❶ a) $5^{x-2}=1=5^0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$; $S=\{2\}$

b) $7^{3x-1}=7^x \Leftrightarrow 3x-1=x \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=1/2$; $S=\{1/2\}$

c) $5^{x^2+0,25}=25\cdot\sqrt{5}=5^{2,5} \Leftrightarrow x^2+0,25=2,5 \Leftrightarrow x^2=2,25 \Leftrightarrow x=\pm 1,5$; $S=\{-1,5\,;1,5\}$

d) $e^{x^2-2,5x+1,5}=1=e^0 \Leftrightarrow x^2-2,5x+1,5=0 \Leftrightarrow (x-1,5)\cdot(x-1)=0 \Leftrightarrow S=\{1\,;1,5\}$

e) $2^x\cdot 2^{x+1}=32 \Leftrightarrow 2^{x+x+1}=2^5 \Leftrightarrow 2x+1=5 \Leftrightarrow x=2$; $S=\{2\}$

f) $\left(2^x\right)^{x+1}=1 \Leftrightarrow 2^{x\cdot(x+1)}=2^0 \Leftrightarrow x\cdot(x+1)=0 \Leftrightarrow S=\{-1\,;0\}$

g) $3^{2x+1}-3^x=0 \Leftrightarrow 3^{2x+1}=3^x \Leftrightarrow 2x+1=x \Leftrightarrow x=-1$; $S=\{-1\}$

h) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1}-\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \Leftrightarrow 2x+1=x-1 \Leftrightarrow x=-2$; $S=\{-2\}$

i) $e^{2x^2-x}=\sqrt{e^6} \Leftrightarrow e^{2x^2-x}=e^3 \Leftrightarrow 2x^2-x=3 \Leftrightarrow (2x-3)\cdot(x+1)=0 \Leftrightarrow S=\{-1\,;3/2\}$

j) $2^{x\cdot(5x+1)}=\frac{1}{256}=2^{-8} \Leftrightarrow 5x^2+x=-8 \Leftrightarrow 5x^2+x+8=0$; $\Delta=b^2-4ac=1-4\cdot 5\cdot 8<0 \Leftrightarrow S=\{\ \}$

k) $10^{x^2-4x}=0,001=10^{-3} \Leftrightarrow x^2-4x=-3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot(x-1)=0 \Leftrightarrow S=\{1\,;3\}$

l) $2^{x+2}=8^{4-x}=2^{3\cdot(4-x)} \Leftrightarrow x+2=12-3x \Leftrightarrow 4x=10 \Leftrightarrow S=\{5/2\}$

m) $2^{3x}=3^x \Leftrightarrow \ln(2^{3x})=\ln(3^x) \Leftrightarrow 3x\cdot\ln(2)=x\cdot\ln(3) \Leftrightarrow x\cdot(3\cdot\ln(2)-\ln(3))=0 \Leftrightarrow x=0\,; S=\{0\}$

n) $5^3=e^x \Leftrightarrow \ln(5^3)=\ln(e^x)=x \Leftrightarrow x=\ln(5^3)=3\cdot\ln(5)$; $S=\{3\cdot\ln(5)\}$

o) $5^{2x+2}=3^{5x-1} \Leftrightarrow \ln(5^{2x+2})=\ln(3^{5x-1}) \Leftrightarrow (2x+2)\cdot\ln(5)=(5x-1)\cdot\ln(3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x\cdot\ln(5)+2\cdot\ln(5)=5x\cdot\ln(3)-\ln(3) \Leftrightarrow x\cdot(2\cdot\ln(5)-5\cdot\ln(3))=-2\cdot\ln(5)-\ln(3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-2\cdot\ln(5)-\ln(3)}{2\cdot\ln(5)-5\cdot\ln(3)}=\frac{2\cdot\ln(5)+\ln(3)}{5\cdot\ln(3)-2\cdot\ln(5)}\approx 1,8985$; $S=\left\{\frac{2\cdot\ln(5)+\ln(3)}{5\cdot\ln(3)-2\cdot\ln(5)}\right\}$

p) $10^{2x+1}=2 \Leftrightarrow \log(10^{2x+1})=\log(2) \Leftrightarrow 2x+1=\log(2) \Leftrightarrow x=(\log(2)-1)/2\approx -0,3495$

$S=\{(\log(2)-1)/2\}\approx\{-0,3495\}$

q) $8\cdot 2^{2x}-31\cdot 2^x=4$ on pose $y=2^x$. L'équation devient : $8\cdot y^2-31\cdot y-4=0$

$\Leftrightarrow (8y+1)\cdot(y-4)=0 \Leftrightarrow y=-1/8$ ou $y=4$

Puisque $y=2^x$, $y=-1/8<0$ ne correspond pas à une solution de l'équation d'origine.

