❶ a) $3 > 5x \iff x < 3/5 \quad S =]-\infty\,;3/5[$

b) $-6 \geq 4x \iff x \leq -6/4 \quad S =]-\infty\,;-3/2\,]$

c) $3x - 1 - 9 < 24x - 10 + 20x \iff 0 < 41x \quad S =]0\,;\infty[= \mathbb{R}_+^*$

d) $x^2 \leq 4 \iff x \leq 2$ et $x \geq -2 \quad S = [-2\,;2\,]$

e) $x^2 > 8 \iff x > \sqrt{8}$ ou $x < -\sqrt{8} \quad S = \mathbb{R} \setminus [-2\cdot\sqrt{2}\,;2\cdot\sqrt{2}\,]$ $\quad (\sqrt{8} = 2\cdot\sqrt{2})$

On peut aussi écrire la solution comme suit : $S =]-\infty\,;-2\cdot\sqrt{2}\,[\cup]\,2\cdot\sqrt{2}\,;\infty[$

f) $x^2 - 4x + 7 < 0 \iff \Delta = 4^2 - 4\cdot1\cdot7 = -12 < 0$, donc le polynôme est toujours ne même signe. Il ne satisfait jamais la condition, donc $S = \varnothing$.

g) $x^2 - 4x - 5 > 0 \iff (x-5)\cdot(x+1) > 0$, donc $(x - 5)$ et $(x + 1)$ doivent être de même signe.
Faisons un tableau de signes :

x		-1		5	
$(x + 1)$	–	0	+	+	+
$(x - 5)$	–	–	–	0	+
$(x - 5)\cdot(x + 1)$	+	0	–	0	+

donc $S =]-\infty\,;-1[\cup]\,5\,;\infty[$ autre écriture : $S = \mathbb{R} \setminus [\,-1\,;5\,]$

h) $x^2 + 4x - 12 \leq 0 \iff (x+6)\cdot(x-2) \leq 0$, donc $(x + 6)$ et $(x - 2)$ doivent être de signes opposés ou un des deux doit être nul.
Faisons un tableau de signes :

x		-6		2	
$(x + 6)$	–	0	+	+	+
$(x - 2)$	–	–	–	0	+
$(x + 6)\cdot(x - 2)$	+	0	–	0	+

donc $S = [-6\,;2\,]$.

i) $(x+5)\cdot(x-2)\cdot(x-1) < 0$
Faisons un tableau de signes :

x		-5		1		2	
$(x + 5)$	–	0	+	+	+	+	+
$(x - 1)$	–	–	–	0	+	+	+
$(x - 2)$	–	–	–	–	–	0	+
$(x + 5)\cdot(x - 1)\cdot(x - 2)$	–	0	+	0	–	0	+

donc $S =]-\infty\,;-5[\cup]1\,;2[$.

j) Il faut factoriser : $P(x) = x^3 + x + 2$. On constate que $x = -1$ est un zéro du polynôme P, donc on peut le factoriser avec une division polynomiale.
$P(x) = x^3 + x + 2 = (x+1)\cdot(x^2 - x + 2)$. Le discriminant de $x^2 - x + 2$ égale -3, il est négatif, donc $x^2 - x + 2$ est positif pour toutes valeurs de x.
$P(x) = x^3 + x + 2 = (x+1)\cdot(x^2 - x + 2) < 0 \iff x + 1 < 0 \iff x < -1$
donc $S =]-\infty\,;-1[$.

k) Il faut factoriser : $P(x) = 2x^5 + x^4 - x^3 = x^3\cdot(2x^2 + x - 1) = x^3\cdot(2x-1)\cdot(x+1) < 0$.
Faisons un tableau de signes :

x		-1		0		$1/2$	
$(x + 1)$	–	0	+	+	+	+	+
x^3	–	–	–	0	+	+	+
$(2x - 1)$	–	–	–	–	–	0	+
$x^3\cdot(x + 1)\cdot(2x - 1)$	–	0	+	0	–	0	+

donc $S =]-\infty\,;-1[\cup]\,0\,;1/2[$.

❶ Suite.

l) On voudrait multiplier par x pour obtenir : $x^2 \le 1$.
Mais quand x est négatif, il faut changer l'inégalité : le "≤" devient "≥".
Pour éviter cette difficulté, voici une manière de faire :

$$x \le \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} \le 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \le 0 \quad \Leftrightarrow \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x} \le 0$$

On fait un tableau de signes :

x		-1		0		1	
$(x+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)\cdot(x-1)/x$	$-$	0	$+$	/	$-$	0	$+$

donc $S =]-\infty\,;-1] \cup]\,0\,;1\,]$.
Le "0" est exclu, car on ne peut pas diviser par 0.

m) Ici aussi, on voudrait multiplier par $(x-1)$ pour obtenir : $(x-2) < x\cdot(x-1)$.
Mais quand $(x-1)$ est négatif, il faut changer l'inégalité : le "<" devient ">".
Pour éviter cette difficulté, la manière indiquée précédemment marche bien :

$$\frac{x-2}{x-1} < x \quad \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} - x < 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x-2-x^2+x}{x-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x-2}{x-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+2}{x-1} > 0$$

Reste à factoriser $x^2 - 2x + 2$ $\quad \Delta = 4 - 8 = -4 < 0$, donc le numérateur est toujours positif.

