1 Cet exercice peut être résolu de deux manières différentes.

1) On peut effectuer une divisions polynomiales et déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a et b, le reste s'annule.
2) Plus simplement, on évalue le polynôme $P(x)$ en la ou les valeur(s) qui annule(nt) le polynôme diviseur $D(x)$. Ensuite il faut déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a et b, le résultat est nulle.

a) Première méthode

$$\begin{array}{rl|l} x^2+5x+a & & x+2 \\ \cline{3-3} -x^2-2x & & x+3 \\ \cline{1-1} 3x+a & & \\ -3x-6 & & \\ \cline{1-1} a-6 & = \text{le reste} & \end{array}$$

Le reste est nulle pour $a = 6$, donc $x^2 + 5x + a$ est divisible par $x + 2 \Leftrightarrow a = 6$.

a) Deuxième méthode, plus simple.

$P(-2) = 4 - 10 + a = 6 - a$
$P(x) = x^2 + 5x + a$ s'annule en $x = -2$ pour $a = 6$,
donc $x^2 + 5x + a$ est divisible par $x + 2 \Leftrightarrow a = 6$.

b) Deuxième méthode, plus simple.

$P(3) = 54 + a\cdot 3 - 3 = 51 + a\cdot 3 = 3\cdot(17 + a)$
$P(x) = 2x^3 + a\cdot x - 3$ s'annule en $x = 3$ pour $a = -17$,
donc $2x^3 + a\cdot x - 3$ est divisible par $x - 3 \Leftrightarrow a = -17$.

c) Deuxième méthode, plus simple.

$P(1) = 1 + a - 5 = a - 4$
$P(x) = x^3 + a\cdot x - 5$ s'annule en $x = 1$ pour $a = 4$,
donc $x^3 + a\cdot x - 5$ est divisible par $x - 1 \Leftrightarrow a = 4$.

d) Première méthode

$$\begin{array}{l|l} x^3+ax^2 \quad +bx \quad +6 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2} -x^3+5x^2 \quad -6x & x+5+a \\ \cline{1-1} (5+a)\cdot x^2+(b-6)\cdot x \;+6 & \\ -(5+a)\cdot x^2+(25+5a)\cdot x-30-6a & \\ \cline{1-1} (5a+b+19)\cdot x-6a-24 \quad = \text{le reste} & \end{array}$$

Le reste est nulle si $5a + b + 19 = 0$ et $6a + 24 = 0$. Donc il est nulle si $a = -4$ et $b = 1$.

Donc $x^3 + a\cdot x^2 + b\cdot x + 6$ est divisible par $x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow a = -4$ et $b = 1$.

d) Deuxième méthode, plus simple (?). $D(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)\cdot(x - 3)$ s'annule en $x = 2$ et $x = 3$.

$P(2) = 8 + a\cdot 4 + b\cdot 2 + 6 = 4a + 2b + 14 = 0.$

$P(3) = 27 + a\cdot 9 + b\cdot 3 + 6 = 9a + 3b + 33 = 0.$

Ici, il faut résoudre un système de deux équations. La solution est : $a = -4$ et $b = 1$.

Donc $x^3 + a\cdot x^2 + b\cdot x + 6$ est divisible par $x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow a = -4$ et $b = 1$.

e) Méthode, plus simple (?). $D(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)\cdot(x - 1)$ s'annule en $x = -2$ et $x = 1$.

$P(-2) = 16 - a\cdot 8 + 4 - b\cdot 2 - 6 = -8a - 2b + 14 = 0$.

$P(1) = 1 + a + 1 + b - 6 = a + b - 4 = 0$.

Ici, il faut résoudre un système de deux équations. La solution est : $a = 2$ et $b = 3$.

Donc $x^4 + a\cdot x^3 + x^2 + b\cdot x - 6$ est divisible par $x^2 + x - 2 \Leftrightarrow a = 1$ et $b = 3$.
Remarque : la division polynomial est plus compliquée, mais donnerait comme reste
$R(x) = (b + 3a - 6)\cdot x + 2\cdot(1 - a)$, qui s'annule pour $a = 1$ et $b = 3$. Dans ce cas, il n'y a pas de système de deux équations à résoudre.