$y=4=2^2=2^x \Leftrightarrow x=2$ est l'unique solution : S = {2}.

r) $2\cdot 16^x-7\cdot 4^x=4 \Leftrightarrow 2\cdot 4^{2x}-7\cdot 4^x-4=0$ on pose $y=4^x$. L'équation devient :

$2\cdot y^2-7\cdot y-4=0 \Leftrightarrow (2y+1)\cdot(y-4)=0 \Leftrightarrow y=-1/2$ ou $y=4$

Comme précédemment, $y=4^x$ ne peut pas être négatif. La solution est S = {1}

s) $\ln(x+3)+\ln(x+5)=\ln(15) \Leftrightarrow \ln((x+3)\cdot(x+5))=\ln(15) \Leftrightarrow (x+3)\cdot(x+5)=15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+8x+15=15 \Leftrightarrow x\cdot(x+8)=0 \Leftrightarrow S=\{\ 0\}$ $x=-8$ doit être exclus car $\ln(-8+3)$ n'est pas défini.

t) $\log(x-5)+\log(12-x)=1 \Leftrightarrow \log((x-5)\cdot(12-x))=\log(10) \Leftrightarrow (x-5)\cdot(12-x)=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2+17x-60=10 \Leftrightarrow x^2-17x+70=0$; $a=1$; $b=-17$; $c=70$; $\Delta=17^2-4\cdot 1\cdot 70=9$

$\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{17\pm\sqrt{9}}{2}=\begin{cases}10\\7\end{cases}$; $S=\{7\,;10\}$. Les deux valeurs sont dans le dom. de déf.

u) $\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)=3\cdot\ln(3)=\ln(3^3) \Leftrightarrow \frac{x+3}{x}=27 \Leftrightarrow x+3=27x \Leftrightarrow 3=26x \Leftrightarrow S=\left\{\frac{3}{26}\right\}$

v) $\ln(x^2-7)=2\cdot\ln(x+3) \Leftrightarrow \ln(x^2-7)=\ln((x+3)^2) \Leftrightarrow x^2-7=(x+3)^2=x^2+6x+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -16=6x \Leftrightarrow x=-16/6=-8/3$; $S=\{-8/3\}$

❷ a) $Log_2(10) = \log(10) / \log(2) = 1 / \log(2) \approx 3{,}321928$

b) $Log_2(3) = \log(3) / \log(2) \approx 1{,}584963$

c) $Log_2(1'000) = \log(1'000) / \log(2) = 3 / \log(2) \approx 9{,}965784$ (Rem. $Log_2(1'000) \approx Log_2(2^{10}) \approx 10$)

d) $Log_5(10) = \log(10) / \log(5) = 1 / \log(5) \approx 1{,}430677$

e) $Log_3(64) = \log(64) / \log(3) \approx 3{,}785579$

f) $Log_7(50) = \log(50) / \log(7) \approx 2{,}010382$ (Rem. $Log_7(50) \approx Log_7(7^2) \approx 2$)

g) $Log_{10}\left(\sqrt{2}\right) = \log\left(\sqrt{2}\right) \approx 0{,}1505150$

h) $Log_{\sqrt{2}}(10) = \log(10)/\log\left(\sqrt{2}\right) = 1/\log\left(\sqrt{2}\right) \approx 6{,}643856$

i) $Log_{10}(\sqrt{2}) \cdot Log_{\sqrt{2}}(10) = \log\left(\sqrt{2}\right) \cdot \dfrac{\log(10)}{\log\left(\sqrt{2}\right)} = \log(10) = 1$

j) $Log_{10}(\pi) = \log(\pi) \approx 0{,}4971499$

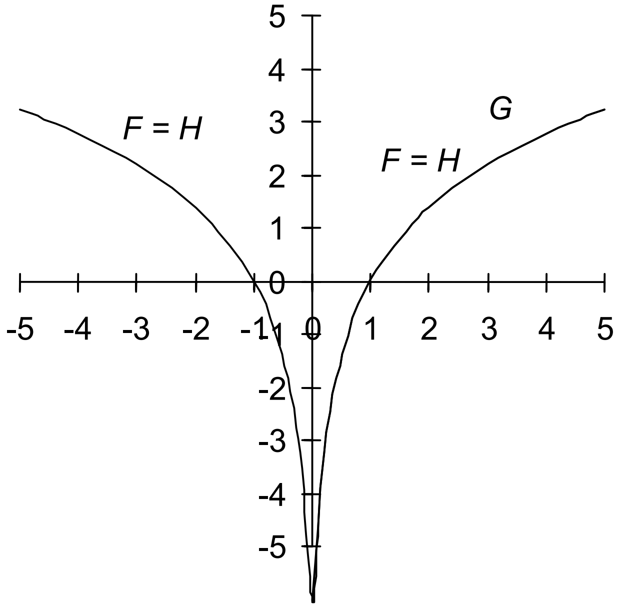
k) $Log_{\pi}(10) = \dfrac{\log(10)}{\log(\pi)} = \dfrac{1}{\log(\pi)} \approx 2{,}011466$

l) $Log_{10}(\pi) \cdot Log_{\pi}(10) = \log(\pi) \cdot \dfrac{\log(10)}{\log(\pi)} = \log(10) = 1$

m) $Log_b(a) \cdot Log_a(b) = \dfrac{\log(a)}{\log(b)} \cdot \dfrac{\log(b)}{\log(a)} = 1$

---

❸ a) Il faut exclure les nombres négatifs et le zéro des évaluations de logarithmes.
$x^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 0$, donc Dom(F) = $\mathbb{R}^*$.
Pour G :
A exclure : $x \le 0$, donc Dom(G) = $\mathbb{R}^*_+$.
$\sqrt{x^2} \le 0 \Leftrightarrow x = 0$, donc Dom(H) = $\mathbb{R}^*$.



b,c) Les fonctions F et H sont exactement les mêmes.
Les fonctions F, G (et H) coïncident sur les nombres positifs, mais la fonction G n'est pas définie sur les nombres négatifs ou nul.