❶ a) $\left\langle 2\,;3 \right\rangle + \left\langle -1\,;0 \right\rangle = \left\langle 1\,;3 \right\rangle$

b) $\left\langle \frac{1}{2}\,;2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{3}\,;-\frac{1}{4} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,;2-\frac{1}{4} \right\rangle = \left\langle \frac{5}{6}\,;\frac{7}{4} \right\rangle$

c) $\left\langle 6{,}5\,;-2 \right\rangle + \left\langle 7\,;1 \right\rangle - \left\langle 5\,;-3 \right\rangle = \left\langle 8{,}5\,;2 \right\rangle$

d) $5\cdot\left\langle 2\,;3 \right\rangle = \left\langle 10\,;15 \right\rangle$

e) $2\cdot\left\langle 2\,;8 \right\rangle = \left\langle 4\,;16 \right\rangle$

f) $-\frac{3}{4}\cdot\left\langle 6{,}8\,;\frac{2}{3} \right\rangle = \left\langle -5{,}1\,;-0{,}5 \right\rangle$

❷ a) $\left\langle 3\,;-1 \right\rangle + \left\langle x\,;y \right\rangle = \left\langle 2\,;0 \right\rangle \Leftrightarrow \left\langle x\,;y \right\rangle = \left\langle 2\,;0 \right\rangle - \left\langle 3\,;-1 \right\rangle = \left\langle -1\,;1 \right\rangle$

b) $\left\langle 3\,;-2 \right\rangle + \left\langle x\,;y \right\rangle = \left\langle -3\,;2 \right\rangle \Leftrightarrow \left\langle x\,;y \right\rangle = \left\langle -3\,;2 \right\rangle - \left\langle 3\,;-2 \right\rangle = \left\langle -6\,;4 \right\rangle$

c) $\left\langle x\,;y \right\rangle + \left\langle x\,;y \right\rangle = \left\langle 6\,;-2 \right\rangle \Leftrightarrow \left\langle 2x\,;2y \right\rangle = \left\langle 6\,;-2 \right\rangle \Leftrightarrow \left\langle x\,;y \right\rangle = \left\langle 3\,;-1 \right\rangle$

❸ a) $k\cdot\left\langle 5\,;6 \right\rangle = \left\langle 10\,;12 \right\rangle \Leftrightarrow k=2$

b) $k\cdot\left\langle -4\,;0 \right\rangle = \left\langle 4\,;0 \right\rangle \Leftrightarrow k=-1$

c) $k\cdot\left\langle 2\,;3 \right\rangle = \left\langle 3\,;2 \right\rangle \Leftrightarrow 2k=3$ et $3k=2$, ce n'est pas possible.

❹ $\vec{x} = \left\langle 2\,;3 \right\rangle$; $\vec{y} = \left\langle -1\,;0 \right\rangle$ et $\vec{z} = \left\langle 2\,;-3 \right\rangle$

$\vec{e} = \vec{x}+2\vec{y} = \langle 2\,;3\rangle + 2\cdot\langle -1\,;0\rangle = \langle 2+2\cdot(-1)\,;3+2\cdot 0\rangle = \langle 0\,;3\rangle$

$\vec{f} = -2\vec{x}+\vec{z} = -2\cdot\langle 2\,;3\rangle + \langle 2\,;-3\rangle = \langle -2\cdot 2+2\,;-2\cdot 3-3\rangle = \langle -2\,;-9\rangle$

$\vec{g} = \vec{x}+2\vec{y}-0{,}3\vec{z} = \langle 2\,;3\rangle + 2\cdot\langle -1\,;0\rangle - 0{,}3\cdot\langle 2\,;-3\rangle = \langle 2+2\cdot(-1)-0{,}3\cdot 2\,;3+2\cdot 0-0{,}3\cdot(-3)\rangle =$

$\vec{g} = \langle -0{,}6\,;3{,}9\rangle$

❺ $A = \left\langle -3\,;1 \right\rangle$; $B = \left\langle 1\,;3 \right\rangle$; $C = \left\langle 4\,;1 \right\rangle$ et $D = \left\langle 2\,;0 \right\rangle$

Montrons que : $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \langle 1\,;3\rangle - \langle -3\,;1\rangle = \langle 4\,;2\rangle$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \langle 2\,;0\rangle - \langle 4\,;1\rangle = \langle -2\,;-1\rangle = -0{,}5\cdot\langle 4\,;2\rangle = -0{,}5\cdot\overrightarrow{AB}$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont multiple l'un de l'autre, ils sont parallèle.