---

2 a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ Avec Viète : $a = 3$; $b = -5$; $c = 2$; $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 25 - 4\cdot 3\cdot 2 = 1$

Zéros : $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} 1 \\ 2/3 \end{cases}$ S = {2/3 ; 1}

Plus rapide est de voir qu'on peut factoriser : $3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)\cdot(x - 1)$, d'où S = {2/3 ; 1}

b) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
On recherche une racine rationnelle de ce polynôme. Le théorème page 6 du cours nous indique que si p/q est une racine rationnelle de P, alors p divise -6 et q divise 1.
Donc les seuls racines rationnelles envisageables sont : -6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6.
les images de nombres négatifs seront négatifs, donc il est inutile de tester les nombres négatifs.
$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$, on a trouvé une racine !
$P(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$, on a trouvé une deuxième racine !
$P(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$, on a trouvé une troisième racine !
Un polynôme de degré trois ne peut pas avoir plus de trois racines, donc on les a toutes.
S = { 1 ; 2 ; 3 }

c) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = x\cdot(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$
Une racine est évidente : $x = 0$.
Notons $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ et cherchons une racine rationnelle de ce polynôme. Le théorème page 6 du cours nous indique que si p/q est une racine rationnelle de P, alors p divise -6 et q divise 1.
Donc les seuls racines rationnelles envisageables sont : -6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6.
$P(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$, on a trouvé une racine !
$P(-2) = -8 + 8 + 10 - 6 = 4$, donc -2 n'est pas une racine !
$P(-3) = -27 + 18 + 15 - 6 = 0$, on a trouvé une deuxième racine !
$P(1) = ... < 0$.
$P(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$, on a trouvé une troisième racine !
Un polynôme de degré quatre ne peut pas avoir plus de quatre racines, donc on les a toutes.
S = { -3 ; -1 ; 0 ; 2 }

d) $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = 0$

On recherche une racine rationnelle de ce polynôme. Le théorème page 6 du cours nous indique que si p/q est une racine rationnelle de P, alors p divise 6 et q divise 2.
Donc les seuls valeurs envisageables sont : $p=\pm 6$; $p=\pm 3$; $p=\pm 2$; $p=\pm 1$ et $q=1$ ou $q = 2$.
On essaie... en commençant par les calculs les plus simples.
$P(1) = 2 - 9 + 7 + 6 > 0$.
$P(-1) = -2 - 9 - 7 + 6 < 0$.
$P(2) = 16 - 36 + 14 + 6 = 0$, on a trouvé une racine !
$P(3) = 54 - 81 + 21 + 6 = 0$, on a trouvé une deuxième racine !
La dernière racine est plus embêtante à trouver. Soit on essaie toutes les possibilités en espérant obtenir toutes les racines, soit on fait une division polynomiale, pour se ramener à la recherche de racines d'un polynôme de degré plus petit que 3.
En cherchant plus on trouve que $P(-1/2) = -1/4 - 9/4 - 7/2 + 6 = 0$.
Par division polynomiale, on trouve que : $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = (x-2)\cdot(x-3)\cdot(2x+1)$
Donc l'ensemble des solutions est : S = { –1/2 ; 2 ; 3}

e) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$

Le polynôme a été simplifié par 2, ce qui simplifie le problème.
On recherche une racine rationnelle de ce polynôme. Le théorème page 6 du cours nous indique que si p/q est une racine rationnelle de P, alors p divise 3 et q divise 1.
Donc les seuls racines rationnelles envisageables sont : -3 ; -1 ; 1 ; 3.
On essaie... en commençant par les calculs les plus simples.
$P(1) = 1 - 2 - 4 + 2 + 3 = 0$, on a trouvé une racine !
$P(-1) = 1 + 2 - 4 - 2 + 3 = 0$, on a trouvé une deuxième racine !
$P(3) = 81 - 54 - 36 + 6 + 3 = 0$, on a trouvé une troisième racine !
$P(-3) = 81 + 54 - 36 - 6 + 3 > 0$.
On peut soit argumenter que si 3 racines sont rationnelles, alors une éventuelle quatrième racine devrait aussi être entière, soir effectuer une division polynomiale, pour montrer qu'il n'y a pas d'autres racines que celles trouvée.
Par division polynomiale par $(x - 1)\cdot(x + 1)\cdot(x - 3)$, on obtient la factorisation :
$P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 \cdot (x-1)\cdot(x-3)$
Donc on a trois racines : S = { –1 ; 1 ; 3 }
On dit que -1 est une racine double, car le facteur $(x - (-1))$ apparaît au carré.

f) $P(x) = (x^2+1)\cdot(x^2+9)\cdot(x+2)\cdot(x-2) = 0$

Ici, le problème est beaucoup plus simple, car le polynôme est déjà complètement factorisé.
Donc l'ensemble des solutions est : S = { –2 ; 2}

