I. La valeur absolue

Il est fréquemment utile de considérer un nombre sans son signe. Pour cela on définit la valeur absolue d'un nombre réel X par :

$$\boxed{|X| = \begin{cases} X & \text{si } X \geq 0 \\ -X & \text{si } X < 0 \end{cases}}$$

Remarquez que cela défini une application $\begin{aligned} |\ | : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$ vue dans la partie analyse.

Remarquez que $-X$ est un nombre positif si X est un nombre négatif !
La valeur absolue d'un nombre est toujours positive ou nulle si le nombre est nul.

<u>Exemples :</u>

$|47| = 47$; $|-47| = 47$; $|3{,}14| = 3{,}14$; $|-3{,}14| = 3{,}14$; $|0| = 0$; $\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4}$; $|\pi - 4| = 4 - \pi$

Il est utile se comprendre que $|A - B| = \begin{cases} A - B & \text{si } A \geq B \\ B - A & \text{si } A < B \end{cases}$

<u>Exemples :</u>
$|7 - 3| = 7 - 3 = 4$; $|3 - 7| = 7 - 3 = 4$; $|\pi - 3| = \pi - 3$; $|3 - \pi| = \pi - 3$

<u>Equations faisant intervenir la valeur absolue.</u>
Si le deuxième membre d'une équation avec valeurs absolues est une **constante**, disons $r \in \mathbb{R}$, alors nous avons les règles suivantes :

1) $|X| = r \iff X = r$ ou $X = -r$ si $r \geq 0$
2) $|X| = r \Rightarrow$ impossible si $r < 0$

<u>Exemples :</u>

a) $|2x - 1| = 3 \iff 2x - 1 = 3$ ou $2x - 1 = -3 \iff S = \{-1\ ;\ 2\}$

b) $|-3x + 8| = 0 \iff -3x + 8 = 0 \iff S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$

c) $|5x^2 + 7| = \sqrt{2} - 3 \Rightarrow S = \varnothing$

II.1 Les polynômes, définitions

Ce chapitre est à la limite entre l'analyse et l'algèbre. Plusieurs notions vues en analyse seront utilisées.

Définitions :

On appelle "**polynôme à coefficients réels**" une application $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\boxed{P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}$$

où a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... a_2, a_1 et a_0 sont des nombres réels et $a_n \neq 0$.

L'entier n est appelé le **degré du polynôme**.

$n \geq 0$. La seule exception est le polynôme nul $P(x) = 0$.

Les nombres réels a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 sont appelés les **coefficients** du polynôme.

a_0 est appelé le **terme constant**.

C'est la valeur que prend le polynôme quand on l'évalue en zéro. $P(0) = a_0$

a_n est appelé le **coefficient dominant**.

C'est le coefficient qui multiplie la plus grande puissance de x.

Remarques :

1) Il est utile de préciser que $a_n \neq 0$, pour pouvoir définir le degré du polynôme.
2) Si tous les coefficients sont nuls, alors $P(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. C'est le **polynôme nul**. Par convention on dit que son degré égale $-\infty$.

Exemples :

Voici un polynôme de degré 3 :

$P(x) = 4x^3 + 7x^2 - 9x + 15$. Ses coefficients sont : $a_3 = 4$; $a_2 = 7$; $a_1 = -9$; $a_0 = 15$

Le terme constant vaut 15.

Le coefficient dominant vaut 4.

Si on remplace x par une autre lettre, toutes les occurrences de x sont remplacées par cette autre lettre.

$P(t) = 4t^3 + 7t^2 - 9t + 15$

$P(y) = 4y^3 + 7y^2 - 9y + 15$

$P(\text{bidule}) = 4 \cdot \text{bidule}^3 + 7 \cdot \text{bidule}^2 - 9 \cdot \text{bidule} + 15$

$P(3) = 4 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 15 = 159$

Ici on sous-entend que t, y et **bidule** sont des nombres, même si on ne connaît pas leur valeur.

Voici un polynôme de degré 4 :

$P(x) = 17x^4 - 24x^3 + 14x^2 + 13x - 36$ donc $a_4 = 17$; $a_3 = -24$; $a_2 = 14$; $a_1 = 13$; $a_0 = -36$

$P(z) = 17z^4 - 24z^3 + 14z^2 + 13z - 36$

Le terme constant égale -36.

Le coefficient dominant égale 17.

Pourquoi étudier les polynômes ?

