I. Rappels de notations et de conventions

Les mathématiciens utilisent de nombreux symboles pour abréger leurs énoncés.
En voici quelques-uns.

symbole	signification :
$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres entiers plus grand ou égale à 0
$\mathbb{Z}$	l'ensemble des nombres entiers relatifs. Ils peuvent être positifs ou négatifs ou nul.
$\mathbb{Q}$	l'ensemble des nombres rationnels. Correspond aux nombres s'écrivant sous forme de fraction.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels. Correspond aux nombres avec ou sans virgules.
$\mathbb{R}_+$	l'ensemble des nombres réels positifs ou nul.
$\mathbb{R}_-$	l'ensemble des nombres réels négatifs ou nul.
$\mathbb{R}^*$	l'ensemble des nombres réels sauf le zéro.
$[a\,;b]$	l'intervalle fermé de a à b. Correspond à tous les nombres entre a et b, a et b compris.
$]a\,;b[$	l'intervalle ouvert de a à b. Correspond à tous les nombres entre a et b, a et b non compris.
$]-\infty; b]$	l'intervalle de moins l'infini à b. Correspond aux nombres plus petits ou égaux à b.
$[a\,;\infty[$	l'intervalle de a à plus l'infini. Correspond aux nombres plus grands ou égaux à a.

symbole	se lit :	exemples :
$\in$	"appartient à"	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $\sqrt{2}$ appartient aux nombres réels.
$\notin$	"n'appartient pas à"	$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\sqrt{2}$ n'appartient pas aux nombres rationnels.
$\subset$	"est inclus dans"	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ qui est inclus dans $\mathbb{Q}$ qui est ...
$\Rightarrow$	"implique" ou "donc" ou "si ... alors ..."	"n est divisible par 4 $\Rightarrow$ n est divisible par 2". "n est divisible par 4 implique n est divisible par 2" ou "Si n est divisible par 4 alors n est divisible par 2".
$\Leftrightarrow$	"si et seulement si" ou "est équivalent à"	"$n \in \mathbb{Z}$ et n^2 est divisible par 2 $\Leftrightarrow$ n est divisible par 2". "$n \in \mathbb{Z}$ et n^2 est divisible par 2 si et seulement si n est divisible par 2".
$\forall$	"pour tout" "quel que soit"	$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \in \mathbb{R}_+$. Pour tout nombre réel x, x^2 appartient aux réels positifs ou nul.
$\exists$	"il existe un"	$\exists\, x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$. Il existe un nombre réel x, tel que $x^2 = 2$.
∞	"l'infini"	x tend vers ∞. x tend vers l'infini. x devient de plus en plus grand.
$-\infty$	"moins l'infini"	x tend vers $-\infty$. x tend vers moins l'infini. x devient de plus en plus négatif.
$\pm$	"plus ou moins"	x tend vers $\pm\infty$. x tend vers plus l'infini ou moins l'infini.
$<$	"est plus petit que"	$3{,}14 < \pi$. 3,14 est plus petit que π.
$>$	"est plus grand que"	$3{,}15 > \pi$. 3,15 est plus grand que π.
$\geq$	"est plus grand ou égal à"	$\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Pour tout nombre réel x, x^2 est plus grand ou égal à 0.
$\leq$	"est plus petit ou égal à"	$\forall$ x $\in [0\,;1]$, $x^2 \leq x$. Pour tout nombre x entre 0 et 1, x^2 est plus petit ou égal à x.
$\approx$	"est environ égal à"	$3{,}14 \approx \pi$. 3,14 est environ égal à π.
{...}	"l'ensemble"	$\{-1\,;0\,;1\}$. L'ensemble contenant -1, 0 et 1.
\	"sauf"	$\mathbb{R} \setminus \{-1\,;0\,;1\}$. L'ensemble des réels, sauf l'ensemble { -1, 0 et 1}. $\mathbb{R} \setminus [2\,;3]$. L'ensemble des réels, sauf l'intervalle [2 ; 3].
α, β	alpha, beta	l'utilisation de lettres grecs est courante en mathématiques. En voici la liste : $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta\ \eta\ \theta\ \iota\ \kappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \xi\ o\ \pi\ \rho\ \sigma\ \tau\ \upsilon\ \varphi\ \chi\ \psi\ \omega$.

II. Rappels : équations du second degré et formule de Viète

Le but est de résoudre l'équation $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$,
avec $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ trois nombres quelconques, $\boldsymbol{a} \neq 0$ et $\boldsymbol{x}$ représente l'inconnue.

On définit le **discriminant** que l'on note par la lettre grecque **delta** Δ. $\boxed{\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$

Solutions de : $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Si le <u>discriminant est négatif $\Delta < 0$</u>, la fonction ne s'annule jamais : $S = \varnothing$.

Si le <u>discriminant est nul $\Delta = 0$</u>, la fonction s'annule pour une seule valeur de x qui est :

$$\boxed{x_{\text{zéro}} = -\frac{b}{2 \cdot a}}$$

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{ -\frac{b}{2 \cdot a} \right\}$

Si le <u>discriminant est positif $\Delta > 0$</u>, la fonction s'annule pour deux valeurs de x qui sont :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}}$$

C'est la <u>formule de **Viète**</u>.

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \; ; \; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \right\}$

Remarques :

1) Si le <u>discriminant est positif ou nul $\Delta \geq 0$</u>, la fonction peut s'écrire sous la forme factorisée :

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad \text{où} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

2) Si le nombre $\boldsymbol{a}$ est <u>positif</u>, alors la courbe fait un sourire ☺
Dans ce cas on dit que la parabole est **convexe** et elle possède un <u>minimum</u> en
$x_{\min} = -\frac{b}{2 \cdot a}$; $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4 \cdot a}$

Si le nombre $\boldsymbol{a}$ est <u>négatif</u>, alors la courbe est triste ☹
Dans ce cas on dit que la parabole est **concave** et elle possède un <u>maximum</u> en
$x_{\max} = -\frac{b}{2 \cdot a}$; $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4 \cdot a}$

<u>Exemple :</u> Solutions de $3 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 5 = 0$
$a = 3$; $b = -11$; $c = 5$. $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 61$

$\Delta \geq 0$ donc il y a deux solutions, qui sont : $x_1 = \frac{-(-11) - \sqrt{61}}{2 \cdot 3}$ et $x_2 = \frac{-(-11) + \sqrt{61}}{2 \cdot 3}$.

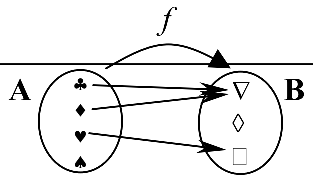
L'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \frac{11 - \sqrt{61}}{2 \cdot 3} \; ; \; \frac{11 + \sqrt{61}}{2 \cdot 3} \right\}$

III. Quelques rappels sur les fonctions

<u>Qu'est-ce que l'Analyse ?</u>
Je dirais que l'analyse est l'algèbre des nombres infiniment petits et infiniment grands.
Un but est d'approcher l'infiniment grand et l'infiniment petit. Une bonne connaissance des fonctions est nécessaire pour faire cela.

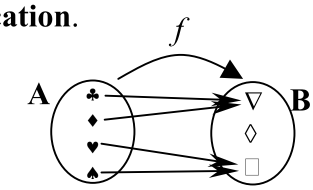
Rappelons la définition d'une fonction et quelques définitions importantes.

<u>Définition :</u>



Une **fonction** est définie par :
1) <u>Un ensemble A</u> appelé **ensemble de départ**, ou **source**.
2) <u>Un ensemble B</u> appelé **ensemble d'arrivée**, ou **but**.
3) <u>Une règle de correspondance</u>, qui à chaque élément de l'ensemble de départ fait correspondre *zéro (aucun)* ou *un* élément de l'ensemble d'arrivée.

Une légère restriction de la définition de fonction amène la notion **d'application**.
<u>Définition :</u>



Une **application** est définie par :
1) <u>Un ensemble A</u> appelé **ensemble de départ**, ou **source**.
2) <u>Un ensemble B</u> appelé **ensemble d'arrivée**, ou **but**.
3) <u>Une règle de correspondance</u>, qui à chaque élément de l'ensemble de départ fait correspondre *exactement un* élément de l'ensemble d'arrivée.

