<u>Quelques notations :</u>

Si vous ne vous ne savez pas comment noter l'ensemble des préimages, l'ordonnée à l'origine, l'ensemble des zéros, etc. vous pouvez toujours écrire une réponse en français.

Pour une fonction réelle f :

Le domaine de définition de f se note Dom(f). C'est un ensemble.

Dom $(f) = \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ la fonction f est définie pour tout nombre réel.

Dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ $\Leftrightarrow$ la fonction f est définie pour tout nombre réel, sauf le nombre a.

Dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{a\,;\,b\}$ $\Leftrightarrow$ la fonction f est définie pour tout nombre réel, sauf a et b.

Dom $(f) = \mathbb{R} \setminus [a\,;\,b]$ $\Leftrightarrow$ la fonction f est définie pour les nombres réels, sauf ceux de l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Dom $(f) = [a\,;\,b]$ $\Leftrightarrow$ la fonction f n'est définie que pour les nombres de l'intervalle $[a\,;\,b]$.

L'image de a par f se note $f(a)$. C'est un nombre réel.

L'ordonnée à l'origine de f se note $f(0)$. C'est l'image de 0.

L'ensemble des préimages de b par f se note : $f^{-1}(b)$.

Si b ne possède pas de préimage par f, on note $f^{-1}(b) = \varnothing$.

Si b possède une seule préimage a par f, on note $f^{-1}(b) = \{a\}$.

Si b possède les préimages a_1, a_2, a_3 et a_4 par f, on note $f^{-1}(b) = \{a_1\,;\,a_2\,;\,a_3\,;\,a_4\}$.

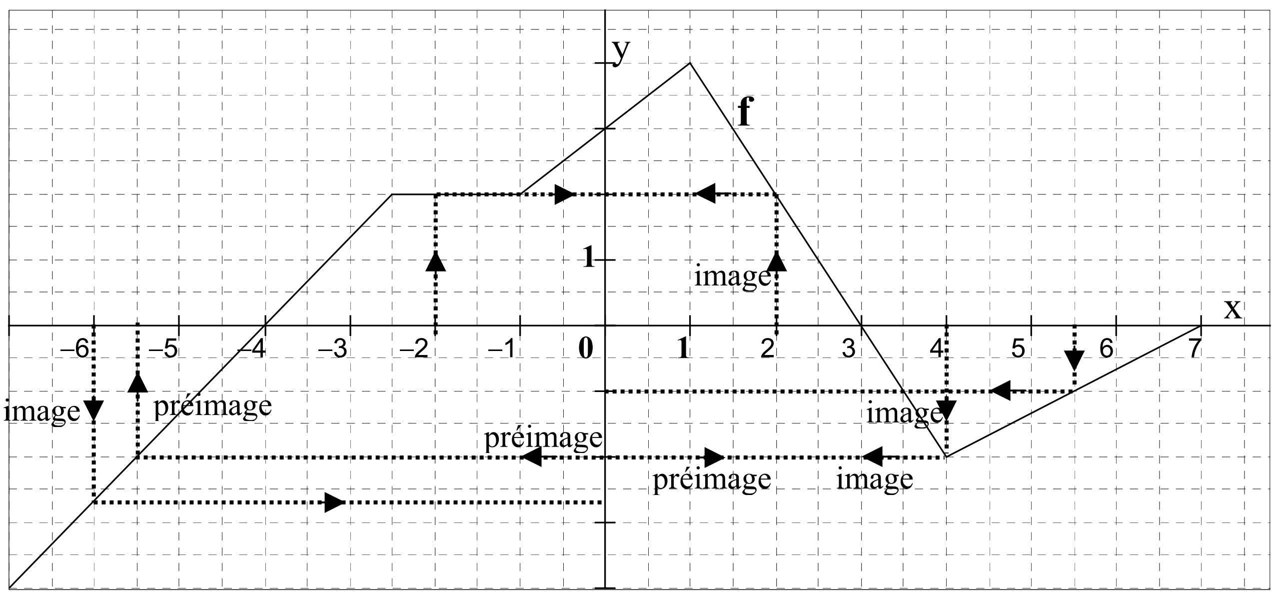
Si b possède l'intervalle $[a\,;\,c]$ comme préimages par f, on note $f^{-1}(b) = [a\,;\,c]$.