Evaluer un polynôme en un point est simple, puisqu'il ne faut faire que des additions et multiplications. Ce sont des fonctions qui ne sont ni trop simples ni trop compliquées à étudier. Les polynômes interviennent naturellement dans de nombreux problèmes. De plus, on montre que toute fonction "continue" peut être approchée par un polynôme.

II.2 Opérations sur les polynômes

Puisque les polynômes sont des fonctions réelles, on peut additionner, soustraire, multiplier, diviser et composer des polynômes entre eux.

Prenons deux polynômes : $A(x)=3x^2-8x+4$ et $B(x)=5x^3-6x^2+3x-2$.
Calculons leur **somme** :

$$(A+B)(x)=A(x)+B(x)=$$

on obtient un nouveau polynôme $A+B$, dont le degré est : ___

Calculons leur **différence** :

$$(A-B)(x)=A(x)-B(x)=$$

on obtient un nouveau polynôme $A-B$, dont le degré est : ___

Calculons leur **produit** avec un **nombre réel** :

$$-3\cdot A(x)=$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot B(x)=$$

on obtient de nouveaux polynômes, dont les degrés sont : degré($-3A$) = ___ , degré($\frac{1}{2}B$) = ___

Calculons leur **produit** :

$$(A\cdot B)(x)=A(x)\cdot B(x)=$$

on obtient un nouveau polynôme $A\cdot B$, dont le degré est : ___

<u>Cas général :</u>
Soient deux polynômes A et B, respectivement de degré m et n, définis par :

$$A(x)=a_m\cdot x^m+a_{m-1}\cdot x^{m-1}+a_{m-2}\cdot x^{m-2}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0 \qquad a_m\neq 0$$
$$B(x)=b_n\cdot x^n+b_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+b_2\cdot x^2+b_1\cdot x+b_0 \qquad b_n\neq 0$$

La **somme**, la **différence** et le **produit** de polynômes sont encore des **polynômes**.
Sans effectuer les calculs, on peut connaître *à l'avance* le degré de ces derniers :

- degré$(A+B)\leq\max(m\ ;\ n)$
  il y a toujours égalité, sauf si : $m=n$ <u>et</u> $a_m+b_n=0$.
- degré$(A-B)\leq\max(m\ ;\ n)$
  il y a toujours égalité, sauf si : $m=n$ <u>et</u> $a_m-b_n=0$.
- degré$(k\cdot A)=m$ où $k\in\mathbb{R}^*$ est une constante non nulle.
- degré$(A\cdot B)=m+n$

II.3 Division polynomiale

Nous allons voir qu'un polynôme peut être divisé par un autre, de façon similaire à la division d'un nombre entier par un autre.

Rappel : Divisez 483 par 5, avec un reste et un dividende entier.
Suite à cette division, on peut en conclure que : $483 = 5 \cdot 96 + 3$

Vocabulaire :
P=483 est le **dividende**, D=5 est le **diviseur**, Q=96 est le **quotient** et R=3 est le **reste**.

$\boxed{\text{Propriété importante : } P = D \cdot Q + R, \text{ avec } 0 \le R < D}$

Imitons ce procédé de division pour des polynômes :
Divisez $P(x) = 5x^2 - 7x + 4$ par $D(x) = x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} 5x^2 - 7x + 4 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-5x^2 + 10x} & 5x + 3 \\ 3x + 4 & \\ \underline{-3x + 6} & \\ 10 & \end{array}$$

Suite à cette division, on peut en conclure que :
$5x^2 - 7x + 4 = (x - 2) \cdot (5x + 3) + 10$

$P(x)=5x^2 - 7x + 4$ est le **dividende**, $D(x)=x - 2$ est le **diviseur**, $Q(x)=5x + 3$ est le **quotient** et $R(x)=10$ est le **reste**.

Voici un autre exemple :
Divisez le polynôme $A(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 7$ par le polynôme $B(x) = x^2 - x + 3$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 2x + 7 & x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Suite à cette division, on peut en conclure que :
$$x^3 - 3x^2 + 2x + 7 = (x^2 - x + 3) \cdot (\qquad\qquad) +$$

De façon générale :
Si P et D sont deux polynômes, avec degré(P) ≥ degré(D),
alors il existe deux polynômes Q et R avec degré(R) < degré(D) tels que : $\boxed{P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)}$

Les polynômes Q et R s'obtiennent par division polynomiale.

