❶ Effectuons les divisions polynomiales.

a)
$$\begin{array}{l|l} x^2+5x+5 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2-2x} & x+3 \\ \quad 3x+5 & \\ \underline{\quad -3x-6} & \\ \quad\quad -1 & \end{array}$$

Donc : $x^2+5x+5=(x+2)\cdot(x+3)-1$

b)
$$\begin{array}{l|l} x^4-3x^3-11x^2+8x+15 & x-5 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4+5x^3} & x^3+2x^2-x+3 \\ \quad 2x^3-11x^2+8x+15 & \\ \underline{\quad -2x^3+10x^2} & \\ \quad\quad -x^2+8x+15 & \\ \underline{\quad\quad x^2-5x} & \\ \quad\quad\quad 3x+15 & \\ \underline{\quad\quad\quad -3x+15} & \\ \quad\quad\quad\quad 30 & \end{array}$$

Donc : $x^4-3x^3-11x^2+8x+15=(x^3+2x^2-x+3)\cdot(x-5)+30$

c)
$$\begin{array}{l|l} x^4+2x^3-2x^2+2x-3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4 \quad\quad -x^2} & x^2+2x-3 \\ \quad 2x^3-3x^2+2x-3 & \\ \underline{\quad -2x^3 \quad\quad -2x} & \\ \quad\quad -3x^2 \quad -3 & \\ \underline{\quad\quad 3x^2 \quad +3} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Donc : $x^4+2x^3-2x^2+2x-3=(x^2+1)\cdot(x^2+2x-3)$

On a factorisé le polynôme de degré 4 : $x^4+2x^3-2x^2+2x-3$

d)
$$\begin{array}{l|l} x^3 \quad\quad -1 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3+x^2} & x^2+x+1 \\ \quad x^2 \quad -1 & \\ \underline{\quad -x^2+x} & \\ \quad\quad x-1 & \\ \underline{\quad\quad -x+1} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Donc : $x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$

On a factorisé le polynôme de degré 3 : x^3-1

Suite de l'exercice ❶

e)
$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+9x^2+7x-6 & 2x-1 \\
\cline{2-2}
-2x^3+\ x^2 & x^2+5x+6 \\
\cline{1-1}
\quad 10x^2+7x-6 & \\
\quad -10x^2+5x & \\
\cline{1-1}
\qquad 12x-6 & \\
\qquad -12x+6 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Donc : $2x^3+9x^2+7x-6=(x^2+5x+6)\cdot(2x-1)=(x+2)\cdot(x+3)\cdot(2x-1)$

On a entièrement factorisé le polynôme de degré 3 : $2x^3+9x^2+7x-6$

---

❷ On pourrait faire les divisions polynomiales pour répondre aux questions, mais il est plus simple de tester si les deux polynômes ont les mêmes zéros.

a) D(-1) = 0, donc il faut tester si -1 est un zéro du polynôme P.
$P(-1)=-1+4-4+1=0$. Donc on sait que P est divisible par D.
Par division de P par D, on obtient :
$P(x)=x^3+4x^2+4x+1=(x+1)\cdot(x^2+3x+1)$ Après ce début de factorisation, on peut aller plus loin en factorisant : x^2+3x+1 en utilisant Viète.
$a=1$; $b=3$; $c=1$. $\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=9-4=5$.
$$x^2+3x+1=\left(x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)=\left(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$
Donc : $P(x)=(x+1)\cdot(x^2+3x+1)=(x+1)\cdot\left(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

b) D(-4) = 0, donc il faut tester si -4 est un zéro du polynôme P.
$P(-4)=(-4)^3-2\cdot(-4)^2-2\cdot(-4)-3=-91\neq 0$. Donc on sait que P n'est pas divisible par D.

c) D(-2) = 0, donc il faut tester si -2 est un zéro du polynôme P.
$P(-2)=(-2)^3+5\cdot(-2)^2+7\cdot(-2)+2=0$. Donc on sait que P est divisible par D.
Par division de P par D, on obtient :
$P(x)=x^3+5x^2+7x+2=(x+2)\cdot(x^2+3x+1)$ Après ce début de factorisation, on peut aller plus loin en factorisant : x^2+3x+1. Ceci a déjà été fait dans la partie a).
Donc : $P(x)=(x+2)\cdot(x^2+3x+1)=(x+2)\cdot\left(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

d) $P(x)=x^3+5x^2-9x-45$ $D(x)=x+5$
D(-5) = 0, donc il faut tester si -5 est un zéro du polynôme P.
$P(-5)=(-5)^3+5\cdot(-5)^2-9\cdot(-5)-45=0$. Donc on sait que P est divisible par D.
Par division de P par D, on obtient :
$P(x)=x^3+5x^2-9x-45=(x+5)\cdot(x^2-9)=(x+5)\cdot(x+3)\cdot(x-3)$
Cette fois-ci, la suite de la factorisation était simple.

