❶ Questions diverses :

1.1 L'expression $P(x)=\dfrac{x^9-\pi\cdot x^3+\sqrt{2}}{13}$ correspond-elle à un polynôme ?

Oui, c'est un polynôme de degré 9. Le coefficient de x^3 est irrationnelle, ainsi que le coefficient constant.

1.2 L'expression $P(x)=x^3+2x^2-5+8x^{-2}$ correspond-elle à un polynôme ?

Non, ce n'est pas un polynôme, car une des puissances de x est négative.

1.3 Déterminez le reste de la division de $P(x)=x^7-4x^5+3x^3-4x$ par $x-2$.

Le reste de la division égale $P(2)=2^7-4\cdot 2^5+3\cdot 2^3-4\cdot 2=16$

1.4 Trouvez deux racines du polynôme $P(x)=x^9+5x^8+6x^7-3x^2-15x-18$, sachant qu'il est divisible par $D(x)=x^2+5x+6$.

Puisque $P(x)$ est divisible par $D(x)$, les racines de $D(x)$ sont aussi racines de $P(x)$.

$D(x)=(x+2)\cdot(x+3)$, donc -2 et -3 sont deux racines de $P(x)$.

(Il y en a une autre car $P(x)=(x^2+5x+6)\cdot(x^7-3)$, mais cela n'est pas demandé.)

---

❷ a) $P_1(x)=6x^3+25x^2+2x-8$

Il faut chercher des racines de la forme $\dfrac{p}{q}$, avec p qui divise 8 et q qui divise 6.

On trouve que : $P_1\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$; $P_1(-4)=0$; $P_1\left(-\dfrac{2}{3}\right)=0$.

$Z\acute{e}ros(P_1)=\left\{\dfrac{1}{2};-4;-\dfrac{2}{3}\right\}$

b) $P_2(x)=2x^4+x^3-14x^2-16x-15$

Il faut chercher des racines de la forme $\dfrac{p}{q}$, avec p qui divise 15 et q qui divise 2.

On trouve que : $P_2\left(-\dfrac{5}{2}\right)=0$; $P_2(3)=0$.

Pour chercher les zéros supplémentaires, il faut faire la division polynomiale de $P_2(x)$ par $(2x+5)\cdot(x-3)$ c'est-à-dire par $2x^2-x-15$.

On trouve : $P_2(x)=\left(2x^2-x-15\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)$

Le facteur x^2+x+1 n'a pas de zéros car son discriminant vaut $\Delta=-3$.

Donc : $Z\acute{e}ros(P_2)=\left\{-\dfrac{5}{2};3\right\}$

Suite de l'exercice 2.

c) $P_3(x) = 2x^4 + 9x^3 - 9x^2 - 18x + 10$

Il faut chercher des racines de la forme $\dfrac{p}{q}$, avec p qui divise 10 et q qui divise 2.

On trouve que : $P_3(-5) = 0$; $P_3\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Pour chercher les zéros supplémentaires, il faut faire la division polynomiale de $P_3(x)$ par $(x+5)\cdot(2x-1)$ c'est-à-dire par $2x^2 + 9x - 5$.

On trouve : $P_3(x) = \left(2x^2 + 9x - 5\right)\cdot\left(x^2 - 2\right)$

On trouve ainsi les deux zéros supplémentaires :

Donc : $Zéros(P_3) = \left\{ -5\,;\dfrac{1}{2}\,;-\sqrt{2}\,;\sqrt{2} \right\}$.

d) $P_4(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

Il faut chercher des racines entières qui divisent 12.

On trouve que : $P_4(1) = 0$; $P_4(-3) = 0$; $P_4(-4) = 0$.

Le polynôme étant de degré 3, il n'a pas plus de 3 racines, elles ont donc toutes été trouvées.

On trouve ainsi les deux zéros supplémentaires :

Donc : $Zéros(P_4) = \{ 1\,;-3\,;-4 \}$.