Définition : Si le reste R de la division de P par D est nul, c'est-à-dire si $R(x) = 0$, alors on dit que le polynôme P **est divisible par** le polynôme D.
Dans ce cas on a : $P(x) = D(x) \cdot Q(x)$

En résumé nous avons :

$$\begin{array}{r|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array} \quad \text{où} \quad P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x) \text{ et degré}(R) < \text{degré}(D)$$

Le polynôme P **est divisible par** le polynôme D si le reste R est nul, c.-à-d. si $R(x) = 0$.

Théorème :

Soit P un polynôme et soit $x_0 \in \mathbb{R}$

$P(x)$ est divisible par $(x - x_0)$ si et seulement si $P(x_0) = 0$

Dans ce cas, on dit que x_0 est une **racine** du polynôme P.

Attention :

Ici $P(x)$ et $(x - x_0)$ représentent deux polynômes, x_0 et $P(x_0)$ représentent deux nombres !

Conséquence :

Si l'on connaît une racine x_0, d'un polynôme P, alors on peut le factoriser en effectuant la division :
$P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x)$, où degré$(Q)$ = degré$(P) - 1$

Exercice :

Factorisez le polynôme $P(x) = x^3 - 7x + 6$ en observant que $P(1) = 0$.

Pour les curieux, voici une démonstration :

$\Rightarrow$ Si $P(x)$ est divisible par $(x - x_0)$, cela signifie que le reste est nul, et donc que $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x)$
Donc $P(x_0) = (x_0 - x_0) \cdot Q(x_0) = 0 \cdot Q(x_0) = 0$. Ceci montre une partie du théorème.

$\Leftarrow$ Si $P(x_0) = 0$.
Divisons $P(x)$ par $(x - x_0)$: $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x) + R(x)$ avec degré(R) < degré$(x - x_0) = 1$
Donc le polynôme R est un polynôme constant. $R(x) = k$ = constante.
Donc $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x) + k$.
En évaluant les polynômes en x_0, on trouve que : $0 = P(x_0) = \underbrace{(x_0 - x_0)}_{=0} \cdot Q(x_0) + k$, ce qui signifie que la constante k est nulle. Ainsi $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x)$ et P est bien divisible par $(x - x_0)$. CQFD.

II.4 Racines d'un polynôme et rappels

Définitions :
Un nombre x_0 tel que $P(x_0) = 0$ s'appelle une **racine** ou un **zéro** du polynôme.

L'ensemble des zéros d'un polynôme est noté **Zéros(*P*)**.

Remarque :
Si le polynôme est représenté par la lettre Q, on notera **Zéros(*Q*)** l'ensemble de ses zéros.

Plusieurs cas particuliers de polynômes ont déjà été étudiés en première année et même au cycle.

Les **polynômes de degré 1** sont les applications affines $P(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$.
L'équation $P(x) = 0$ s'écrit $ax + b = 0$ et admet une unique solution qui est $x = -b / a$.
L'ensemble des zéros de ce polynôme ne contient qu'un seul nombre : $\text{Zéros}(P) = \{-b / a\}$

Les **polynômes de degré 2** sont les fonctions paraboliques $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
Leur **discriminant** est défini par : $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c$
L'équation $P(x) = 0$ s'écrit $ax^2 + bx + c = 0$.
Selon le signe du discriminant, elle admet zéro, une ou deux solutions.
Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet aucune solution, donc $\text{Zéros}(P) = \{\}$
Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution, $\text{Zéros}(P) = \left\{\dfrac{-b}{2\cdot a}\right\}$
Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet exactement deux solutions, $\text{Zéros}(P) = \left\{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \,;\, \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right\}$

Les **polynômes de degré < 1** sont les polynômes de degré 0 ou $-\infty$. Ce sont des fonctions constantes.

Les polynômes de **degré 0** sont de la forme $P(x) = a$ avec $a \neq 0$.
Ils ne s'annulent jamais, $\text{Zéros}(P) = \{\}$.

Le polynôme de **degré $-\infty$** est de la forme $P(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.
Puisqu'il est toujours nul, $\text{Zéros}(P) = \mathbb{R}$.

Les **polynômes de degré 3 et 4** ont été vus plusieurs fois lors d'exercices de factorisation. Ces factorisations permettaient de déterminer les zéros de ces polynômes.

Dans la suite, on s'intéressera particulièrement à la factorisation de polynômes et à la recherche de leurs zéros.

II.5 Racines rationnelles de polynômes à coefficients entiers.

Nous allons voir sur un exemple comment trouver toutes les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.

Exemple sur le polynôme : $B(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 15$.