Donc dans une application on n'accepte pas qu'un élément de l'ensemble de départ n'ait aucun élément correspondant dans l'ensemble d'arrivée.

Si $\boldsymbol{a}$ appartient à l'ensemble de départ et $\boldsymbol{b}$ est un élément de l'ensemble d'arrivée qui correspond à $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ est appelé l'**image de** $\boldsymbol{a}$. ($\boldsymbol{a}$ possède au plus une image, exactement une image pour une application.)
$\boldsymbol{a}$ est appelé une **préimage de** $\boldsymbol{b}$. ($\boldsymbol{b}$ peut posséder zéro, une ou plusieurs préimages)

On désigne souvent une fonction ou une application par les lettres $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ ou $\boldsymbol{h}$.

Si on désigne la fonction par $\boldsymbol{f}$ alors on note : $\boldsymbol{f(a)}$ l'image de $\boldsymbol{a}$.

On note une fonction : $\boxed{\begin{array}{l} f : A \to B \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array}}$ On parle d'une **fonction de A dans B**.

On peut toujours restreindre l'ensemble de départ d'une fonction, pour obtenir une application.
<u>Définition :</u>

Le **domaine de définition** d'une fonction $\boldsymbol{f}$ noté **Dom(*f*)** est *la partie de l'ensemble de départ formée des éléments possédant une image*.

Nous étudierons surtout les fonctions réelles, c'est à dire les fonctions dont l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des sous-ensembles de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

<u>Définitions :</u>
Pour une fonction réelle $\boldsymbol{f}$, **l'ordonnée à l'origine** est l'image de 0. C'est le nombre $\boldsymbol{f}(0)$.
L'ensemble des zéros de $\boldsymbol{f}$ est l'ensemble des préimages de 0, c'est-à-dire :
Zéros(*f*) $= \{ x \in \mathrm{Dom}(f)$ tels que $f(x) = 0 \}$ ceci se lit comme suit :
Zéros de *f* = l'ensemble des x appartenant au domaine de définition de $\boldsymbol{f}$, tels que $\boldsymbol{f}$ de x égale 0

<u>Quelques notations :</u>

Si vous ne vous ne savez pas comment noter l'ensemble des préimages, l'ordonnée à l'origine, l'ensemble des zéros, etc. vous pouvez toujours écrire une réponse en français.

Pour une fonction réelle f :

Le domaine de définition de f se note Dom(f). C'est un ensemble.

Dom $(f) = \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ la fonction f est définie pour tout nombre réel.

Dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ $\Leftrightarrow$ la fonction f est définie pour tout nombre réel, sauf le nombre a.

Dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{a\ ;\ b\}$ $\Leftrightarrow$ la fonction f est définie pour tout nombre réel, sauf a et b.

Dom $(f) = \mathbb{R} \setminus [a\ ;\ b]$ $\Leftrightarrow$ la fonction f est définie pour les nombres réels, sauf ceux de l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Dom $(f) = [a\ ;\ b]$ $\Leftrightarrow$ la fonction f n'est définie que pour les nombres de l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

L'image de a par f se note $f(a)$. C'est un nombre réel.

L'ordonnée à l'origine de f se note $f(0)$. C'est l'image de 0.

L'ensemble des préimages de b par f se note : $f^{-1}(b)$.

Si b ne possède pas de préimage par f, on note $f^{-1}(b) = \varnothing$.

Si b possède une seule préimage a par f, on note $f^{-1}(b) = \{a\}$.

Si b possède les préimages a_1, a_2, a_3 et a_4 par f, on note $f^{-1}(b) = \{\ a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ a_4\ \}$.

Si b possède l'intervalle $[a\ ;\ c]$ comme préimages par f, on note $f^{-1}(b) = [a\ ;\ c]$.

Si b possède tous les nombres réels comme préimages par f, on note $f^{-1}(b) = \mathbb{R}$.

L'ensemble des zéros de f se note Zéros(f). C'est l'ensemble des préimages de 0.

On a donc : Zéros(f) = $f^{-1}(0)$. (C'est une égalité entre deux ensembles)

IV Opérations sur deux fonctions réelles

Soit deux fonctions réelles : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
A partir de ces deux fonctions, on peut en définir de nouvelles :

1) **La somme de deux fonctions réelles : $f+g$**
Par définition
$f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$$x\mapsto (f+g)(x)\overset{\text{définition}}{=}f(x)+g(x)$$ A un nombre, on fait correspondre la somme des images par f et par g.

Remarque :
Ne confondez par $f+g$ avec $f(a)+g(a)$!!!
$f+g$ est une fonction obtenue à partir des deux fonctions f et g.
$f(a)+g(a)$ est la somme de deux nombres, images de $\boldsymbol{a}$ par f et images de $\boldsymbol{a}$ par g.

2) **La différence de deux fonctions réelles : $f-g$**
$f-g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$$x\mapsto (f-g)(x)\overset{\text{définition}}{=}f(x)-g(x)$$ A un nombre, on fait correspondre la différence des images par f et par g.

3) **Le produit de deux fonctions réelles : $f\cdot g$**
$f\cdot g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$$x\mapsto (f\cdot g)(x)\overset{\text{définition}}{=}f(x)\cdot g(x)$$ A un nombre, on fait correspondre le produit des images par f et par g.

4) **Le quotient de deux fonctions réelles : $\dfrac{f}{g}$**
$\dfrac{f}{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$$x\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x)\overset{\text{définition}}{=}\frac{f(x)}{g(x)}$$ A un nombre, on fait correspondre le quotient des images par f et par g.

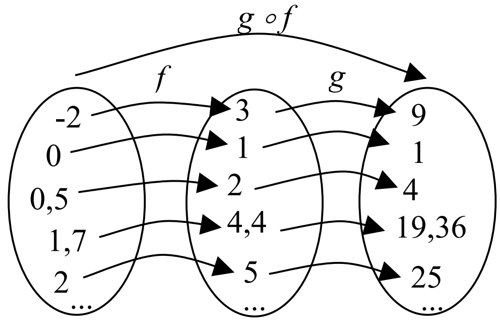
Remarquez qu'on doit exclure du domaine de définition du quotient $\dfrac{f}{g}$ de deux fonctions, tous les zéros de la fonction g.

5) **La composition de deux fonctions réelles : $g\circ f$**
$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$$x\mapsto (g\circ f)(x)\overset{\text{définition}}{=}g(f(x))$$ A un nombre, on fait correspondre son image par f puis l'image du résultat par g.

Pratiquement, on calcule l'image de x par f, c.-à-d. $f(x)$, ensuite on calcule l'image de $f(x)$ par g, c.-à-d. $g(f(x))$.

Exercice IV.1 : Complétez...

a) Soit $g(x) = x^2$ et $f(x) = 2x + 1$.

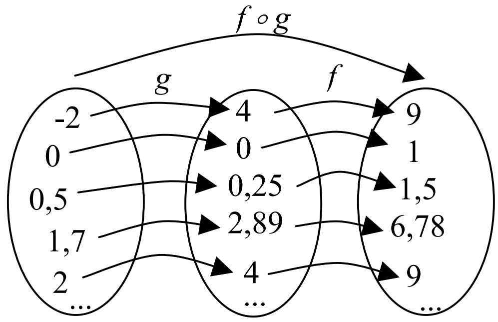


Dom(f) = $\mathbb{R}$

Dom(g) = $\mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2$

Dom($g \circ f$) = $\mathbb{R}$



$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$

Dom($f \circ g$) = $\mathbb{R}$

A-t-on $g \circ f = f \circ g$?

Non, $g \circ f \neq f \circ g$ car certains nombres n'ont pas la même image par les deux fonctions.

b) Soit $g(x) = x^2$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ Dom(g) = $\mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}$

Dom($g \circ f$) = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \dfrac{1}{x^2}$

Dom($f \circ g$) = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) Soit $g(x) = x^2$ et $f(x) = \dfrac{1}{4x - 1}$.

Dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{1/4\}$ Dom(g) = $\mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{4x-1}\right) = \left(\dfrac{1}{4x-1}\right)^2 = \dfrac{1}{(4x-1)^2}$

Dom($g \circ f$) = $\mathbb{R} \setminus \{1/4\}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \dfrac{1}{4x^2 - 1}$ $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$ donc

Dom($f \circ g$) = $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$

Cet exercice vous montre que, en général, la composition d'application n'est pas commutative, c.-à-d. que : $g \circ f \neq f \circ g$.

V. Applications bijectives et applications réciproques

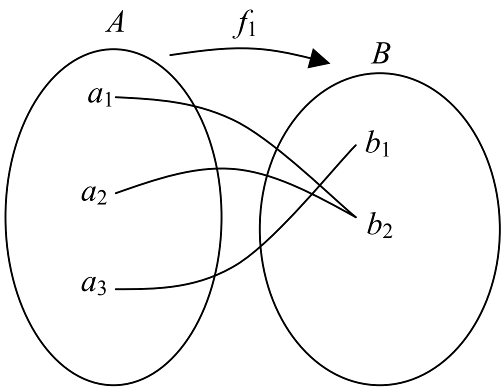
Définition :

Une application $f: A \to B$ est une **application bijective** $\Leftrightarrow$
chaque élément b du but B possède **exactement une** préimage a dans la source A.

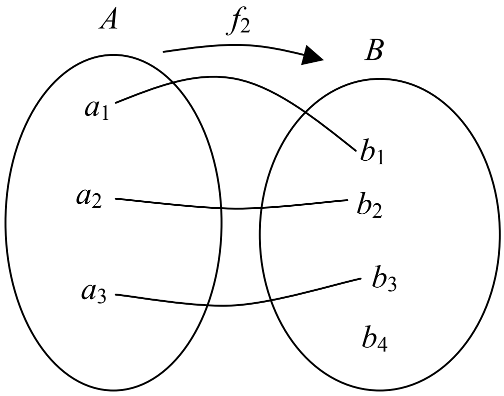
$f: A \to B$ bijective $\Leftrightarrow$ $\forall b \in B$ il existe un unique $a \in A$ tel que $b = f(a)$.

Exercice V.1

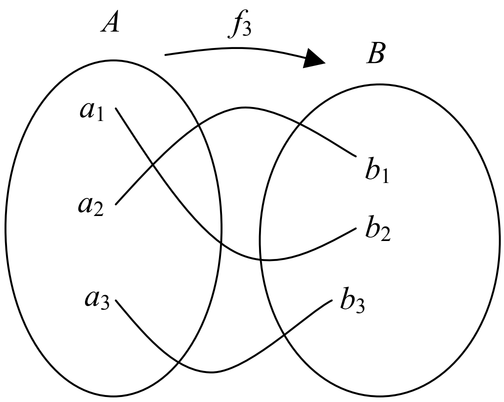
Les représentations fléchées suivantes sont-elles des applications bijectives ?
Indiquez comment modifier les ensembles de départ et/ou d'arrivée pour obtenir des bijections !
Justifiez vos réponses !



f_1 n'est pas bijective, car b_2 possède 2 préimages.



f_2 n'est pas bijective, car b_4 ne possède pas de préimage.



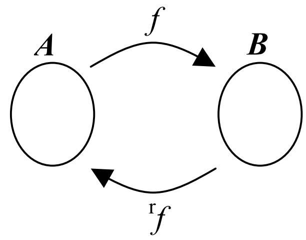
f_3 est bijective, car chaque élément de l'ensemble B possède exactement une unique préimage.

Remarques :

1) Une application bijective est aussi appelée une **bijection**.
2) On peut obtenir une application bijective à partir d'une application non bijective en modifiant les ensembles de départ et d'arrivée.
3) Pour montrer qu'une application n'est pas bijective, il y a deux possibilités.
   i) On peut trouver un élément $b \in B$ n'ayant aucune préimage par f : $f(a) \neq b \quad \forall\, a \in A$.
   ii) On peut trouver deux éléments $a_1, a_2 \in A$ qui ont la même image par f: $f(a_1) = f(a_2)$.

Définition :
Soit une application bijective $f : A \to B$.
L'application ${}^r f : B \to A$ telle que ${}^r f\ (b)$ = l'unique élément a de A tel que $f(a) = b$
est appelée **application réciproque** de l'application f.

${}^r f : B \to A$ est telle que ${}^r f\ (b) = a \iff f(a) = b \quad \forall\ a \in A$ et $\forall\ b \in B$



On note $\boxed{{}^r f}$ ou parfois f^{-1} l'application réciproque de f.

Remarques :

1) L'ensemble de départ de ${}^r f$ égale l'ensemble d'arrivée B de f.
   L'ensemble d'arrivée de ${}^r f$ égale l'ensemble de départ A de f.

2) Comme le montre la représentation fléchée :
   ${}^r f \circ f(a) = {}^r f(f(a)) = a$ pour tout élément $a \in A$, donc ${}^r f \circ f : A \to A$
   $f \circ {}^r f(b) = f({}^r f(b)) = b$ pour tout élément $b \in B$, donc $f \circ {}^r f : B \to B$
   La composition d'une application avec sa réciproque donne une fonction Identité I.

3) Une application qui n'est pas bijective ne possède pas d'application réciproque.

4) L'application réciproque d'une bijection est aussi bijective.

5) Si ${}^r f$ est l'application réciproque de f, alors f est l'application réciproque de ${}^r f$.
   Autrement dit : l'application réciproque de la réciproque est l'application elle-même. ${}^r\left({}^r f\right) = f$.

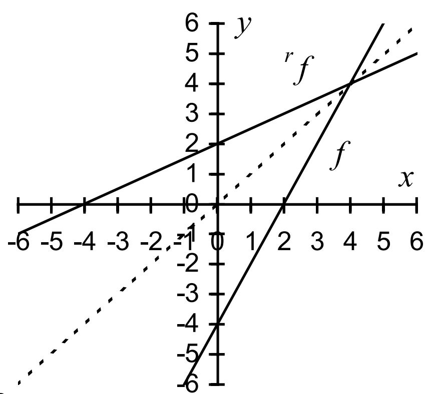
Exercice V.2
Pour chaque application ci-dessous, déterminez si elle est bijective. Si la réponse est positive, déterminez son application réciproque. Tracez sur le graphique la courbe de la réciproque.
Justifiez vos réponses !

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\quad f(x) = 2x - 4$

Cette application est bijective et sa réciproque est :

${}^r f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\quad {}^r f(y) = x = \dfrac{y+4}{2}$ car

$y = 2x - 4 \iff y + 4 = 2x \iff \dfrac{y+4}{2} = x$

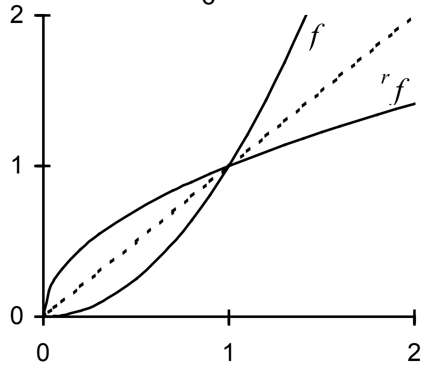


b) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+;\quad f(x) = x^2$

Cette application est bijective et sa réciproque est :

${}^r f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+;\quad {}^r f(y) = x = \sqrt{y}$ car

$y = x^2 \iff \sqrt{y} = x$, si x et y sont non négatifs.



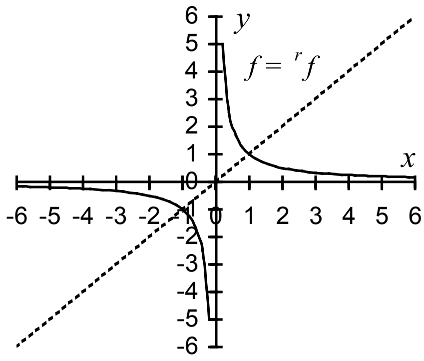
c) $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*; \quad f(x)=\dfrac{1}{x}$

Cette application est bijective et sa réciproque est :

${}^r f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*; \quad {}^r f(y)=x=\dfrac{1}{y}$ car

$y=\dfrac{1}{x} \iff \dfrac{1}{y}=x$

Dans ce cas, l'application réciproque est égale à l'application.

