1.a) $P_1(x)$ est un polynôme de degré 6.
1.b) $P_2(x) = 4x^2+4x+1-4x^2-4x=1$. C'est un polynôme constant de degré 0.
1.c) $P_3(x)$ est un polynôme de degré 3.
1.d) $P_4(x)$ est un polynôme de degré 4.
1.e) $P_5(x) = 5\cdot x^{10} + \ldots$ est un polynôme de degré 10.
1.f) $P_6(x)$ n'est pas polynôme, car il n'est pas défini en $x = 0$.

(9 points) 10 minutes

---

2. $P(x)=2x^4+9x^3-9x^2-18x+10$

Cherchons une ou des racine(s) rationnelles de ce polynômes.
Avec l'indication, cherchons une racine de la forme : ±1 ; ±1/2.
On vérifie que $P(1/2) = 0$.
On effectue une division polynomiale de $P(x)$ par $(2x - 1)$ pour obtenir :
$P(x)=2x^4+9x^3-9x^2-18x+10=(2x-1)\cdot(x^3+5x^2-2x-10)$.

Il faut chercher une racine de $x^3+5x^2-2x-10$, qui peut être : ±1 ; ±2 ; ±5 ; ±10.
On vérifie que $P(-5) = 0$.
On effectue une division polynomiale de $x^3+5x^2-2x-10$ par $(x + 5)$ pour obtenir :
$P(x)=2x^4+9x^3-9x^2-18x+10=(2x-1)\cdot(x+5)\cdot(x^2-2)$.

Donc l'ensemble des zéros de $P(x)$: $\underline{\underline{Zéros(P)=\left\{\frac{1}{2};-5;-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}}}$.

(10 points) 15 minutes

/4 **3.a** $P_1(x)=x^3+6x^2+11x+6$

Cherchons une ou des racine(s) rationnelle(s) de ce polynôme.
Puisque tous les signes sont positifs, les racines ne peuvent pas être positives.
Les seuls candidats possibles sont : −1 ; −2 ; −3 ; −6.
On vérifie que $P(-1) = -1 + 6 -11 + 6 = 0$.
On vérifie que $P(-2) = -8 + 24 -22 + 6 = 0$.
On vérifie que $P(-3) = -27 + 54 -33 + 6 = 0$.
Le coefficient dominant égale 1, donc : $P_1(x)=(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)$

/6 **3.b** $P_2(x)=15x^3-2x^2+2x-1$

Cherchons une ou des racine(s) rationnelles de ce polynômes.
Puisque tous les signes sont alternés, les racines ne peuvent pas être négatives.
Les seuls candidats possibles sont : 1 ; 1/3 ; 1/5 ; 1/15.
On vérifie que $P(1) = 15 - 2 + 1 - 1 \neq 0$.
On vérifie que $P(1/3) = 5/9 - 2/9 + 2/3 - 1 = 0$.
On vérifie que $P(1/5) = 3/25 - 2/25 + 2 / 5 - 1 \neq 0$.
On vérifie que $P(1/15) = \ldots \neq 0$. Pas utile de faire ce calcul.
On effectue une division polynomiale pour obtenir :
$P_2(x)=15x^3-2x^2+2x-1=(x-1/3)\cdot(15x^2+3x+3)=(x-1/3)\cdot 3\cdot(5x^2+x+1)$
Pour terminer la factorisation et factoriser $5x^2 + x + 1$, il faut utiliser Viète.
$a = 5$; $b = 1$; $c = 1$; $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 20 = -19 < 0$ => non factorisable.
$P_2(x)=(x-1/3)\cdot 3\cdot(5x^2+x+1)\underline{\underline{=(3x-1)\cdot(5x^2+x+1)}}$

Tournez la page ...

/6 **3.c** $P_3(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 2$

Utilisons l'indication pour effectuer une division polynomiale de $P_3(x)$ par $x^2 - x - 1$.
On effectue la division polynomiale pour obtenir :
$P_3(x) = (x^2 - x - 1)\cdot(x^2 + 2x + 2)$

Utilisons Viète, pour vérifier si les deux facteurs sont encore factorisable.
Pour le polynôme : $x^2 - x - 1$
$a = 1$; $b = -1$; $c = -1$; $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5$ => factorisable.
Racines = $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, donc $x^2 - x - 1 = \left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Pour le polynôme : $x^2 + 2x + 2$
$a = 1$; $b = 2$; $c = 2$; $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$ => non factorisable.
Conclusion : la factorisation complète de P_3 est :
$P_3(x) = \left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot(x^2 + 2x + 2)$

(16 points) 20 minutes

/2 **4.a** $x - 7 = 3x - 12 \Leftrightarrow 5 = 2x \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 5/2}}$ S = { 5/2 }

/2 **4.b** $6x - 17 = 6x - 12 \Leftrightarrow 0 = 5 \Leftrightarrow$ impossible S = ∅ ou S = { } il n'y a pas de solution.

/6 **4.c** Mise au dénominateur commun : $\dfrac{x - 1 + x\cdot(x^2 + x)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)} = \dfrac{x\cdot(x+1)\cdot(x-1) + 2\cdot x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$

$x - 1 + x^3 + x^2 = x^3 - x + 2x \Leftrightarrow -1 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \pm 1}}$

Mais en vérifiant, $x = 1$ et $x = -1$ annulent le dénominateur, donc il n'y a pas de solution.
S = ∅ ou S = { }

(10 points) 15 minutes

/2 **5.a** Faux, $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)$ et $2\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)$ sont deux polynômes de degré 4, différents, et ont 4 racines identiques.

/2 b) $P(x) = a\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ et $P(0) = a \cdot 6 = 24$, donc $a = 4$.

Donc l'affirmation est vraie, le seul polynôme satisfaisant les données est :
$P(x) = 4\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$.

/2 c) C'est vrai qu'il existe un polynômes de degré 4 qui n'a aucune racine réelle. Par exemple $x^4 + 1$ est un polynôme de degré 4 qui n'a aucune racine réelle.

/2 d) C'est faux, si a est une racine du polynôme $P(x)$, alors c'est $(x - a)$ qui divise $P(x)$.

Il suffit de considérer le polynôme $P(x) = x + a$ pour donner un contre-exemple.

(8 points) 20 minutes

Barème :

1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
0..6	7..13	14..19	20..26	27..32	33..37	38..41	42..46	47..50	51..55