Supposons que $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ soit une racine rationnelle du polynôme B, c'est-à-dire que $B\left(\frac{p}{q}\right) = 0$.

On peut s'arranger pour que q soit positif et pour que p et q n'aient pas de facteurs communs.

Donc $\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 5\cdot\left(\frac{p}{q}\right) - 15 = 0$, donc $\frac{p^3}{q^3} - 3\cdot\frac{p^2}{q^2} + 5\cdot\frac{p}{q} - 15 = 0$

Multiplions par q^3 et développons pour qu'il n'y ait plus de fractions. L'égalité devient :

$p^3 - 3\cdot p^2\cdot q + 5p\cdot q^2 - 15\cdot q^3 = 0$ (égalité #)

En faisant passer le terme $-15\cdot q^3$ à droite de l'égalité # et en mettant p en évidence à gauche, on a :

$p\cdot\left(p^2 - 3p\cdot q + 5\cdot q^2\right) = 15\cdot q^3$

p et q n'ont pas de facteurs communs, donc ***p* divise 15**.

Donc les seules valeurs envisageables pour p sont : ±1 ; ±3 ; ±5 et ±15.

En faisant passer le terme p^3 à droite de l'égalité # et en mettant q en évidence à gauche, on a :

$q\cdot\left(-3\cdot p^2 + 5\cdot p\cdot q - 15\cdot q^2\right) = -p^3$

p et q n'ont pas de facteurs communs, donc ***q* divise –1**.

Donc la seule valeur envisageable pour q est 1.

<u>Conclusion :</u> si $\frac{p}{q}$ est une racine rationnelle du polynôme B, alors $\frac{p}{q}$ égale ±1 ; ±3 ; ±5 et ±15.

Il suffit de d'évaluer le polynôme B sur ces huit valeurs pour déterminer s'il possède une racine rationnelle.

Terminez en déterminant la racine rationnelle de B, puis en factorisant le polynôme B.

En résumé, on peut démontrer le théorème suivant :

Si $B(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ avec $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ et $a_j \in \mathbb{Z}$
c.-à-d. B est un polynôme de degré n dont tous les coefficients sont entiers, avec $a_0 \neq 0$.
Si $x_0 = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est une racine rationnelle irréductible du polynôme B, c'est-à-dire que $B\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$
Alors $\boldsymbol{p}$ **divise** $\boldsymbol{a_0}$ et $\boldsymbol{q}$ **divise** $\boldsymbol{a_n}$.

Exercice : soit $B(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3$
a) Déterminez l'ensemble des racines rationnels du polynôme B.
Indication : utilisez le théorème pour limiter les candidats possibles.
b) B possède-t-il d'autres racines ?

Un théorème qui a une importance historique : Le théorème fondamental de l'algèbre.
En utilisant ce que nous avons vu sur la factorisation, il est facile de voir qu'un polynôme de degré n possède au maximum n racines. Dans ce cas, on peut factoriser le polynôme en produit de polynômes du premier degré. Une question naturelle est :
"peut-on toujours factoriser un polynôme en produit de polynômes du premier degré ?"

Si on se limite aux nombres réels $\mathbb{R}$, la réponse est négative. Si on accepte de travailler avec les nombres complexes $\mathbb{C}$, la réponse est positive. Cette remarque montre l'importance des nombres complexes. (Que vous n'étudierez peut-être jamais dans votre vie ! Quel dommage :-))

Si on se limite aux nombres réels $\mathbb{R}$, on peut toujours factoriser un polynôme en produit de polynômes du premier degré ou du second degré avec discriminant négatif.

Les affirmations ci-dessus correspondent au théorème fondamental de l'algèbre. Il a fallu plusieurs siècles avant d'obtenir une démonstration rigoureuse de ce théorème.

III. Les fractions rationnelles.

Définition :
On appelle **fraction rationnelle** le quotient de deux polynômes.

Exemples :
$\dfrac{3x-7}{x+4}$ et $\dfrac{x^3+5x^2+3}{(x-1)\cdot(2x+4)}$ sont des fractions rationnelles.

$\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+5}$ et $\sqrt{\dfrac{25x^2}{4-x^2}}$ ne sont **pas** des fractions rationnelles.

Nous allons nous intéresser ici aux équations constituées de somme de fractions rationnelles.
On cherche pour quelle(s) valeur(s) d'une inconnue (souvent notée $\boldsymbol{x}$), une somme de fractions rationnelles est égale à une autre somme de fractions rationnelles.