---

3 a) $x-3 = 5\cdot(x-5) \;\Leftrightarrow\; x-3 = 5x-25 \;\Leftrightarrow\; 22 = 4x \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{22}{4} = \dfrac{11}{2} \;\rightarrow\; S = \left\{\dfrac{11}{2}\right\}$

b) $x-3 = x-5 \;\Leftrightarrow\; -3 = -5 \;\rightarrow$ pas possible $\rightarrow S = \varnothing$

c) $x-3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3 \;\rightarrow\; S = \{3\}$

d) Fois 60 : $60x - 12 + 60x - 40 = 120x - 45 \;\Leftrightarrow\; -52 = -45 \;\rightarrow$ pas possible $\rightarrow S = \varnothing$

e) $\dfrac{9x+7}{2} - x + \dfrac{x-2}{7} = 36$

Fois 14 : $63x + 49 - 14x + 2x - 4 = 36\cdot 14 \;\Leftrightarrow\; 51x = 459 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{459}{51} = 9 \;\rightarrow\; S = \{9\}$

f) $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{37}{(x+2)\cdot(x+3)}$

Fois $(x+2)\cdot(x+3)$: $4\cdot(x+3)+7\cdot(x+2)=37 \Leftrightarrow 11x=11 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$

On vérifie que $x=1$ n'annule aucun dénominateur, donc : $S=\{1\}$

g) $\frac{x+8}{x-1}-\frac{12x}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{4+x}{x+1}$

Fois $(x-1)\cdot(x+1)$: $(x+8)\cdot(x+1)-12x=(4+x)\cdot(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+9x+8-12x=x^2+3x-4 \rightarrow 12=6x \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$

On vérifie que $x=2$ n'annule aucun dénominateur, donc : $S=\{2\}$

h) Fois $x\cdot(x^2+1)$: $(x^2+2x+1)\cdot x=(x+2)\cdot(x^2+1) \Leftrightarrow x^3+2x^2+x=x^3+2x^2+x+2 \Leftrightarrow 0=2$

Pas possible, donc $S=\varnothing$

Dans tous les cas, il est bon de vérifier la solution dans l'équation d'origine.

i) $\frac{4x+5}{(2x-7)\cdot(x-1)}-\frac{3x}{x+1}+\frac{3x-6}{x+1}-\frac{5}{2x-7}=0 \Leftrightarrow \frac{4x+5}{(2x-7)\cdot(x-1)}+\frac{-6}{x+1}-\frac{5}{2x-7}=0 \Leftrightarrow$

Fois $(2x-7)\cdot(x-1)$: $4x+5-6\cdot(2x-7)-5\cdot(x-1)=0 \Leftrightarrow -13x+52=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{52}{13}=4}}$

On vérifie que $x=4$ n'annule aucun dénominateur, donc : $S=\{4\}$

j) $\frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7+2x}+\frac{4x^2-1}{(1+2x)\cdot(7+2x)}-1=0$

Fois $(1+2x)\cdot(7+2x)$: $(3+2x)\cdot(7+2x)-(5+2x)\cdot(1+2x)+(4x^2-1)-(1+2x)\cdot(7+2x)=0$

On développe : $4x^2+20x+21-(4x^2+12x+5)+4x^2-1-(4x^2+16x+7)=0$

On développe encore : $4x^2+20x+21-4x^2-12x-5+4x^2-1-4x^2-16x-7=0$

on regroupe les x^2, x, ... : $-8x+8=0 \rightarrow \underline{\underline{x=1}}$

On vérifie que $x=1$ n'annule aucun dénominateur, donc : $S=\{1\}$

Il est bon de vérifier la solution dans l'équation d'origine.

k) $\frac{x-1}{2}-\frac{x^2+2}{2\cdot(x+2)}-\frac{x-1}{(x+2)}+\frac{1}{2}=0$

Fois $2\cdot(x+2)$: $(x-1)\cdot(x+2)-(x^2+2)-2\cdot(x-1)+(x+2)=0$

On développe : $x^2+x-2-x^2-2-2x+2+x+2=0$

On regroupe les x^2, x, ... : $0=0 \rightarrow S=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Il faut éliminer -2 de la solution, car -2 ne fait pas partie du domaine de définition de l'équation.

l) $\frac{1}{x+2}-\frac{x^2+8}{(x+2)\cdot(x^2-2x+4)}+\frac{2}{x^2-2x+4}=0$

Fois $(x+2)\cdot(x^2-2x+4)$: $(x^2-2x+4)-(x^2+8)+2\cdot(x+2)=0$

On développe : $x^2-2x+4-x^2-8+2x+4=0$

x^2, x, ... : $0=0 \rightarrow$ n'importe quelle x est solution sauf $x=-2 \rightarrow S=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

m) $\frac{4}{x}-\frac{x^2}{x\cdot(x+1)}+\frac{x}{x+1}=0$

Fois $x\cdot(x+1)$: $4\cdot(x+1)-x^2+x\cdot x=0 \Leftrightarrow 4\cdot(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Mais, $x=-1$ annule un des dénominateur, donc il n'y a pas de solutions : $S=\varnothing$

En multipliant par $x\cdot(x+1)$ on a ajouté la fausse solution $x=-1$, car pour $x=-1$, $x\cdot(x+1)=0$ et multiplier par zéro peut ajouter des fausses solutions.