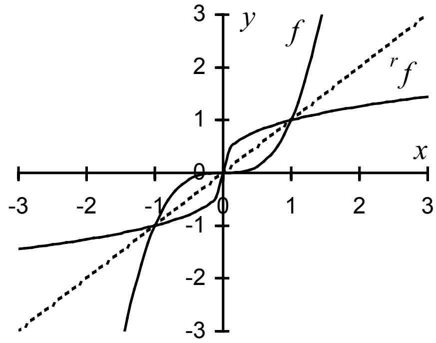


d) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x)=x^3$

Cette application est bijective et sa réciproque est :

${}^r f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad {}^r f(y)=x=\sqrt[3]{y}$ car

$y=x^3 \iff \sqrt[3]{y}=x$

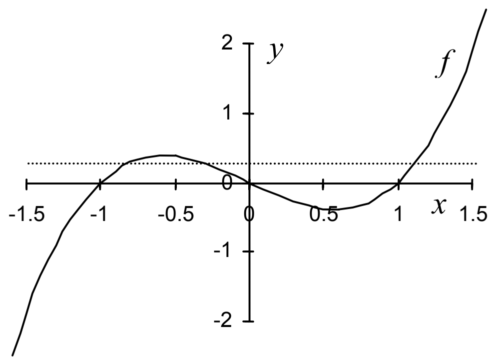


e) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x)=x^3-x$

Cette application est n'est pas bijective car la droite horizontale en pointillé croise la courbe de l'application en plus qu'un point.

En restreignant les ensembles de départ et d'arrivée, on obtient une application bijective.

$\tilde{f}:[1;\infty[\to \mathbb{R}_+; \quad \tilde{f}(x)=y=x^3-x$ est bijective.



Remarque :

Graphiquement, on vérifie qu'une application est **bijective** si chaque droite horizontale correspondant à un élément du but coupe la courbe exactement une fois.

Exercice V.3

Si la courbe d'une bijection est tracée dans un graphique, expliquez en français comment construire sur ce graphique son application réciproque.

L'application réciproque est la courbe obtenue par symétrie axiale d'axe y = x, de la courbe de l'application d'origine. Cet axe a été tracé en pointillé sur les graphiques.

VI. Les fonctions exponentielles et logarithmes

VI.1 Introduction

De nombreux phénomènes physiques, chimiques, sociaux et économiques ont une croissance ou décroissance exponentielle.

<u>Exercice VI.1 : Propagation d'une épidémie</u>
Supposons qu'une personne ait une maladie contagieuse.
Supposons qu'il faille en moyenne un jour pour qu'une personne ayant cette maladie la transmette à une autre personne. Donc après 1 jour, 2 personnes sont malades. Après un jour de plus, chaque malade a contaminé une autre personne. Donc, après 2 jours il y a 4 malades.

Combien de malades y a-t-il après 3 jours, après 4 jours et après 5 jours ?
Le nombre de malade double chaque jour. Donc après 3 jours, il y a 8 malades, après 4 jours il y a 16 malades et après 5 jours il y a 32 malades.

Après environ combien de jours y a-t-il un million de personnes malades ?
Après n jours, il y a 2^n malades. La question revient à trouver n tel que
$2^n = 1'000'000$. $2^{19} = 524'288$ et $2^{20} = 1'048'576$.
C'est durant le $20^{ème}$ jour que le million de malades sera atteint.

<u>Exercice VI.2 : Placement d'un capital</u>
Jean place un capital de 1'000 francs au taux annuel de 3%.

Après une année, le capital de Jean est de 1'000.- + 3% de 1'000.- = $\underbrace{1'000 + 30 = 1'030}$.-
$= 1'000 \cdot 1{,}03$

Après deux années, le capital de Jean est de $1'030$ + 3% de $1'030$ $= 1'060{,}9$.-
$= 1'030 \cdot 1{,}03 = 1'000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 = 1'000 \cdot 1{,}03^2$

Après trois années, le capital de Jean est de $1'060{,}9$ + 3% de $1'060{,}9$ $= 1'092{,}727$.-
$= 1'060{,}9 \cdot 1{,}03 = 1'000 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}03 = 1'000 \cdot 1{,}03^3$

Après quatre années, le capital de Jean est $\approx 1'092{,}7$ + 3% de $1'092{,}7$ $= 1'125{,}5$.-
$= 1'092{,}727 \cdot 1{,}03 = 1'000 \cdot 1{,}03^3 \cdot 1{,}03 = 1'000 \cdot 1{,}03^4$

Après combien d'années le capital de Jean a-t-il doublé ?
Après n années, le capital de Jean est de $1'000 \cdot 1{,}03^n$
La question revient à trouver n tel que $1{,}03^n \approx 2$
Par essai avec la calculatrice, on trouve $1{,}03^{23} \approx 1{,}974$ et $1{,}03^{24} \approx 2{,}033$
Le capital de Jean aura doublé après 24 années.

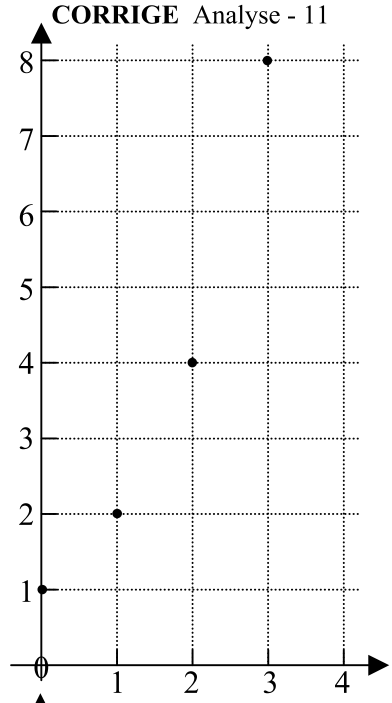
Après combien d'années le capital de Jean a-t-il décuplé ?
La question revient à trouver n tel que $1{,}03^n \approx 10$
Par essai avec la calculatrice, on trouve $1{,}03^{77} \approx 9{,}74$ et $1{,}03^{78} \approx 10{,}03$
Le capital de Jean aura décuplé après 78 années.

Les logarithmes permettent de résoudre ce genre de problèmes sans devoirs tâtonner.

VI.2 Fonctions exponentielles

<u>Exercice VI.3</u>

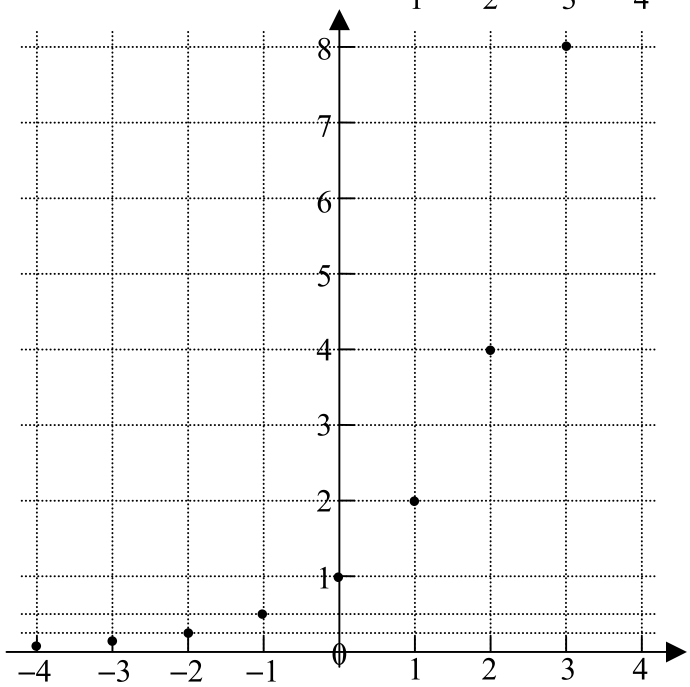
Tracez le graphe de la fonction : $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto 2^n$



<u>Rappel :</u>

Si $n \in \mathbb{N}$, alors $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ \dots \ \cdot 2}_{n \ \ facteurs}$

