❶ i)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
application	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai
bijection	faux	faux	faux	faux	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	faux

Voici quelques justifications :
La relation 1) n'est pas une bijection, car 0 possède plusieurs préimages.
La relation 5) n'est pas une application, car les nombres positifs ont plusieurs images.
La relation 7) n'est pas une application, car certain nombres ont plusieurs images.
La relation 10) n'est pas une application, car un nombre possède une infinité d'images.

ii)
3) Tous les nombres positifs possèdent deux préimages. Si on restreint l'ensemble de départ aux nombres positifs ou nuls on obtient une application bijective. On pourrait aussi restreindre l'ensemble de départ aux nombres négatifs ou nuls.
4) Pour transformer cette application en une bijection, il faudrait restreindre l'ensemble de départ à un intervalle de taille maximale, mais sur lequel la fonction est soit croissance, soit décroissance.
12) Pour transformer cette application en une bijection, il faudrait restreindre l'ensemble de départ aux nombres positifs ou aux nombres négatifs et il faudrait restreindre l'ensemble d'arrivée aux nombres plus petits que le maximum atteint par cette application.

---

❷ $F_1(x) = 2x - 3$ de A dans B.

a) A = [0 ; 5] B = $\mathbb{R}$. F_1 n'est pas bijective car plusieurs éléments de B n'ont pas de préimages dans A.
b) A = [0 ; 5] B = [–3 ; 7]. F_1 est bijective. $F_1(0) = -3$; $F_1(5) = 7$.
Son application réciproque est : ${}^rF_1(y) = (y + 3) / 2$ de B dans A.

$F_2(x) = x^2 + 1$ de A dans B

c) A = $\mathbb{R}$ B = $\mathbb{R}_+$. F_2 n'est pas bijective car les nombres de l'intervalle [0 ; 1[n'ont pas de préimages et tous les nombres supérieur à 1 ont deux préimages. Par exemple : $F_2^{-1}(5) = \{-2 ; 2\}$.
d) A = $\mathbb{R}_+$ B = $\mathbb{R}_+$. F_2 n'est pas bijective car les nombres de l'intervalle [0 ; 1[n'ont pas de préimages.
e) A = $\mathbb{R}_+$ B = [1 ; +∞[. F_2 est bijective. Aucun nombre n'a plus d'une préimage dans A et tous les nombres de l'ensemble B possèdent une préimage.
Son application réciproque est : ${}^rF_2(y) = \sqrt{y-1}$ de B dans A.
f) A =]-3 ; 3] B = [1 ; +10[. F_2 n'est pas bijective car tous les nombres supérieur à 1 de l'ensemble B ont deux préimages. Par exemple : $F_2^{-1}(5) = \{-2 ; 2\}$.
g) A =] 0 ; 3] B = [1 ; +10[. F_2 n'est pas bijective. Le nombre 1 n'a pas de préimage dans A. De plus, 3 n'a pas d'image dans B, donc F_2 n'est pas une application.
Si les intervalles étaient fermés, l'application serait bijective et sa réciproque serait :
${}^rF_2(y) = \sqrt{y-1}$ de B dans A.

Suppléments

❸ $F_1 : x \mapsto 3x - 6$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$y = 3x - 6 \iff y + 6 = 3x \iff (y + 6) / 3 = x$

Pour toute valeur réelle de y, $x = (y + 6) / 3$ est l'unique préimage de y par F_1. Donc F_1 est bijective et son application réciproque est : ${}^rF_1(y) = (y + 6) / 3$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$F_2 : x \mapsto -7x + 8$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$y = -7x + 8 \iff 7x = 8 - y \iff x = (8 - y) / 7$

Pour toute valeur réelle de y, $x = (8 - y) / 7$ est l'unique préimage de y par F_2. Donc F_2 est bijective et son application réciproque est : ${}^rF_2(y) = (8 - y) / 7$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$F_3 : x \mapsto \dfrac{1}{2x - 6}$ définie de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y = 1 / (2x - 6) \iff 2x - 6 = 1 / y \iff 2x = 1 / y + 6 \iff x = 1 / (2y) + 3$

Pour toute valeur réelle non nulle de y, $x = 1 / (2y) + 3$ est l'unique préimage de y par F_3. Donc F_3 est bijective et son application réciproque est : ${}^rF_3(y) = 1 / (2y) + 3$, définie de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

---

❹ $F : x \mapsto \dfrac{x+1}{2x+3}$ définie de $Dom(F)$ dans B

a) Dom(F) = $\mathbb{R} \setminus \{-3/2\}$, car pour $x = -3/2$, il y a division par 0.

b) Cherchons son application réciproque :

$$y = \frac{x+1}{2x+3} \iff (2x+3)\cdot y = x+1 \iff 2x\cdot y + 3y = x+1 \iff 2x\cdot y - x = -3y+1 \iff$$

$$\iff x\cdot(2y-1) = -3y+1 \iff x = \frac{-3y+1}{2y-1}.$$ Il faut exclure $y = 1/2$, donc $B = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$

$${}^rF : \mathbb{R}\setminus\{1/2\} \to \mathbb{R}\setminus\{-3/2\} \quad ; \quad {}^rF(y) = \frac{-3y+1}{2y-1}$$