❶ a) $|x| \le 4 \iff x \ge -4$ et $x \le 4$ $S = [-4\,;4\,]$

b) $|x| \ge 4 \iff x \le -4$ ou $x \ge 4$ $S =]-\infty\,;-4] \cup [4\,;\infty[$ on écrit aussi $S = \mathbb{R} \setminus]-4\,;4[$

c) $|x| \ge -4$ c'est toujours vrai, donc $S = \mathbb{R}$

d) $|x| \le -4$ c'est jamais vrai, donc $S = \varnothing$

e) $|x-3| \le 5 \iff x-3 \ge -5$ et $x-3 \le 5 \iff x \ge -2$ et $x \le 8$ $S = [-2\,;8\,]$

f) $|2x+5| < 8 \iff 2x+5 > -8$ et $2x+5 < 8 \iff x > -13/2$ et $x < 3/2$ $S =]-6{,}5\,;1{,}5\,[$

g) $|x-2| \le 1-2x \iff x-2 \ge -1+2x$ et $x-2 \le 1-2x \iff -1 \ge x$ et $3x \le 3$ $S =]-\infty\,;-1\,]$

h) $|2x-2| \le 1-2x \iff 2x-2 \ge -1+2x$ et $2x-2 \le 1-2x \iff 0 \ge 1$ et $4x \le 3$ $S = \varnothing$

i) $|3-5x| \ge x-7 \iff 3-5x \le -x+7$ ou $3-5x \ge x-7 \iff -4 \le 4x$ ou $10 \ge 6x \iff$

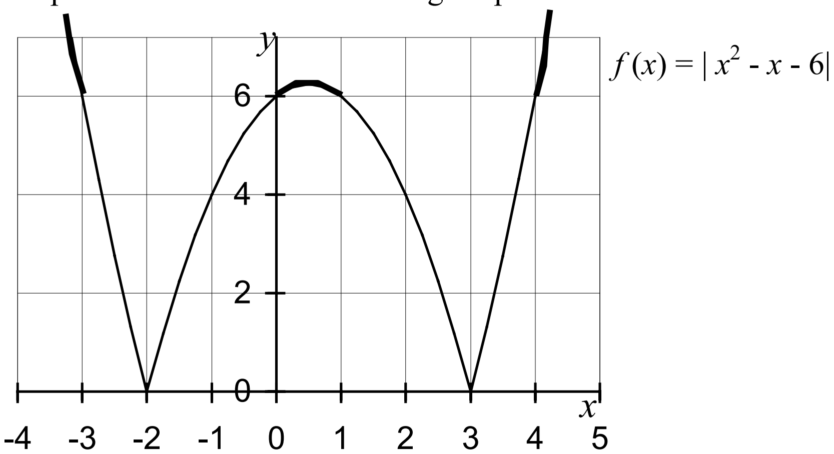
$\iff -1 \le x$ ou $10/6 \ge x$ c'est toujours vrai, donc $S = \mathbb{R}$

j) $|x^2-x-6| \ge 6 \iff x^2-x-6 \le -6$ ou $x^2-x-6 \ge 6 \iff x^2-x \le 0$ ou $x^2-x-12 \ge 0 \iff$

$\iff x\cdot(x-1) \le 0$ ou $(x-4)\cdot(x+3) \ge 0 \iff x \in [0\,;1]$ ou $x \in \mathbb{R} \setminus]-3\,;4\,[$

$S =]-\infty\,;-3] \cup [0\,;1] \cup [4\,;\infty\,[$

On pourrait faire un tableau de signes pour résoudre les deux inéquations du second degré.



k) $|x| < \dfrac{1}{x} \iff x > -\dfrac{1}{x}$ et $x < \dfrac{1}{x} \iff x + \dfrac{1}{x} > 0$ et $x - \dfrac{1}{x} < 0 \iff$

$\iff \dfrac{x^2+1}{x} > 0$ et $\dfrac{x^2-1}{x} < 0 \iff x > 0$ et $\dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{x} < 0$

$x^2 + 1$ est toujours positif, donc le signe de $\dfrac{x^2+1}{x}$ est le même que celui de x.

Puisque $x > 0$, $\dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{x} < 0$ est équivalent à $(x+1)\cdot(x-1) < 0$, qui est équivalent à $-1 < x < 1$. Mais comme $x > 0$, la solution est : $S =]\,0\,;1\,[$.

Il est bon ensuite de vérifier que cette solution est raisonnable.

l) $x^2 \ge |2x-3| \iff |2x-3| \le x^2 \iff 2x-3 \ge -x^2$ et $2x-3 \le x^2 \iff$

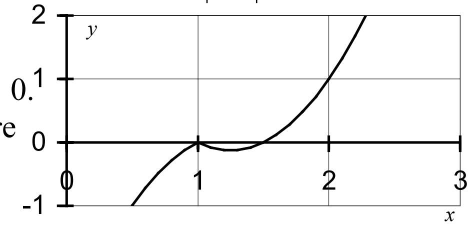
$\iff x^2+2x-3 \ge 0$ et $0 \le x^2-2x+3 \iff (x+3)\cdot(x-1) \ge 0$ et $0 \le x^2-2x+3$

La première condition implique que $x \in \mathbb{R} \setminus]-3\,;1\,[$, la deuxième condition est toujours satisfaite, car le discriminant de x^2-2x+3 est négatif $\Delta = b^2-4ac = 4-12 = -8$.

On peut aussi voir que $x^2-2x+3 = x^2-2x+1+2 = (x-1)^2+2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $S = \mathbb{R} \setminus]-3\,;1\,[$

❶ suite



m) $|x-1|\cdot(2x-3)\geq 0 \iff x=1$ ou $2x\geq 3 \iff x=1$ ou $x\geq 3/2$

L'inégalité est satisfaite si $x = 1$, car dans ce cas l'expression égale 0. Dans tous les autres cas, l'expression dans la valeur absolue peut être supprimée, car elle est toujours positive. Donc $S=\{1\}\cup[\,1,5\,;\infty\,[$

n) $x^2-2\cdot|x|+2<5 \iff x^2-3<2\cdot|x| \iff 2\cdot|x|>x^2-3 \iff 2x<-x^2+3$ ou $2x>x^2-3 \iff$

$\iff x^2+2x-3<0$ ou $x^2-2x-3<0 \iff (x+3)\cdot(x-1)<0$ ou $(x-3)\cdot(x+1)<0 \iff$

$\iff x\in\,]-3\,;1\,[$ ou $x\in\,]-1\,;3\,[\iff x\in\,]-3\,;3\,[$

$S=\,]-3\,;3\,[$