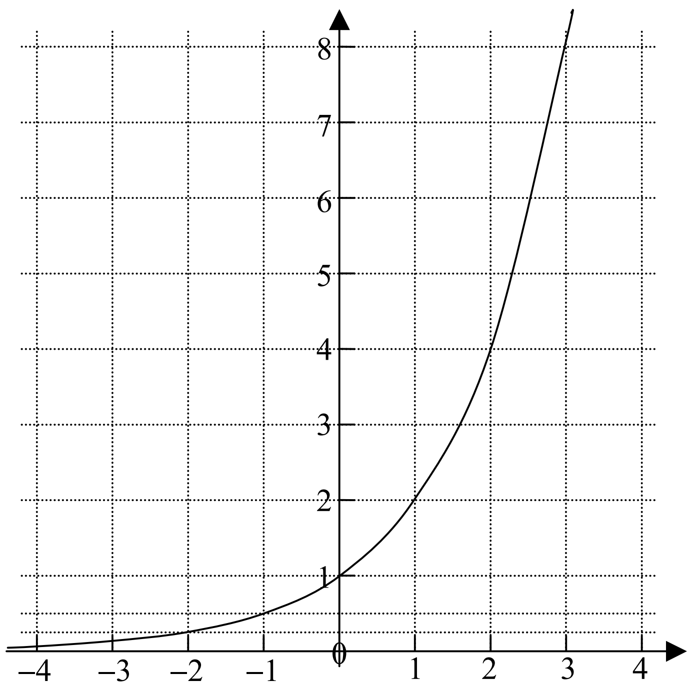
Tracez le graphe de la fonction : $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto 2^n$



<u>Rappel :</u>

Si $n \in \mathbb{N}$, alors $2^{-n} = \dfrac{1}{2^n}$

Tracez le graphe de la fonction : $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto 2^n$



<u>Rappel :</u>

Si $m, n \in \mathbb{Z}$, alors $2^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{2^n}$

Question :

Vous savez ce que signifie 2^x quand x est un nombre rationnel $\left(x = \dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q} \right)$.

Mais que signifie 2^x quand x est un nombre irrationnel (= un nombre réel non rationnel) ?

Exercice VI.4

A l'aide de la calculatrice complétez les approximations suivantes avec le maximum de précision :

Rappelons que $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356$

$2^{1,414} \approx 2{,}66474965$ $2^{1,415} \approx 2{,}666597354$

$2^{1,4142} \approx 2{,}665119089$ $2^{1,4143} \approx 2{,}665303827$

$2^{1,41421} \approx 2{,}665137562$ $2^{1,41422} \approx 2{,}665156035$

$2^{1,414213} \approx 2{,}665143104$ $2^{1,414214} \approx 2{,}665144951$

$$2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665144143$$

Rappelons que $\pi \approx 3{,}14159265$

$2^{3,14} \approx 8{,}815240927$ $2^{3,15} \approx 8{,}876555777$

$2^{3,141} \approx 8{,}821353305$ $2^{3,142} \approx 8{,}82746992$

$2^{3,1415} \approx 8{,}824411082$ $2^{3,1416} \approx 8{,}825022765$

$$2^{\pi} \approx 8{,}824977827$$

Cet exercice devrait vous convaincre qu'on peut définir la valeur de 2^x quand x est un nombre irrationnel, par encadrement de plus en plus précis de x par deux nombres rationnels.

2^x est le nombre réel qui satisfait : Si $\dfrac{n}{m} < x < \dfrac{p}{q}$, alors $2^{\frac{n}{m}} < 2^x < 2^{\frac{p}{q}}$

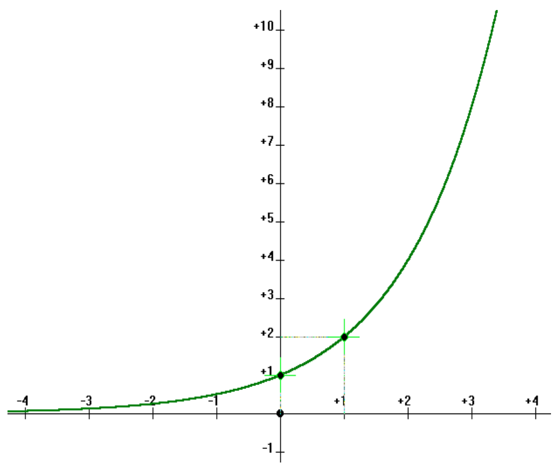
Définition :

Ce qui précède permet de définir l'application :

$$\boxed{\begin{aligned} \exp_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto 2^x \end{aligned}}$$

Cette application est appelée

fonction exponentielle en base 2.



Remarquez qu'on peut remplacer 2^x par 3^x ou par $3{,}5^x$ ou plus généralement par a^x pour n'importe quel nombre réel positif a. Ceci mène à la définition :

Définition :
Soit a un nombre réel positif donné.
La fonction $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$

$x \mapsto a^x$

s'appelle **la fonction exponentielle en base** $\boldsymbol{a}$.

a^x se lit "***a* puissance *x***".
a s'appelle **la base**.
x s'appelle **l'exposant**.

On met un nombre " $_a$ " en indice du exp pour se souvenir de la base.
Puisque cette fonction est très importante, on lui a donné un nom et on ne la désigne pas uniquement par une lettre, mais par les trois lettres " exp ", plus un nombre " $_a$ " en indice. $exp_a(x) = a^x$

Les propriétés de exp_a proviennent des propriétés des puissances.

Propriétés des puissances :	propriétés de exp_a :
• Pour tout nombre réel x, $a^x > 0$	Pour tout nombre réel x, $exp_a(x) > 0$
• $a^0 = 1$	$exp_a(0) = 1$
• $a^1 = a$	$exp_a(1) = a$
➡ • $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$exp_a(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
➡ • $a^{-y} = \dfrac{1}{a^y}$	$exp_a(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$
• $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$	$exp_a(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
➡ • $\left(a^x\right)^p = a^{x\cdot p}$	$\left(exp_a(x)\right)^p = \exp(x\cdot p)$
➡ • $\left(a^x\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a^x}$	$\left(exp_a(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\exp(x)}$

De plus, on a :
- Pour $a > 1$, la fonction exp_a est croissante sur $\mathbb{R}$, c.-à-d. : $x < y \Rightarrow exp_a(x) < exp_a(y)$.
- Pour $a < 1$, la fonction exp_a est décroissante sur $\mathbb{R}$ et moins utilisée que pour $a > 1$.
- Pour $a = 1$, la fonction $exp_1 = 1$ est constante et pas intéressante.
- **Pour $\boldsymbol{a \neq 1}$, la fonction $\boldsymbol{exp_a}$ est bijective**.

Cette dernière propriété permet de définir l'application réciproque de exp_a, qui est le sujet de la page suivante.

VI.3 Fonctions logarithmes

Nous venons de voir que pour tout nombre $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ l'application $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ est bijective.
$x \mapsto a^x$

Elle possède donc une application réciproque.

Définition :
Soit a un nombre réel positif différent de 1. $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
L'application réciproque de exp_a s'appelle **le logarithme en base *a*** et se note ***log$_a$***
Elle est définie par : $log_a : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$
$y \mapsto x$, tel que $a^x = y$

$$\boxed{log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y}$$

$log_a(y)$ se lit " **le logarithme en base *a* de *y***".
a s'appelle **la base**.

On met un nombre " $_a$ " en indice du log pour se souvenir de la base.
Puisque cette fonction est très importante, on lui a donné un nom et on ne la désigne pas uniquement par une lettre, mais par les trois lettres " log ", plus un nombre " $_a$ " en indice.