Suite de l'exercice ❷

e) $D(2) = 0$, donc il faut tester si 2 est un zéro du polynôme P.
$P(2) = 2^4 + 3\cdot 2^3 - 19\cdot 2^2 - 27\cdot 2 + 90 = 0$. Donc on sait que P est divisible par D.
Par division de P par D, on obtient :
$P(x) = x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 27x + 90 = (x-2)\cdot(x^3 + 5x^2 - 9x - 45)$ Après ce début de factorisation, on peut aller plus loin en factorisant : $x^3 + 5x^2 - 9x - 45$. Ceci a déjà été fait dans la partie d).
Donc : $P(x) = (x-2)\cdot(x+5)\cdot(x+3)\cdot(x-3)$

---

❸ a) $P_1(3) = 3^4 - 2\cdot 3^3 - 3\cdot 3^2 - 3 + 3 = 0$. Donc $P_1(x)$ se factorise en le divisant par $(x - 3)$.
$P_1(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-3)\cdot(x^3 + x^2 - 1)$.

b) $P_2(4) = 4^3 - 2\cdot 4^2 - 7\cdot 4 - 4 = 0$. Donc $P_2(x)$ se factorise en le divisant par $(x - 4)$.
$P_2(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = \underline{\underline{(x-4)\cdot(x^2 + 2x + 1)}} = (x-4)\cdot(x+1)^2$.

c) $P_3(-5) = (-5)^3 + (-5)^2 - 17\cdot(-5) + 15 = 0$. Donc $P_3(x)$ se factorise en le divisant par $(x + 5)$.
$P_3(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15 = \underline{\underline{(x+5)\cdot(x^2 - 4x + 3)}} = (x+5)\cdot(x-3)\cdot(x-1)$.

d) Factorisons $P_4(x)$ en le divisant par $(2x - 1)$.
$P_4(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = \underline{\underline{(2x-1)\cdot(x^2 - x - 2)}} = (2x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+1)$.

---

❹ a) $P_1(x) = a\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)$ avec a un nombre réel non nul. Il y a donc une infinité de solutions, elles ont toutes été données. Elles dépendent du paramètre a.

b) $P_2(x) = a\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-5)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ avec a un nombre réel non nul et x_1 et x_2 appartenant à $\{-2 ; 1 ; 5\}$. Il y a donc une infinité de solutions. Elles dépendent des trois paramètre a, x_1 et x_2. Autre solution : $P_2(x) = (x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-5)\cdot(ax^2 + bx + c)$ avec $b^2 - 4ac < 0$

c) Il n'est pas possible qu'un polynôme de degré trois ait plus de trois racines, car sinon on pourrait le factoriser en plus de trois facteurs. Chaque facteur ayant un degré plus grand ou égale à 1, le degré du produit des facteurs sera plus grand que 3. Conclusion aucun polynôme ne satisfait la condition.

d) $P_4(x) = a\cdot(x-2)\cdot(x^2 + b)$ avec a un nombre réel non nul et b un nombre réel positif.

a et b doivent satisfaire la condition supplémentaire : $P_4(0) = 32$.

Donc : $a\cdot(0-2)\cdot(0+b) = 32$; $-2\cdot a\cdot b = 32$; $a\cdot b = -16$.

On peut prendre $b = 16$ et $a = -1$, mais il existe une infinité de solutions.

Elles n'ont pas toutes été données. Une autre solution pourrait être :
$P_4(x) = -(x-2)\cdot(x^2 + b\cdot x + 16)$ avec $b \in]-4\cdot\sqrt{2} \;;\; 4\cdot\sqrt{2}[$.

Il existe encore une infinité d'autres solutions.

---

❺ a) Faux, $P_1(x) = x - 1$ et $P_2(x) = 2x - 2$ sont différents et ont même racines.
$P_3(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)\cdot(x^2 + 1)$ possède aussi les mêmes racines dans $\mathbb{R}$.

b) Faux, $P(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)$ possède exactement 2 racines distinctes et il est de degré trois.

c) Faux, un polynôme de degré 7 possède au maximum 7 racines. S'il avait 21 racines, on pourrait le factoriser en un produit de 21 facteurs, chaque facteur étant un polynôme de degré au moins 1. On doit exclure le polynôme nul, qui possède une infinité de racines.