Pour que $\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ soit positif, il faut que $x-1$ soit positif.

donc $S =]1\,;\infty[$.

n) $$\frac{x}{3-x} - \frac{1}{x+1} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x-3+x}{(3-x)\cdot(x+1)} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+2x-3}{(3-x)\cdot(x+1)} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(3-x)\cdot(x+1)} \ge 0$$

On fait un tableau de signes :

x		-3		-1		1		3	
$(x+3)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(3-x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\dfrac{(x+3)\cdot(x-1)}{(3-x)\cdot(x+1)}$	$-$	0	$+$	/	$-$	0	$+$	/	$-$

donc $S = [-3\,;-1[\, \cup [\,1\,;3\,[$.
"−1" et "3" sont exclus, car on ne peut pas diviser par 0.
"−3" et "5" sont exclus, car on ne peut pas diviser par 0.

❷ On cherche F tel que : $30 \le \frac{5}{9} \cdot (F-32) \le 40$

Donc : $54 \le F - 32 \le 72 \quad \Leftrightarrow \quad 86 \le F \le 104$

Les valeurs de F correspondantes sont celles dans l'intervalle : [86 ; 104].

---

❸ Coût total en $ du modèle A en fonction du temps t, exprimé en années.
CA(t) = 50'000 + 4'000 · t.
Coût total en $ du modèle B en fonction du temps t, exprimé en années.
CB(t) = 40'000 + 5'500 · t.
On cherche les valeurs de t pour lesquelles CA(t) < CB(t). Il faut donc résoudre l'inéquation :
40'000 + 5'500 · t > 50'000 + 4'000 · t équivalent à
1'500 · t > 10'000 ⇔ t > 10'000 / 1'500 = 100 / 15 = 20 / 3 ≈ 6,667
Le modèle A devient plus économique après 6,667 années.

---

❹ La question revient à savoir pour quelles valeurs de t, on a $-4{,}9 \cdot t^2 + 7{,}3 \cdot t + 0{,}3 > 2{,}7$.

L'inéquation devient : $4{,}9 \cdot t^2 - 7{,}3 \cdot t + 2{,}4 < 0$

Il faut trouver les deux racines du polynôme : $4{,}9 \cdot t^2 - 7{,}3 \cdot t + 2{,}4 < 0$.

$\Delta = 7{,}3^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot 2{,}4 = 6{,}25 = 2{,}5^2 \quad t = \frac{7{,}3 \pm 2{,}5}{2 \cdot 4{,}9} = \begin{cases} 1 \\ 4{,}8/9{,}8 \approx 0{,}49 \end{cases}$

Le chien est à plus de 2,7 mètres au-dessus du sol pendant 1 - 48/98 ≈ 0,51 secondes.

---

❺ La question revient à résoudre : $\frac{4500 \cdot S}{S+500} > S$, avec S pour inconnue.

Cette inéquation peut se résoudre comme on l'a vu dans les exercices 1_l et 1_m.

$$\frac{4500 \cdot S}{S+500} > S \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4500 \cdot S}{S+500} - S > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4500 \cdot S - S^2 - 500 \cdot S}{S+500} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-S^2 + 4000 \cdot S}{S+500} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{S^2 - 4000 \cdot S}{S+500} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{S \cdot (S-4000)}{S+500} < 0$$

On n'acceptera que des nombres positifs pour S et R, car il s'agit d'un nombre de poissons.
On peut faire un tableau de signes, mais il est facile de voir que l'inégalité est satisfaite si et seulement si S < 4000.
Le nombre de poissons qui survivent jusqu'à l'âge adulte est supérieur au nombre de poissons qui fraient quand le nombre de poissons qui fraient est inférieur à 4'000. Ceci correspond à un nombre de poissons qui arrive à l'âge adulte inférieur à 4'000.

---

❻ Décroissance de la taille. La taille d'une personne décroît de 0,061 cm chaque année à partir de 30 ans.

a) Si une femme mesure 175,3 cm à 30 ans, prédire sa taille à 70 ans.
A 31 ans : $T(1) = 175{,}3 - 0{,}061$
A 32 ans : $T(2) = 175{,}3 - 0{,}061 \cdot 2$
…..
A 70 ans : $T(40) = 175{,}3 - 0{,}061 \cdot 40 = 172{,}86$

b) Un homme de 50 ans mesure 167,6 *cm*. Déterminez l'équation donnant l'ensemble des tailles prises par cet homme entre 30 et 70 ans.
A x ans : $T(x) = 167{,}6 - 0{,}061 \cdot (x - 50)$