> « Le logarithme en base a de y est la puissance x à laquelle il faut élever a pour obtenir y. »

Exercice VI.5
Complétez les égalités suivantes :

$L_1 = log_7(49) = 2$, car $7^2 = 49$ $L_2 = log_2(8) = 3$, car $2^3 = 8$

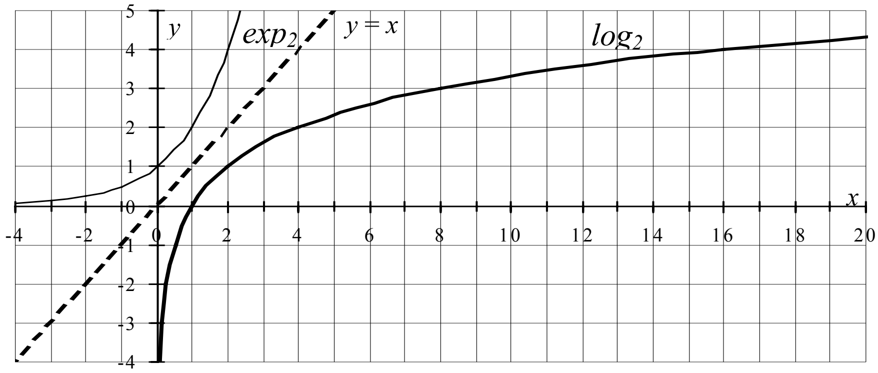
$L_3 = log_3(81) = 4$, car $3^4 = 81$ $L_4 = log_{10}(0{,}01) = -2$, car $10^{-2} = 0{,}01$

$L_5 = log_2(128) = 7$, car $2^7 = 128$ $L_6 = log_{10}(100'000) = 5$, car $10^5 = 100'000$

$L_7 = log_2(\sqrt{2}) = 0{,}5$, car $2^{0{,}5} = \sqrt{2}$ $L_8 = log_{10}(\sqrt{10}) = 0{,}5$, car $10^{0{,}5} = \sqrt{10}$

$L_9 = log_5(x) = 2 \Leftrightarrow x = 25$, car $5^2 = 25$ $L_{10} = log_8(x) = 1/3 \Leftrightarrow x = 2$, car $8^{1/3} = 2$

Exercice VI.6
Tracez le graphique de la fonction log_2.



Historiquement, les logarithmes n'ont pas été définis comme fonction réciproque de l'exponentielle. Ils ont été introduis en 1614 par John Neper pour simplifier des calculs qui se faisaient à la main.
John Neper (ou Napier) (1550-1617) était un baron écossais qui fréquentait le milieu scientifique de son époque. Dans la préface de son premier traité de 1614 "*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*", écrit en latin, il explique comment on peut remplacer une multiplication par une addition en utilisant des tables de logarithmes.

Propriétés des logarithmes :
Les propriétés de log_a proviennent des propriétés de exp_a et donc des puissances.

➡ Par définition on a : $\boxed{log_a(y) = x \;\Leftrightarrow\; a^x = y}$ et $\boxed{log_a(a^x) = x}$ et $\boxed{a^{log_a(y)} = y}$

Propriétés des puissances :			propriétés de log_a :
• Pour tout nombre réel x, $a^x > 0$			$log_a(y)$ n'est défini que pour $y > 0$
• $a^0 = 1$			$log_a(1) = 0$
• $a^1 = a$			$log_a(a) = 1$
• $a^{x_1+x_2} = \underbrace{a^{x_1}}_{y_1} \cdot \underbrace{a^{x_2}}_{y_2}$	$x_1 = log_a(y_1)$ $x_2 = log_a(y_2)$	➡	$log_a(y_1 \cdot y_2) = log_a(y_1) + log_a(y_2)$
• $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$			$log_a\left(\dfrac{1}{y}\right) = -log_a(y)$
• $a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$			$log_a\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right) = log_a(y_1) - log_a(y_2)$
• $\underbrace{\left(a^x\right)}_{=y}{}^{p} = a^{p\cdot x}$	$x = log_a(y)$	➡	$log_a\left(y^p\right) = p \cdot log_a(y)$
• $\sqrt[q]{a^x} = a^{\frac{1}{q}\cdot x}$	$y = a^x$		$log_a\left(\sqrt[q]{y}\right) = \dfrac{1}{q} \cdot log_a(y)$

De plus, on a :
- Pour $a > 1$, la fonction log_a est croissante, c.-à-d. : $x < y \Rightarrow log_a(x) < log_a(y)$.
- Pour $a < 1$, la fonction log_a est décroissante et moins utilisée que pour $a > 1$.
- Pour $a = 1$, la fonction logarithme n'est pas définie.
- **Pour $a \neq 1$, la fonction log_a est bijective. Sa réciproque est exp_a.**

Votre calculatrice sait calculer des approximations des logarithmes dans deux bases :
- ° La base 10 car nous avons 10 chiffres dans notre système de numération.
- ° La base e qui est une base naturelle.
  e est un nombre environ égal à 2,718281828459045235360287471352662497757...
  Il s'appelle **le nombre d'Euler**.
  Ce nombre intervient naturellement dans divers problèmes d'analyse. Il est présent dans de nombreux phénomènes naturels issus du monde de la physique, de la biologie, de la géologie, ...
  e est le nombre irrationnel vers lequel tend l'expression $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers l'infini.

  On a aussi : $e = 1 + \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \;\ldots$

Conventions de notations :
Le symbole **log**(x) est utilisé en abréviation de $log_{10}(x)$.
Quand la base n'est pas indiquée, on utilise la base 10.
log(x) se lit : " **logarithme décimal de *x*** "

Le symbole **ln**(x) est utilisé en abréviation de $log_{\mathbf{e}}(x)$.
ln(x) se lit : " **logarithme naturel de *x*** "

Sur la calculatrice, les logarithmes décimaux se calculs avec la touche $\boxed{\text{LOG}}$,
les logarithmes naturels se calculs avec la touche $\boxed{\text{ln}}$ (ou $\boxed{\text{LOG}}$, puis sélectionner ln) .
L'évaluation de $exp_e(x) = e^x$ se calculs avec la touche $\boxed{\text{LOG}}$, puis sélectionner e^.

Exercice VI.7
A l'aide de la calculatrice, évaluez les expressions suivantes :

$L_1 = \mathbf{log}\ (1'000) = 3$ $L_2 = \mathbf{log}\ (0,001) = -3$

$L_3 = \mathbf{log}\ (\sqrt{10}\,) = 0,5$ $L_4 = \mathbf{log}\ (2) \approx 0,301$

$L_5 = \mathbf{log}\ (20) \approx 1,301$ $L_6 = \mathbf{log}\ (200) \approx 2,301$

$L_7 = \mathbf{log}\ (0,2) \approx 0,301 - 1 \approx -0,699$ $L_8 = \mathbf{log}\ (0,02) \approx 0,301 - 2 \approx -1,699$

$L_9 = \mathbf{log}\ (e) \approx 0,434294482$ $L_{10} = \mathbf{ln}\ (10) \approx 2,302585093 \approx 1 / 0,434294$

$L_{11} = \mathbf{log}\ (e) \cdot \mathbf{ln}\ (10) = 1$ $L_{12} = \mathbf{ln}\ (100) - 2 \cdot \mathbf{ln}\ (10) = 0$

$L_{13} = \mathbf{ln}\ (0,1) \approx -2,302585093$ $L_{14} = \mathbf{ln}\ (0,01) - 2 \cdot \mathbf{ln}\ (0,1) = 0$

$L_{15} = e^{2,31} \approx 10,074$ $L_{16} = e^{-2,31} \approx 0,09926 \approx 1/10,074$

Les exponentielles et les logarithmes dans la nature

Des phénomènes naturels et économiques peuvent fréquemment être modélisés par des fonctions logarithmes et exponentielles.

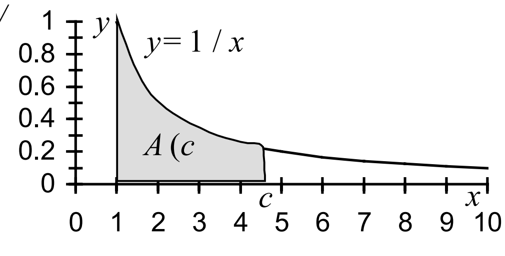
1) Toute variable dont la croissance est proportionnelle à elle-même suit une **croissance exponentielle**. Par exemple, la croissance d'une population est fréquemment proportionnelle à la taille de la population. Dans ce cas, la **croissance est exponentielle**.

2) Les explosions correspondent à un enchaînement **exponentiel** de réactions chimiques ou nucléaires.