Si b possède tous les nombres réels comme préimages par f, on note $f^{-1}(b) = \mathbb{R}$.

L'ensemble des zéros de f se note Zéros(f). C'est l'ensemble des préimages de 0.

On a donc : Zéros$(f) = f^{-1}(0)$. (C'est une égalité entre deux ensembles)

❶



Images de -6 ; -4 ; -2 ; 0 ; +2 ; +4 et +5,5 par la fonction f.

$f(-6) \approx -2{,}7$; $f(-4) = 0$; $f(-2) = 2$; $f(0) = 3$; $f(2) = 2$; $f(4) = -2$; $f(5{,}5) = -1$

Préimages de -2 ; 0 ; +2 ; +3 ; +4 et +4,5 par la fonction f.

$f^{-1}(-2) = \{-5{,}5\,;\,4\}$; $f^{-1}(0) =$ Zéros$(f) = \{-4\,;\,3\,;\,7\}$; $f^{-1}(2) = [-2{,}5\,;\,-1] \cup \{2\}$;
$f^{-1}(3) = \{0\,;\,1{,}5\}$; $f^{-1}(4) = \{1\}$; $f^{-1}(4{,}5) = \varnothing$.

L'ordonnée à l'origine de f égale $f(0) = 3$.

❷ a) Images de : -2, 0 et 8 par $f(x) = -3x + 24$
$f(-2) = -3\cdot(-2) + 24 = 30$; $f(0) = -3\cdot 0 + 24 = 24$; $f(8) = -3\cdot 8 + 24 = 0$

b) Images de : -2, 0 et 8 par $f(x) = x^2 - 4$
$f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$; $f(0) = 0^2 - 4 = -4$; $f(8) = 8^2 - 4 = 60$

c) Images de : -2, 0 et 8 par $f(x) = \sqrt{x+2}$
$f(-2) = \sqrt{-2+2} = 0$; $f(0) = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$; $f(8) = \sqrt{8+2} = \sqrt{10}$

d) Images de : -2, 0 et 8 par $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$
$f(-2) = \dfrac{3\cdot(-2)}{(-2)^2+1} = \dfrac{-6}{5} = -1{,}2$; $f(0) = \dfrac{3\cdot 0}{0^2+1} = 0$; $f(8) = \dfrac{3\cdot 8}{8^2+1} = \dfrac{24}{65}$

---

❸ a) Préimage(s) de -1, 0 et $+2$ par $f(x) = -8x + 7$
$-8x + 7 = -1 \Leftrightarrow -8x = -8 \Leftrightarrow x = 1.$ $f^{-1}(-1) = \{1\}$
$-8x + 7 = 0 \Leftrightarrow -8x = -7 \Leftrightarrow x = 7/8.$ $f^{-1}(0) = \{7/8\}$
$-8x + 7 = 2 \Leftrightarrow -8x = -5 \Leftrightarrow x = 5/8.$ $f^{-1}(2) = \{5/8\}$

b) Préimage(s) de -1, 0 et $+2$ par $f(x) = 2x^2$
$2x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1/2$; pas possible. $f^{-1}(-1) = \varnothing$ -1 n'a pas de préimages par f.
$2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ $f^{-1}(0) = \{0\}$
$2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1.$ $f^{-1}(2) = \{-1 ; 1\}$.
Cet exemple montre qu'il peut y avoir aucune, une ou plusieurs préimages.

c) Préimage(s) de -1, 0 et $+2$ par $f(x) = \sqrt[3]{x}$
$\sqrt[3]{x} = -1 \Leftrightarrow x = -1.$ $f^{-1}(-1) = \{-1\}$.
$\sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ $f^{-1}(0) = \{0\}$.
$\sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8.$ $f^{-1}(2) = \{8\}$.

d) Préimage(s) de -1, 0 et $+2$ par $f(x) = 2$
$2 = -1$; pas possible. $f^{-1}(-1) = \varnothing$ -1 n'a pas de préimages par f.
$2 = 0$; pas possible. $f^{-1}(0) = \varnothing$ 0 n'a pas de préimages par f.
$2 = 2$; toujours vrai. $f^{-1}(2) = \mathbb{R}$ tous les nombres réels sont préimages de 2 par f.