Premier exemple :
Pour quelle(s) valeur(s) de **l'inconnue $\boldsymbol{x}$** l'expression suivante s'annule-t-elle ?

$$\frac{x-7}{x^2-5x+6}+\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-2}=0$$

Remarquons que le dénominateur x^2-5x+6 se factorise en $(x-3)\cdot(x-2)$. Donc l'équation devient :

$$\frac{x-7}{(x-3)\cdot(x-2)}+\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-2}=0$$

Les inconnues $\boldsymbol{x}$ au dénominateur nous dérangent. Pour les éliminer, on peut multiplier l'équation par $(x-3)\cdot(x-2)$ pour obtenir l'équation : $x-7+2\cdot(x-2)+(x-3)=0$

Qui se réduit en : $4x-14=0$ d'où on obtient la solution : $x=\dfrac{7}{2}$

Il faut encore vérifier que cette solution appartient bien à *l'ensemble de définition*. C.-à-d. qu'en remplaçant la solution trouvée dans l'équation, on ne divise pas par zéro. Nous en reparlerons plus loin.

Notre but est de définir une méthode pour résoudre ce genre d'équation.

Essentiellement, il n'y aura rien de plus dans ce chapitre que ce que nous avons déjà vu dans l'exemple. Quand l'inconnue apparaît au dénominateur, on multiplie les deux membres de l'équation par un dénominateur commun à toutes les fractions.

Voici un exemple complet de marche à suivre.
Souvent, les étapes (1) et (2) ont déjà été faites.
L'exemple est : $\frac{x^2-4x+9}{x^2+8x+15}+\frac{2x+1}{x+5}+\frac{1-x}{x+3}=\frac{x+2}{x+5}-\frac{3-x}{x+3}$

La méthode de résolution est toujours la même :

1) Si ce n'est pas déjà fait, mettre tous les termes du même côté, pour avoir une expression = 0.
   Ici : $\frac{x^2-4x+9}{x^2+8x+15}+\frac{2x+1}{x+5}+\frac{1-x}{x+3}-\frac{x+2}{x+5}+\frac{3-x}{x+3}=0$
2) Réduire (= simplifier) l'expression.
   Ici : $\underbrace{\frac{x^2-4x+9}{x^2+8x+15}}_{1^{er}\ terme}+\underbrace{\frac{x-1}{x+5}}_{2^{ème}\ terme}+\underbrace{\frac{4-2x}{x+3}}_{3^{ème}\ terme}=0$
3) Factoriser si possible les dénominateurs. Ici $x^2+8x+15=(x+3)\cdot(x+5)$
   Ici, cela donne : $\underbrace{\frac{x^2-4x+9}{(x+5)\cdot(x+3)}}_{1^{er}\ terme}+\underbrace{\frac{x-1}{x+5}}_{2^{ème}\ terme}+\underbrace{\frac{4-2x}{x+3}}_{3^{ème}\ terme}=0$
4) Définir **l'ensemble de définition**, c.-à-d.
   l'ensemble des valeurs de x pour lesquels l'expression à un sens.
   En général, ce sera tous les nombres réels, sauf quelques exceptions.
   Ici c'est $\mathbb{R} \setminus \{ -5\ ;\ -3 \}$, car pour $x=-5$ et pour $x=-3$, on divise par zéro.
5) Eliminer les dénominateurs, en multipliant les deux membres de l'équation par le plus petit dénominateur commun. Ici il faut multiplier par $(x + 3) \cdot (x + 5)$.
   Ceci correspond à mettre toutes les fractions rationnelles au même dénominateur, puis à le supprimer.
   Ici l'équation devient : $\underbrace{x^2-4x+9}_{1^{er}\ terme}+\underbrace{(x-1)\cdot(x+3)}_{2^{ème}\ terme}+\underbrace{(4-2x)\cdot(x+5)}_{3^{ème}\ terme}=0$
6) Développer tous les produits.
   Ici : $x^2-4x+9\quad +x^2+2x-3\quad -2x^2-6x+20=0$
7) Réduire. On obtiendra une équation de degré zéro, un, deux, trois, ... rarement plus au collège.
   Ici : $8x+26=0$
8) Résoudre.
   Ici : $x=-\frac{26}{8}=-\frac{13}{4}$
9) Vérifier que les solutions trouvées (ici une seule) font partie de l'ensemble de définition.
   $-\frac{13}{4}$ appartient à l'ensemble de définition, car c'est un nombre différent de -3 et de -5.
10) Ecrire l'ensemble des solutions.
   Ici : $S=\left\{-\frac{13}{4}\right\}$

Ouf..., c'est fini.