3) L'oreille réagit de façon logarithmique à la puissance d'un son. Elle perçoit des sons d'une puissance comprise entre 10^{-12} Watts et 10^2 Watts. Le niveau acoustique en décibels [dB] est défini par :
niveau sonore = 10 · **log**(Puissance en Watts divisée par 10^{-12} Watts)
Ainsi, si la puissance d'un son double, son niveau sonore augmente de 10 · **log**(2) décibels, soit environ 3 décibels.

4) En chimie, on définit l'acidité d'un milieu comme :
"moins le logarithme en base 10 de la concentration des ions H_3O^+ ". pH = –**log**([H_3O^+])
Référence : *http://wwwedu.ge.ch/po/claparede/ph7/Site_perso_pH/*

5) L'aire entre les verticales $x = 1$, $x = c$, l'axe des abscisses et la courbe $f(x) = 1/x$ est la fonction logarithmique naturel de c.
$A(c) = \mathbf{ln}(c)$



Formule de changement de bases

La calculatrice permet d'obtenir facilement des valeurs approchées des logarithmes en base 10 et des logarithmes naturels. Comment calculer des logarithmes dans d'autres bases ?

Soient a, b deux nombres réels positifs différents de 1. $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Montrons la formule de changement de base : $\boxed{log_b(y) = \dfrac{log_a(y)}{log_a(b)}}$

Rappelons la formule qui transforme une puissance en un produit : $log_a(\, b^x) = x \cdot log_a(\, b)$
Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = b^x$. Donc $x = log_b(\, y)$

$$log_a(\, y\,) = log_a(\, b^x\,) = x \cdot log_a(\, b\,) = log_b(\, y\,) \cdot log_a(\, b\,)$$

En divisant par $log_a(\, b\,)$ on obtient : $\dfrac{log_a(y)}{log_a(b)} = log_b(y)$ qui est la formule de changement de base.

CQFD

En particulier on a : $\boxed{log_b(y) = \dfrac{\log(y)}{\log(b)} = \dfrac{\ln(y)}{\ln(b)}}$

<u>Exercice VI.8</u>
A l'aide de la calculatrice, évaluez les expressions suivantes :

$L_1 = log_2\,(10) \approx 3{,}322$

$L_2 = log_2\,(1'000) \approx 3 \cdot 3{,}322 \approx 9{,}966$

$L_3 = log_2\,(1'000'000) \approx 6 \cdot 3{,}322$

$L_4 = log_3\,(10) \approx 2{,}096$

$L_5 = log_3\,(100) \approx 2 \cdot 2{,}096 \approx 4{,}192$

$L_6 = log_3\,(1'000) \approx 3 \cdot 2{,}096 \approx 6{,}2877$

$L_7 = log_5\,(10) \approx 1{,}43$

$L_8 = log_5\,(25) = 2$

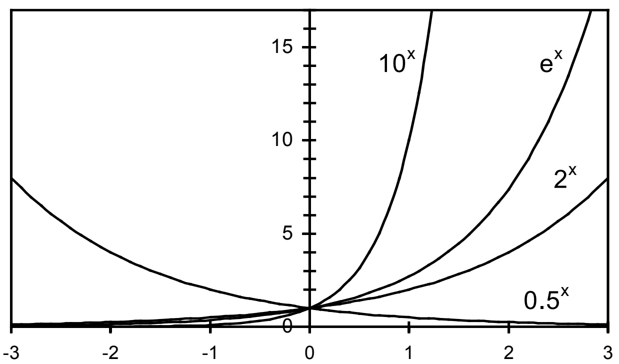
$L_9 = log_2\,(1'024) = 10$

$L_{10} = log_3\,(81) = 4$

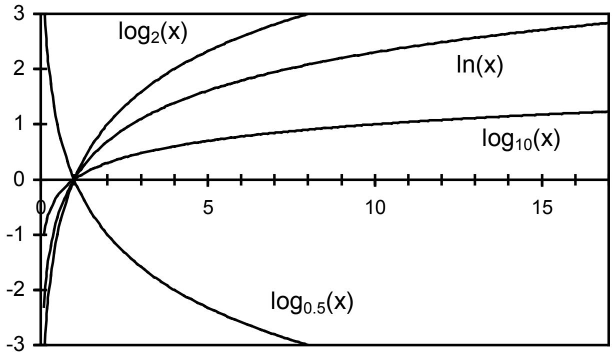
Pratiquement on utilise le logarithme en base 2 en plus du logarithme décimal et du logarithme naturel. Les autres logarithmes sont très rarement utilisés.

<u>Graphiques :</u> Le cas $a > 1$ est nettement plus important.

Quelques exponentielles



Quelques logarithmes



VII. L'application "valeur absolue"

Il est fréquemment utile de considérer un nombre sans son signe. C'est le rôle de l'application "**valeur absolue**", qui à un nombre fait correspondre ce nombre sans son signe.

On définit ainsi cette application : $\boxed{\begin{array}{l} |\ |:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}\end{array}}$

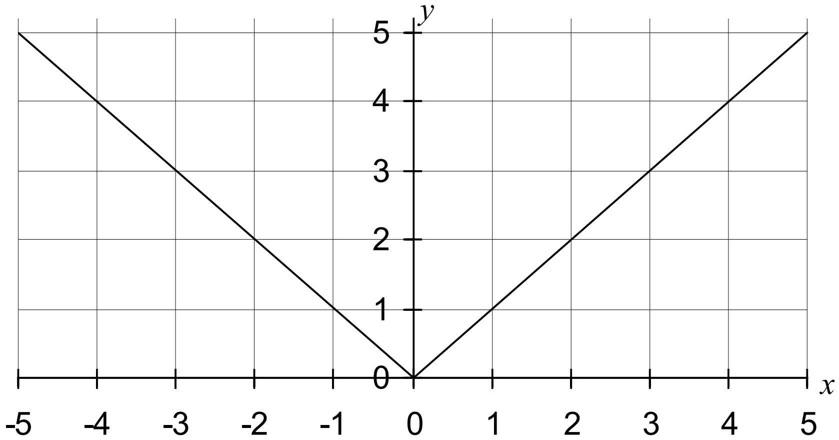
Remarquez que $-x$ est un nombre positif si x est un nombre négatif !
La valeur absolue d'un nombre est toujours positive, ou nulle si le nombre est nul.

<u>Exercice VII.1.</u> Complétez les égalités suivantes :

$|47| = 47$ $\quad |-47| = 47$ $\quad |3,14| = 3,14$ $\quad |-3,14| = 3,14$

$|4 - 9| = 5$ $\quad \left|\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4}$ $\quad |\pi - 4| = 4 - \pi$ $\quad |\log(0,01)| = 2$

<u>Exercice VII.2</u>
Dessinez le graphe de l'application "valeur absolue" ci-dessous.



<u>Utilisation de la valeur absolue</u>
En analyse, l'utilisation de la valeur absolue est très utile pour indiquer que deux nombres sont proches.
Deux nombres sont "proches" si la valeur absolue de leur différence est "petite".

Si $|x|$ est petit, alors x^2 est petit, car $x^2 < |x|$, lorsque $|x| < 1$.

Si $|a-b|$ est petit, alors $(a-b)^2$ est petit, car $(a-b)^2 < |a-b|$, lorsque $|a-b| < 1$.

Si $|x|$ est petit, alors $\left|\frac{1}{x}\right|$ est grand.

VIII. Les fonctions homographiques

Définition :

Une **fonction homographique** est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la forme :

$f(x) = \dfrac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$ avec a, b, c et d quatre nombres réels tels que $a \cdot d \neq b \cdot c$.

Remarquez que si $c = 0$, la fonction devient : $f(x) = \dfrac{a \cdot x + b}{d} = \dfrac{a}{d} \cdot x + \dfrac{b}{d}$ qui est une application affine.

Si $a \cdot d = b \cdot c$, alors soit $c = 0$ et $a = 0$ et la fonction est constante égale à b/d, soit $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$ et la fonction devient : $f(x) = \dfrac{a \cdot (x + b/a)}{c \cdot (x + d/c)} = \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{x + b/a}{x + d/c} = \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{x + b/a}{x + b/a} = \dfrac{a}{c}$ qui est une application constante.

