Collège Claparède ***Exercices de Mathématiques***
1ère ***Supplément pour les curieux***

❶ ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** **et** ***x*** **représentent des nombres réels.**

Montrez que :

a) $(a+b)^2+(a-b)^2=2\cdot(a^2+b^2)$ C'est une curiosité.

b) $(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)=(a\cdot d+b\cdot c)^2+(b\cdot d-a\cdot c)^2$
Cette identité transforme un produit de somme de deux carrés en une somme de carrés !

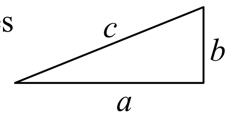
c) $\left(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1\right)=x^4+1$ C'est une factorisation inhabituelle.

❷ ***n*** **et** ***m*** **représentent des nombres entiers positifs**.

Montrez que :

i) $(2\cdot n\cdot m)^2+\left(n^2-m^2\right)^2=\left(n^2+m^2\right)^2$

ii) Trouvez plusieurs triangles rectangles ayant des côtés de longueurs a, b, c entières.
Vous pouvez vous aider de i).



❸ Calculez la somme S_{100} des 100 premiers entiers positifs.

$$S_{100}=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+...+98+99+100 \; = ?$$

C'est une **série arithmétique**.

❹ Calculez la valeur des sommes infinies suivantes :

$$S_2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{2^8}+...$$

$$S_3=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^6}+...$$

Généralisation : $S_n=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^6}+...$

Une telle somme s'appelle une **série géométrique**.

❺ Existe-t-il une valeur entière de "n" telle que la somme S_n suivante soit plus grande que 10 ?

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\frac{1}{24}+\frac{1}{25}+\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\frac{1}{28}+\frac{1}{29}+\frac{1}{30}+\frac{1}{31}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{n}$$

Pour n "*infiniment grand*", cette somme s'appelle la **série harmonique**.