---

❸ a) $P_1(x) = 6x^3 + 25x^2 + 2x - 8$. C'est le même polynôme que celui de l'exercice 2.

Il faut chercher des racines de la forme $\dfrac{p}{q}$, avec p qui divise 8 et q qui divise 6.

On trouve que : $P_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$; $P_1(-4) = 0$; $P_1\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 0$.

Donc la factorisation est : $P_1(x) = 6\cdot\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\cdot(x+4)\cdot\left(x + \dfrac{2}{3}\right)$

On peut aussi écrire : $P_1(x) = (2x-1)\cdot(x+4)\cdot(3x+2)$

b) $P_2(x) = 7x^3 - 12x^2 - 2x + 5$

Il faut chercher des racines de la forme $\dfrac{p}{q}$, avec p qui divise 5 et q qui divise 7.

On trouve que : $P_2\left(\dfrac{5}{7}\right) = 0$, mais pas d'autres racines simples.

Il faut donc effectuer la division de $P_2(x)$ par $7x - 5$.

On trouve : $P_2(x) = (7x-5)\cdot\left(x^2 - x - 1\right)$.

Par Viète, on trouve les racines de $x^2 - x - 1$ qui sont : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Donc la factorisation est : $P_2(x) = 7\cdot\left(x - \dfrac{5}{7}\right)\cdot\left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

On peut aussi écrire : $P_2(x) = (7x-5)\cdot\left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Suite de l'exercice 3.

c) $P_3(x) = 3x^3 - 7x^2 - 21x + 49$

Il faut chercher des racines de la forme $\frac{p}{q}$, avec p qui divise 49 et q qui divise 3.

On trouve que : $P_3\left(\frac{7}{3}\right) = 0$, mais pas d'autres racines simples.

Il faut donc effectuer la division de $P_3(x)$ par $3x - 7$.

On trouve : $P_3(x) = (3x-7)\cdot(x^2-7)$.

Donc la factorisation est : $P_3(x) = (3x-7)\cdot(x-\sqrt{7})\cdot(x+\sqrt{7})$.

d) $P_4(x) = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$

Il faut chercher des racines entières qui divisent 81.

On trouve que : $P_4(3) = 0$, mais pas d'autres racines simples.

Par division polynomiale on trouve : $P_4(x) = (x-3)\cdot(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)$

On cherche une racine du deuxième facteur, qui divise 27. On trouve $x = 3$.

Donc $P_4(x) = (x-3)\cdot(x-3)\cdot(x^2-6x+9)$.

Et donc $P_4(x) = (x-3)\cdot(x-3)\cdot(x-3)^2 = (x-3)^4$

e) $P_5(x) = 4x^5 + 12x^4 + 9x^3$

Une première factorisation est immédiate : $P_5(x) = x^3\cdot(4x^2+12x+9)$.

Ensuite, on constate que le deuxième facteur correspond à la première identité remarquable.

Donc $P_5(x) = x^3\cdot(2x+3)^2$

f) $P_6(x) = 5x^4 + 30x^3 + 25x^2 - 60x$

Il faut commencer par mettre en évidente $5x$, ce qui donne : $P_6(x) = 5x\cdot(x^3+6x^2+5x-12)$

Les racines du deuxième facteurs ont été déterminés dans l'exercice 2.d.

Donc la factorisation est simple.

On trouve : $P_6(x) = 5x\cdot(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x+4)$

---

❹ Paul pense à un nombre rationnel.

Déterminez ce nombre, sachant que 7 fois le cube de ce nombre est égale à la différence entre 1 et 48 fois son carré.

Notons x ce nombre rationnel. Il satisfait l'équation : $7x^3 = 1 - 48x^2$.

Le problème revient à résoudre une équation du troisième degré : $7x^3 + 48x^2 - 1 = 0$.

La recherche des racines rationnelles se limites à ± 1 et à $\pm 1/7$.

On trouve $x = 1/7$ comme solution et il n'y à pas d'autres solutions rationnelle, donc Paul pense au nombre 1/7.