---

❹ Déterminez le domaine de définition Dom(f), les zéros et l'ordonnée à l'origine des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 3x + 2$ Dom(f) $= \mathbb{R}$, car $3x + 2$ est bien défini pour tout nombre réel.
L'ordonnée à l'origine de f égale $f(0) = 2$.
$3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2/3.$ Zéros(f) $= f^{-1}(0) = \{-2/3\}$.

b) $f(x) = x^2 - 9$ Dom(f) $= \mathbb{R}$, car $x^2 - 9$ est bien défini pour tout nombre réel.
L'ordonnée à l'origine de f égale $f(0) = -9$.
$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3.$ Zéros(f) $= f^{-1}(0) = \{-3 ; 3\}$.

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ Dom(f) $= \mathbb{R}$, car $x^3 - 2x^2 + x$ est bien défini pour tout nombre réel.
L'ordonnée à l'origine de f égale $f(0) = 0$.
$x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
Zéros(f) $= f^{-1}(0) = \{0 ; 1\}$.

d) $f(x) = \sqrt{x}$ Dom(f) $= \mathbb{R}_+$, car $\sqrt{x}$ n'est bien défini que pour les nombres ≥ 0.
L'ordonnée à l'origine de f égale $f(0) = 0$.
$\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ Zéros(f) $= f^{-1}(0) = \{0\}$.

❹ Suite

e) $f(x) = \sqrt{x+5}$ Pour que $x \in \text{Dom}(f)$, il faut que :

$x + 5 \geq 0 \iff x \geq -5$ donc $\text{Dom}(f) = [-5\ ;\ \infty[$.

L'ordonnée à l'origine de f égale $f(0) = \sqrt{5}$.

$\sqrt{x+5} = 0 \iff x = -5$. $\text{Zéros}(f) = f^{-1}(0) = \{-5\}$.

f) $f(x) = \dfrac{5}{x+3}$ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. -3 doit être exclus pour éviter les divisions par 0.

L'ordonnée à l'origine de f égale $f(0) = \dfrac{5}{3}$.

$\dfrac{5}{x+3} = 0 \iff 5 = 0$; pas possible. $\text{Zéros}(f) = f^{-1}(0) = \varnothing$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$. -1 et 1 doivent être exclus pour éviter les divisions par 0.

L'ordonnée à l'origine de f égale $f(0) = \dfrac{0}{0^2-1} = 0$.

$\dfrac{x}{x^2-1} = 0 \iff x = 0$. $\text{Zéros}(f) = f^{-1}(0) = \{0\}$

h) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$. -2 et 2 doivent être exclus pour éviter les divisions par 0.

L'ordonnée à l'origine de f égale $f(0) = \dfrac{0-2}{0^2-4} = \dfrac{1}{2}$.

$x = 2$ annule le numérateur de $\dfrac{x-2}{x^2-4}$, mais $2 \notin \text{Dom}(f)$, donc $\text{Zéros}(f) = f^{-1}(0) = \varnothing$.

i) $f(x) = \sqrt{x^2}$ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, car $\sqrt{x^2}$ est bien défini pour tout nombre réel.

L'ordonnée à l'origine de f égale $f(0) = 0$.

$\sqrt{x^2} = 0 \iff x = 0$. $\text{Zéros}(f) = f^{-1}(0) = \{0\}$

j) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_+$, car $\left(\sqrt{x}\right)^2$ n'est bien défini que pour les nombres ≥ 0.

L'ordonnée à l'origine de f égale $f(0) = 0$.

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = 0 \iff x = 0$. $\text{Zéros}(f) = f^{-1}(0) = \{0\}$