❶ $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = x^2 + 1$

a) $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 3 + 5 = 8$
b) $(f \cdot g)(1) = f(1) \cdot g(1) = 1 \cdot 2 = 2$
c) $(f / g)(0) = f(0) / g(0) = -1 / 1 = -1$
d) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(5) = 9$
e) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 10$. Cet exemple montre que $f \circ g \neq g \circ f$.
f) $(f \circ g)(\sqrt{2}) = f(g(\sqrt{2})) = f(3) = 5$
g) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x - 1 + x^2 + 1 = x^2 + 2x$
h) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 2x - 1 - x^2 - 1 = -x^2 + 2x - 2$
i) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x - 1) \cdot (x^2 + 1) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$
j) $(f / g)(x) = f(x) / g(x) = (2x - 1) / (x^2 + 1)$
k) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 2 \cdot (x^2 + 1) - 1 = 2x^2 + 2 - 1 = 2x^2 + 1$
l) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1 + 1 = 4x^2 - 4x + 2$

Remarquez que $f \circ g \neq g \circ f$

---

❷ Notons S le salaire initiale en Fr. des employés.
Après une augmentation de 50 Fr, leur salaire est de S + 50.
Suivie de l'augmentation de 3%, le salaire est de $S + 50 + (S + 50) \cdot 0{,}03 = 1{,}03 \cdot S + 51{,}50$.
En ayant interverti les deux augmentations de salaire :
Après une augmentation de 3%, leur salaire est de $S + S \cdot 0{,}03 = 1{,}03 \cdot S$.
Suivie d'une augmentation de 50 Fr, le salaire est de $1{,}03 \cdot S + 50$.
On remarque que intervertir les deux salaires est désavantageux et diminuerait le salaire finale de 1,5 Fr.

---

❸ $F(x) = (x + 2)^2$.
L'évaluation de $F(x)$ se fait en deux étapes. Premièrement on additionne 2 à x, puis on met le résultat au carré. Donc si on définit : $H(x) = x + 2$ et $G(x) = x^2$, on a : $F = G \circ H$.

$F(x) = G \circ H(x) = G(x + 2) = (x + 2)^2$.

---

❹ Par définition : $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$

$f \circ (g \circ h)(x) = f\big((g \circ h)(x)\big) = f\big((g(h(x)))\big) = f(g(h(x)))$

Evalué sur x, les deux fonctions $(f \circ g) \circ h$ et $f \circ (g \circ h)$ donnent le même nombre : $f(g(h(x)))$

Dans les deux cas, l'ensemble de départ est celui de la fonction h, l'ensemble d'arrivée celui de la fonction f.
Donc ces deux fonctions sont identiques.

---

❺ Notons P le prix de l'article au départ.

a) Après la réduction de 20%, le prix de l'article est de $P - 0{,}2 \cdot P = 0{,}8 \cdot P$.
Après l'augmentation de 20%, le prix de l'article est de $0{,}8 \cdot P + 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot P = 1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot P = 0{,}96 \cdot P =$
$= P - 0{,}04 \cdot P$.
Le changement de prix après ces deux variations correspond à une réduction de 4 %.

b) Notons x l'augmentation proportionnelle au prix après la baisse, pour ne pas avoir de changement.
Donc $0{,}8 \cdot P + x \cdot 0{,}8 \cdot P = (1 + x) \cdot 0{,}8 \cdot P = P$. La dernière égalité indique que la prix n'a pas changé.
$0{,}8 \cdot P + x \cdot 0{,}8 \cdot P = P \Leftrightarrow x \cdot 0{,}8 \cdot P = 0{,}2 \cdot P \Leftrightarrow x \cdot 0{,}8 = 0{,}2 \Leftrightarrow x = 0{,}2 / 0{,}8 = 0{,}25 = 25\%$.
Il faudrait une augmentation de prix de 25% après la baisse des 20%, pour que le prix reste inchangé.