❻ $A = \left\langle 2\,;1 \right\rangle$; $B = \left\langle 6\,;4 \right\rangle$ et $C = \left\langle 2\,;6 \right\rangle$

a) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\| \left\langle 6\,;4 \right\rangle - \langle 2\,;1\rangle \right\| = \left\| \left\langle 4\,;3 \right\rangle \right\| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\| \left\langle 2\,;6 \right\rangle - \langle 2\,;1\rangle \right\| = \left\| \left\langle 0\,;5 \right\rangle \right\| = \sqrt{0^2+5^2} = \sqrt{25} = 5$

c) Puisque les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont de même longueur, le triangle est isocèle.

❼ $A = \langle\ 0 ; 0\ \rangle$; $B = \langle\ 6 ; 8\ \rangle$ et $C = \left\langle\ 3 + 4 \cdot \sqrt{3} ; 4 - 3 \cdot \sqrt{3}\ \right\rangle$

a) Pour montrer que le triangle ABC est équilatéral, il faut montrer que la longueur des trois côtés est la même.

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\ \langle\ 6 ; 8\ \rangle\ \right\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\ \left\langle\ 3 + 4 \cdot \sqrt{3} ; 4 - 3 \cdot \sqrt{3}\ \right\rangle\ \right\| = \sqrt{\left(3 + 4 \cdot \sqrt{3}\right)^2 + \left(4 - 3 \cdot \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\ \left\langle\ 3 + 4 \cdot \sqrt{3} ; 4 - 3 \cdot \sqrt{3}\ \right\rangle - \langle\ 6 ; 8\ \rangle\ \right\| = \sqrt{\left(-3 + 4 \cdot \sqrt{3}\right)^2 + \left(-4 - 3 \cdot \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{100} = 10$$

Le triangle ABC est équilatéral, car les trois côtés sont de même longueur.

❽ $A = \langle\ 3 ; 8\ \rangle$; $B = \langle\ -11 ; 3\ \rangle$ et $C = \langle\ -8 ; -2\ \rangle$

Calculons la longueur des trois côtés, pour montrer que deux côtés sont de même longueur et donc que le triangle ABC est isocèle.

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\ \langle\ -11 ; 3\ \rangle - \langle 3 ; 8 \rangle\ \right\| = \left\|\ \langle\ -14 ; -5\ \rangle\ \right\| = \sqrt{(-14)^2 + (-5)^2} = \sqrt{221}$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\ \langle\ -8 ; -2\ \rangle - \langle 3 ; 8 \rangle\ \right\| = \left\|\ \langle\ -11 ; -10\ \rangle\ \right\| = \sqrt{(-11)^2 + (-10)^2} = \sqrt{221}$$

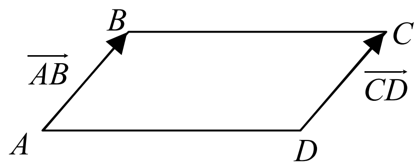
Puisque les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont de même longueur, le triangle est isocèle.

Pour savoir s'il est équilatéral, calculons la longueur du côté $[BC]$.

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\ \langle\ -8 ; -2\ \rangle - \langle -11 ; 3 \rangle\ \right\| = \left\|\ \langle\ 3 ; -5\ \rangle\ \right\| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

On peut en conclure que le triangle n'est pas équilatérale.

❾ $A = \langle\ 5 ; 2\ \rangle$; $B = \langle\ 0 ; 0\ \rangle$; $C = \langle\ 4 ; -10\ \rangle$ et $D = \langle\ 9 ; -8\ \rangle$



$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \langle\ 0 ; 0\ \rangle - \langle 5 ; 2\ \rangle = \langle\ -5 ; -2\ \rangle$$

$$\overrightarrow{DC} = \langle\ 4 ; -10\ \rangle - \langle 9 ; -8\ \rangle = \langle\ -5 ; -2\ \rangle$$

On a bien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Une autre manière de faire est de calculer la longueur des côtés.

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\langle\ -5 ; -2\ \rangle\right\| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

$$\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\langle\ -5 ; -2\ \rangle\right\| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\langle\ 9 - 5 ; -8 - 2\ \rangle\right\| = \left\|\langle\ 4 ; -10\ \rangle\right\| = \sqrt{16 + 100} = \sqrt{116}$$

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\langle\ 4 ; -10\ \rangle\right\| = \sqrt{16 + 100} = \sqrt{116}$$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

C'est plus long, mais correcte.