C'est relativement long. Pour ne pas faire d'erreurs, il faut maîtriser le calcul algébrique, écrire tout, proprement et ne pas sauter des étapes.

L'idée maîtresse est simple. SIMPLIFIER l'équation initiale jusqu'à obtenir une équation équivalente que l'on sait résoudre.

Voici un exemple qui montre pourquoi il faut vérifier (au point 9) que les solutions trouvées appartiennent au domaine de définition :

Cherchons les solutions de l'équation : $\frac{x+1}{x-3}-\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x^2-4x+3}$

Etapes :

1) On met tous les termes à gauche de l'égalité : $\frac{x+1}{x-3}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-4x+3}=0$
2) Rien à réduire.
3) On factorise les dénominateurs : $\frac{x+1}{x-3}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-3)\cdot(x-1)}=0$
4) L'ensemble de définition = $\mathbb{R} \setminus \{\ 1\ ;\ 3\ \}$
5) On multiplie par $(x-3)\cdot(x-1)$ pour obtenir : $(x+1)\cdot(x-1) \quad -(x-3) \quad -2=0$
6) On développe : $x^2-1-x+3-2=0$
7) On réduit : $x^2-x=0$ donc $x\cdot(x-1)=0$
8) Solutions à tester : $x=0$ et $x=1$
9) On voit que $x=1$ n'appartient pas à l'ensemble de définition, donc doit être éliminé.
10) L'ensemble des solutions est $S=\{0\}$

On a vu qu'au point (9) il faut éliminer une solution fictive, car elle correspond à une division par 0.

Voici un dernier exemple. Faites-le comme exercice, puis vérifiez.

Cherchons les solutions de l'équation : $\frac{1}{x^2+x}+\frac{x}{x-1}=1+\frac{2}{x^2-1}$

Etapes :

1) On met tous les termes à gauche de l'égalité : $\frac{1}{x^2+x}+\frac{x}{x-1}-1-\frac{2}{x^2-1}=0$
2) Rien à réduire.
3) On factorise le dénominateur : $\frac{1}{x\cdot(x+1)}+\frac{x}{x-1}-1-\frac{2}{(x+1)\cdot(x-1)}=0$
4) L'ensemble de définition = $\mathbb{R} \setminus \{\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ \}$
5) On multiplie par $x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$ pour obtenir :
   $(x-1) \quad +x^2\cdot(x+1) \quad -x\cdot(x+1)\cdot(x-1) \quad -2x=0$
6) On développe : $x-1 \quad +x^3+x^2 \quad -x^3+x \quad -2x=0$
7) On réduit : $x^2-1=0$ donc $(x+1)\cdot(x-1)=0$
8) Solutions : $x=-1$ et $x=1$
9) On voit qu'aucune des deux solutions n'appartient à l'ensemble de définition, donc :

10 L'ensemble des solutions est : $S=\varnothing$. On peut aussi noter : $S=\{\ \}$

<u>Comment des solutions non valides peuvent-elles apparaître ?</u>

Il *semble* pourtant qu'on n'utilise que des règles de simplification valides.
En multipliant au point (5) par $(x-3)\cdot(x-1)$ dans le premier exemple de cette page, on multiplie par zéro si $x=3$ ou si $x=1$.
Or, multiplier par zéro n'est pas une simplification valide. Multiplier par zéro fait apparaître de fausses solutions. (Cela n'enlève pas de solutions correctes).
C'est la raison pour laquelle il faut vérifier en (9) la validité des résultats trouvés.

IV. Les inéquations

Au lieu de considérer des équations du style $3x + 4 = 7x - 20$, on peut se poser des questions du style :
" Pour quelles valeurs du nombre réel x a-t-on : $3x + 4 < 7x - 20$? "
Un problème de ce style s'appelle une **inéquation**.

Rappel :
Chaque équation peut être modifiée en une **équation équivalente** par une des actions suivantes :
1) En développant et réduisant chacune des deux expressions.
2) En additionnant ou soustrayant le même nombre à chacune des deux expressions
3) En multipliant ou divisant par le même nombre différent de zéro chacune des deux expressions.

Pour une **inéquation**, les trois même règles sont valables, avec *une exception* !