Pourquoi étudier les fonctions homographiques ?

Les fonctions homographiques ont quelques propriétés intéressantes et permettent d'introduire la notion d'asymptote.

Exercice VIII.1

Déterminez le domaine de définition des fonctions homographiques suivantes et déterminez comment modifier leurs ensembles de départ et d'arrivée pour obtenir des applications bijectives.

a) $f_1(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ Dom(f) = $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

$y = \dfrac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1) \cdot y = x+1 \Leftrightarrow x \cdot y - y = x+1 \Leftrightarrow x \cdot y - x = y+1 \Leftrightarrow x \cdot (y-1) = y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$ Pour chaque $y \neq 1$, il existe un unique x, tel que $f_1(x) = y$.

Donc l'application : $\tilde{f}_1 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par : $\tilde{f}_1(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ est une bijection et son application réciproque est : ${}^r\tilde{f}_1(y) = \dfrac{y+1}{y-1}$.

b) $f_2(x) = \dfrac{2x+3}{5x+7}$ Dom(f) = $\mathbb{R}\backslash\{-7/5\}$

$y = \dfrac{2x+3}{5x+7} \Leftrightarrow (5x+7) \cdot y = 2x+3 \Leftrightarrow 5x \cdot y + 7y = 2x+3 \Leftrightarrow 5x \cdot y - 2x = -7y+3 \Leftrightarrow x \cdot (5y-2) = -7y+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-7y+3}{5y-2}$ Pour chaque $y \neq 2/5$, il existe un unique x, tel que $f_2(x) = y$.

Donc l'application : $\tilde{f}_2 : \mathbb{R} \setminus \{2/5\} \to \mathbb{R} \setminus \{-7/5\}$ définie par : $\tilde{f}_2(x) = \dfrac{2x+3}{5x+7}$ est une bijection et son application réciproque est : ${}^r\tilde{f}_2(y) = \dfrac{-7y+3}{5y-2}$.

c) $f_3(x) = \dfrac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$, avec $a \cdot d \neq b \cdot c$ Dom(f) = $\mathbb{R}\backslash\{-d/c\}$ (si $c \neq 0$)

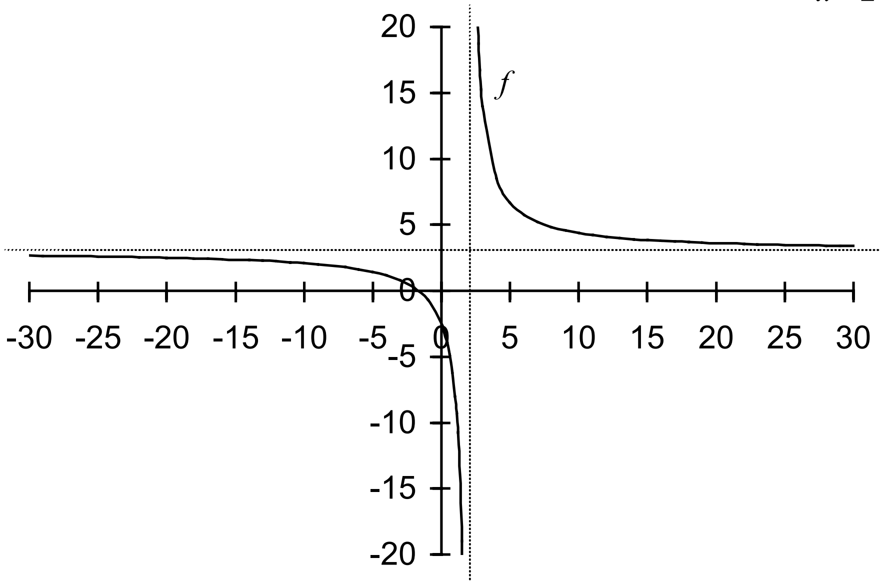
$y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow (cx+d) \cdot y = ax+b \Leftrightarrow cx \cdot y + dy = ax+b \Leftrightarrow x \cdot (cy-a) = -dy+b \Leftrightarrow x = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$

Pour chaque $y \neq a/c$, il existe un unique x, tel que $f_3(x) = y$.

Donc l'application : $\tilde{f}_3 : \mathbb{R} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ définie par : $\tilde{f}_3(x) = (-dx+b)/(cy-a)$ est une bijection et son application réciproque est : ${}^r\tilde{f}_3(y) = (-dy+b)/(cy-a)$.

Asymptotes d'une fonction homographique.

Voici un exemple de fonction homographique avec son graphique : $f(x)=\dfrac{3\cdot x+5}{x-2}$



Remarquez que :

1) Si x est un nombre proche de 2, alors $|f(x)|$ est un nombre très grand.
   On dit que : "la limite lorsque x tend vers 2 de $|f(x)|$ égale l'infini".
   On écrit : $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}|f(x)|=\infty}$
   Notez l'utilisation de la valeur absolue pour ne pas parler du signe de $f(x)$.
   Sur le graphique, on trace une droite verticale d'abscisse $x=2$, vers laquelle la courbe représentative de la fonction s'approche. On appelle cette droite verticale une **asymptote verticale**.

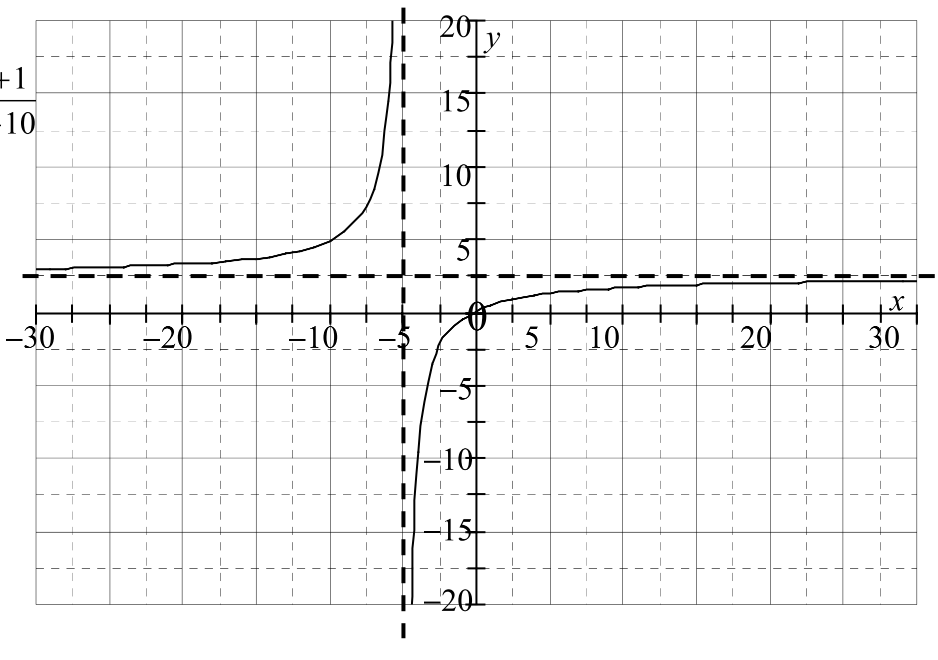
2) Si x est un nombre très grand (du côté de $+\infty$), alors $f(x)$ est un nombre proche de 3.
   On dit que : "la limite lorsque x tend vers l'infini de f de x égale 3".
   On écrit : $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3}$
   Sur le graphique, on trace une droite horizontale d'ordonnée $y=3$, vers laquelle la courbe représentative de la fonction s'approche. On appelle cette droite une **asymptote horizontale**.

   La même remarque est valable si x tend vers $-\infty$.
   On dit que : "la limite lorsque x tend vers moins l'infini de f de x égale 3".
   On écrit : $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=3}$

Exercice VIII.2

Dessinez le graphique de $f(x)=\dfrac{5x+1}{2x+10}$

et déterminez ses asymptotes.



Si x se rapproche de -5, alors f(x) devient gigantesque. Donc x = -5 est l'équation d'une asymptote verticale.

Quand x est gigantesque, f(x) se rapproche de 5/2. Donc f possède une asymptote horizontale d'équation y = 5/2.

Index