac{48}{53};\dfrac{-1051}{53}\right\rangle\approx\left\langle 0,905660377\,;-19,83018868\right\rangle$ est un autre point d'intersection.

Il n'y en a pas d'autres.

Exercice 9.3 :

Soit le cercle Γ d'équation : $(x-3)^2+(y+7)^2-169=0$ et

la droite D d'équation : $\left\langle x\,;y\right\rangle=\left\langle 0\,;-23\right\rangle+\lambda\cdot\left\langle 2\,;7\right\rangle$ $\lambda\in\mathbb{R}$.

Déterminez les points d'intersections de cette droite D et de ce cercle Γ.

On peut soit résoudre comme l'exercice précédent, soit se rendre compte qu'il s'agit du même cercle et de la même droite, décrite différemment, et donc les points d'intersections sont les mêmes.

On trouve pour λ : soit $\lambda=4$, soit $\lambda=\dfrac{24}{53}$.

Exercice 9.4 :

Soit le cercle Γ d'équation : $(x-3)^2+(y+7)^2-169=0$ et

la droite D d'équation : $y=3,5\cdot x-23$.

Déterminez les points d'intersections de cette droite D et de ce cercle Γ.

Ici il est plus difficile de ce rendre compte que c'est de nouveau le même cercle et la même droite.

Voici une résolution standard, par substitution :

$(x-3)^2+(3,5\cdot x-23+7)^2-169=0$, $\Leftrightarrow$ $(x-3)^2+(3,5\cdot x-16)^2-169=0$

On développe : $x^2-6x+9+3,5^2\cdot x^2-2\cdot3,5\cdot16\cdot x+16^2-169=0$

Donc $13,25x^2-118x+96=0$ Le discriminant vaut : $\Delta=118^2-4\cdot13,25\cdot96=8836=94^2$.

Donc soit $x=\dfrac{118-94}{2\cdot13,25}=\dfrac{24}{26,5}=\dfrac{48}{53}$ et $y=3,5\cdot\dfrac{48}{53}-23=\dfrac{-1051}{53}$. $\left\langle\dfrac{48}{53};\dfrac{-1051}{53}\right\rangle$ est une intersection,

soit $x=\dfrac{118+94}{2\cdot13,25}=\dfrac{212}{26,5}=8$ et $y=3,5\cdot8-23=5$. $\left\langle 8\,;5\right\rangle$ est une autre intersection.

Ce sont bien les même que précédemment.

Il n'y en a pas d'autre, car ce sont les seules solutions des équations.

Exercice 9.5 :
Soit le cercle Γ d'équation : $x^2 + y^2 - 50 = 0$ et

la droite D d'équation : $y = 3 \cdot x + 1$.

Déterminez les points d'intersections de cette droite D et de ce cercle Γ.

Voici une résolution standard, par substitution :
$x^2 + (3 \cdot x + 1)^2 - 50 = 0$.
On développe : $x^2 + 9x^2 + 6 \cdot x + 1 - 50 = 0$.
Donc $10x^2 + 6x - 49 = 0$ Le discriminant vaut : $\Delta = 6^2 + 4 \cdot 10 \cdot 49 = 1996$. $\sqrt{\Delta} = 2 \cdot \sqrt{499}$
Donc soit $x = \dfrac{-6 - 2 \cdot \sqrt{499}}{20} = \dfrac{-3 - \sqrt{499}}{10} \approx -2,53383079$ et $y = 3 \cdot \dfrac{-3 - \sqrt{499}}{10} + 1 \approx -6,601492371$,
soit $x = \dfrac{-6 + 2 \cdot \sqrt{499}}{20} = \dfrac{-3 + \sqrt{499}}{10} \approx 1,93383079$ et $y = 3 \cdot \dfrac{-3 + \sqrt{499}}{10} + 1 \approx 6,801492371$ est une autre intersection.
Il n'y en a pas d'autre, car ce sont les seules solutions des équations.

Exercice 9.6* :
Soit les cercles Γ_1 d'équation : $x^2 + y^2 - 36 = 0$ et Γ_2 d'équation : $(x-4)^2 + (y-1)^2 - 31 = 0$.
Déterminez les points d'intersections de ces deux cercles.
Ici, la résolution standard se fait en deux étapes :
Etape 1 :
Equation de Γ_2 $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 - 31 = 0$, on lui soustrait l'équation de Γ_1.
$-8x + 16 - 2y + 1 - 31 + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -8x - 2y + 22 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x - y + 11 = 0$
Donc $\underline{\underline{y = -4x + 11}}$ est l'équation de la droite passant par les deux points d'intersections.
Etape 2 :
On est ramené à l'intersection d'une droite et d'un cercle.
$x^2 + (-4 \cdot x + 11)^2 - 36 = 0$.
On développe : $x^2 + 16x^2 - 88 \cdot x + 121 - 36 = 0$.
Donc $17x^2 - 88x + 85 = 0$ Le discriminant vaut : $\Delta = 88^2 - 4 \cdot 17 \cdot 85 = 1964 = 4 \cdot 491$.
Donc soit $x = \dfrac{88 - 2 \cdot \sqrt{491}}{2 \cdot 17} = \dfrac{44 - \sqrt{491}}{17} \approx 1,284792953$ et $y = -4 \cdot \dfrac{44 - \sqrt{491}}{17} + 11 \approx 5,86082819$,
soit $x = \dfrac{88 + 2 \cdot \sqrt{491}}{2 \cdot 17} = \dfrac{44 + \sqrt{491}}{17} \approx 3,891677636$ et $y = -4 \cdot \dfrac{44 + \sqrt{491}}{17} + 11 \approx -4,566710543$ est une autre intersection.
Il n'y en a pas d'autre, car ce sont les seules solutions des équations.