Si on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif, il faut changer le symbole de comparaison ($<$ devient $>$; $>$ devient $<$; $\leq$ devient $\geq$; $\geq$ devient $\leq$)
Par exemple, $2 < 3$, mais $-2 > -3$!

Illustration en résolvant la même inéquation de deux manières différentes.
1) $3x + 4 < 7x - 20 \Leftrightarrow 4 + 20 < 7x - 3x \Leftrightarrow 24 < 4x \Leftrightarrow 6 < x \Rightarrow S =]6 ; \infty[$
2) $3x + 4 < 7x - 20 \Leftrightarrow 3x - 7x < -20 - 3 \Leftrightarrow -4x < -24 \underset{\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 6 \Rightarrow S =]6 ; \infty[$

ici on divise par -4,
donc on change le "<" en ">"

IV.1 Les inéquations de degré 1

Dans ce cas, les deux membres de l'inéquation sont des polynômes de degrés 1. Dans ce cas, on applique les règles indiquées ci-dessus dans le but d'isolé l'inconnue (généralement x) dans un membre de l'inéquation et d'isolé un nombre dans le second membre de l'inéquation.
Les exemples ci-dessus correspondent à ce cas. Voici un autre exemple :

$$17x - 14 \geq 22x + 7 \Leftrightarrow 17x - 22x \geq 14 + 7 \Leftrightarrow -5x \geq 21 \underset{\uparrow}{\Leftrightarrow} x \leq -21/5 \Rightarrow S =]-\infty ; -21/5]$$

ici on divise par -5,
donc on change le "≥" en "≤"

Je trouve plus simple de résoudre de la manière suivante, car on évite de diviser ou multiplier par un nombre négatif :
$17x - 14 \geq 22x + 7 \Leftrightarrow -14 - 7 \geq 22x - 17x \Leftrightarrow -21 \geq 5x \Leftrightarrow -21/5 \geq x \Rightarrow S =]-\infty ; -21/5]$

Remarquez que l'intervalle $]-\infty ; -21/5]$ est *fermé à droite* "]", car x est plus petit ou égale à $-21/5$.

L'inéquation : $17x - 14 > 22x + 7$ a comme solution : $S =]-\infty ; -21/5[$ *ouvert à droite*.

IV.2 Les inéquations de degré supérieur à 1

Méthode de résolution par factorisation d'une inéquation polynomiale de degré ≥ 2.
Dans un premier temps, on modifiera l'inéquation pour placer tous les termes dans un membre et avoir zéro dans l'autre membre. Par exemple : $x - 20 \leq -x^2$ deviendra $x^2 + x - 20 \leq 0$.

Le polynôme impliqué dans l'inéquation $x^2 + x - 20 \leq 0$ se factorise en $(x + 5)\cdot(x - 4) \leq 0$
Puis, à l'aide d'un **tableau de signes**, on détermine le signe de chacun des facteurs en fonction de x.

x		-5		4	
$x + 5$	–	0	+	+	+
$x - 4$	–	–	–	0	+
$(x + 5)\cdot(x - 4)$	+	0	–	0	+

La dernière ligne est obtenue par la règle des signes. "–" fois "–" donne "+", etc.
Elle donne la solution. Ici S = [–5 ; 4].

Autre exemple :
Cherchons les valeurs de x satisfaisant : $x^3 - 7x + 6 > 0$
Il a été vu en page 5 que : $x^3 - 7x + 6 = (x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$
A l'aide d'un **tableau de signes**, on détermine le signe de chacun des facteurs en fonction de x.

x		-3		1		2	
$x + 3$	–	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	–	–	–	0	+	+	+
$x - 2$	–	–	–	–	–	0	+
$(x + 3)\cdot(x - 1)\cdot(x - 2)$	–	0	+	0	–	0	+

La dernière ligne est obtenue par la règle des signes. "–" fois "–" donne "+", etc.
Elle donne la solution. Ici S =]–3 ; 1[∪]2 ; ∞[.
Les intervalles sont ouverts, car l'inégalité est stricte.

Encore un exemple :
Cherchons les valeurs de x satisfaisant : $(x-3)^2 \cdot (7-2x) \cdot x \leq 0$
A l'aide d'un **tableau de signes**, on détermine le signe de chacun des facteurs en fonction de x.

x		0		3		$3{,}5$	
x	–	0	+	+	+	+	+
$(x - 3)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$7 - 2x$	+	+	+	+	+	0	–
$(x - 3)^2 \cdot (7 - 2x) \cdot x$	–	0	+	0	+	0	–

La dernière ligne est obtenue par la règle des signes. "–" fois "–" donne "+", etc.
Elle donne la solution. Ici S =]–∞ ; 0] ∪ [3,5 ; ∞[∪ {3}.
Les valeurs qui annulent l'expression sont solutions, il faut donc inclure 3 dans l'ensemble des solutions.