Exercice 9.7* :

Soit les cercles Γ_1 d'équation : $x^2+y^2-9=0$ et Γ_2 d'équation : $(x-6)^2+(y-1)^2-4=0$.

Déterminez les points d'intersections de ces deux cercles.

Comme précédemment :

Etape 1 :

Equation de Γ_2 $x^2-12x+36+y^2-2y+1-4=0$, on lui soustrait l'équation de Γ_1.

$-12x+36-2y+1-4+9=0 \Leftrightarrow -12x-2y+42=0 \Leftrightarrow -6x-y+21=0$

Donc $\underline{\underline{y=-6x+21}}$ semble être l'équation de la droite passant par les deux points d'intersections.

Etape 2 :

On est ramené à l'intersection d'une droite et d'un cercle.

$x^2+(-6\cdot x+21)^2-9=0$.

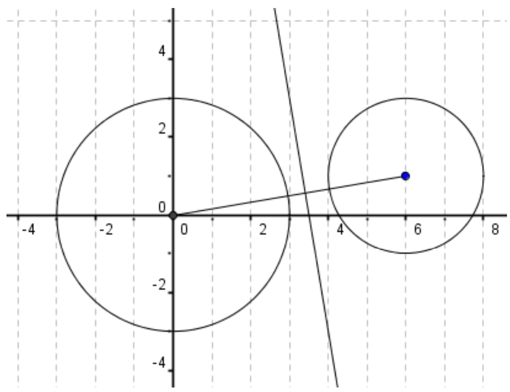
On développe : $x^2+36x^2-252\cdot x+21^2-9=0$.

Donc $37x^2-252x+432=0$ Le discriminant vaut : $\Delta=252^2-4\cdot 37\cdot 432=-432$.

Le discriminant étant négatif, **il n'y a pas de solution**. Ceci se voit facilement en traçant les deux cercles, qui sont trop éloignés l'un de l'autre pour avoir une intersection.

Mais alors, que représente l'équation de la droite $y=-6x+21$?

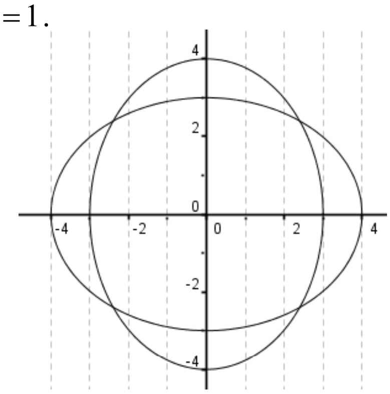
Faites un dessin, c'est une droite perpendiculaire au segment reliant les deux centres, qui sépare les deux disques.



Exercice 9.8* :

Soit les ellipses E_1 d'équation : $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ et E_2 d'équation : $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$.

Déterminez les points d'intersections de ces deux ellipses. (Il y en a 4.)



Par symétrie, on voit que $x=\pm y$, et donc $\frac{x^2}{4^2}+\frac{x^2}{3^2}=1$

$$x^2\cdot\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{9}\right)=1 \Leftrightarrow x^2\cdot\frac{25}{16\cdot 9}=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{16\cdot 9}{25}$$

Donc $x=\pm\frac{4\cdot 3}{5}=\pm 2,4$.

Il y a 4 solutions qui sont : $\{\langle -2,4\,;-2,4\rangle;\langle -2,4\,;2,4\rangle;\langle 2,4\,;-2,4\rangle;\langle 2,4\,;2,4\rangle\}$

Une autre résolution se fait en multipliant la première équation par 3^2 et la deuxième par 4^2, puis en les soustrayant pour donner : $4^2\frac{x^2}{3^2}-3^2\cdot\frac{x^2}{4^2}=4^2-3^2$, donc $\left(\frac{4^4-3^4}{3^2\cdot 4^2}\right)\cdot x^2=4^2-3^2$

On trouve que $x=\pm\frac{12}{5}=\pm 2,4$, comme précédemment.