IV.3 Les inéquations fractionnaires

Les inéquations fractionnaires sont des inéquations dont les membres sont des fractions rationnelles.

Dans un premier temps, on modifiera l'inéquation pour placer tous les termes dans un membre et avoir zéro dans l'autre membre. Par exemple : $x-1 \geq \frac{5x-1}{x+4}$ deviendra $x-1-\frac{5x-1}{x+4} \geq 0$.
Ensuite on modifie le membre non nul en une fraction rationnelle.

<u>Exemple :</u>

$$x-1 \geq \frac{5x-1}{x+4} \Leftrightarrow x-1-\frac{5x-1}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)\cdot(x+4)}{x+4}-\frac{5x-1}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)\cdot(x+4)-(5x-1)}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-4-5x+1}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{x+4} \geq 0$$

On **factorise** le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle.

$$\frac{x^2-2x-3}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)\cdot(x-3)}{x+4} \geq 0$$

Puis, à l'aide d'un **tableau de signes**, on détermine le signe de chacun des facteurs en fonction de x.

x		-4		-1		3	
$x+4$	–	0	+	+	+	+	+
$x+1$	–	–	–	0	+	+	+
$x-3$	–	–	–	–	–	0	+
$\frac{(x+1)\cdot(x-3)}{x+4}$	–	///	+	0	–	0	+

La dernière ligne est obtenue par la règle des signes. "–" fois "–" donne "+", etc.
"///" signifie que pour $x = -4$, la fraction rationnelle n'est pas définie.
Elle donne la solution. Ici S =]–4 ; –1] ∪ [3 ; ∞[.

IV.4 Les inéquations avec valeur absolue

S'il n'y a qu'une seule valeur absolue, on peut se ramener à un des cas suivant :

$|f(x)| < g(x)$ ou $|f(x)| \leq g(x)$ ou $|f(x)| \geq g(x)$ ou $|f(x)| > g(x)$

1) $|f(x)| < g(x)$ signifie $f(x) > -g(x)$ et $f(x) < g(x)$, abrégé en : $-g(x) < f(x) < g(x)$
2) $|f(x)| > g(x)$ signifie $f(x) < -g(x)$ ou $f(x) > g(x)$

On peut remplacer ci-dessus "<" par "≤" et ">" par "≥".
Il faut donc résoudre deux inéquations et combiner les deux ensembles de solutions par une intersection dans le premier cas et par une union dans le deuxième cas. (et $\leftrightarrow \bigcap$), (ou $\leftrightarrow \bigcup$)

Exemples :

1) $|2x-3| < 7 \;\Leftrightarrow\; -7 < 2x-3 < 7 \;\Leftrightarrow\; -4 < 2x < 10 \;\Leftrightarrow\; -2 < x < 5$; $S =]-2\,;5[$

2) $|x+3| > 4 \;\Leftrightarrow\; x+3 < -4$ ou $x+3 > 4 \;\Leftrightarrow\; x < -7$ ou $x > 1$; $S =]-\infty\,;-7[\bigcup]1\,;\infty[$

3) $|x-2| < 1-2x \;\Leftrightarrow\; -(1-2x) < x-2 < 1-2x \;\Leftrightarrow\; -1+2x < x-2 < 1-2x \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x < -1$ et $3x < 3 \;\Leftrightarrow\; x < -1$ et $x < 1 \;\Leftrightarrow\; x < -1$; $S =]-\infty\,;-1[$
La condition $x < -1$ est plus restrictive que la condition $x < 1$, donc on ne garde que $x < 1$.

4) $|4-x| \geq 3-2x \;\Leftrightarrow\; 4-x \geq 3-2x$ ou $4-x \leq -(3-2x) \;\Leftrightarrow\; x \geq -1$ ou $4-x \leq -3+2x \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x \geq -1$ ou $7 \leq 3x \;\Leftrightarrow\; x \geq -1$ ou $x \geq 7/3 \;\Leftrightarrow\; x \geq -1$; $S = [-1\,;\infty[$
La condition $x \geq -1$ est plus générale que la condition $x \geq 7/3$, donc on ne garde que $x \geq -1$.

Index