❶ On utilise l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

Donc : 1'093'0955'053'927 = 3'635'584^2 – 1'512'123^2

= (3'635'584 + 1'512'123) · (3'635'584 – 1'512'123)

= 5'147'707 · 2'123'461 est la factorisation demandée.

---

❷ L'équation $x^3 + 2x^2 - 9x = 18$ est équivalente à $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$.

Pour la résoudre, il suffit de factoriser le polynôme : $P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$.

Voici une factorisation par regroupement et mise en évidence :

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = x^2\cdot(x+2) - 9\cdot(x+2) = (x^2-9)\cdot(x+2) = (x+3)\cdot(x-3)\cdot(x+2)$$

Donc le problème revient à chercher x tel que $(x+3)\cdot(x-3)\cdot(x+2) = 0$

Il y a trois réponses possibles qui sont : $x = -3$ ou $x = 3$ ou $x = -2$

On écrit la réponse de la manière suivante : S = {–3; –2; 3}

---

❸ Factorisons l'expression suivante : $\dfrac{x^3 - 4x^2 - 16x + 64}{x^2 - 8x + 16}$

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 16x + 64}{x^2 - 8x + 16} = \frac{x^2\cdot(x-4) - 16\cdot(x-4)}{(x-4)^2} = \frac{(x^2-16)\cdot(x-4)}{(x-4)^2} = \frac{(x+4)\cdot(x-4)\cdot(x-4)}{(x-4)^2} = \frac{(x+4)\cdot(x-4)^2}{(x-4)^2}$$

Si x est différent de 4, on peut simplifier l'expression par $(x-4)^2$ pour obtenir $(x+4)$.

Donc si on remplace x par n'importe quel nombre différent de 4, l'expression donnera le nombre $(x+4)$.

En conséquence, si on remplace x par des nombres de plus en plus proche de 4, l'expression donnera un nombre de plus en plus proche de (4 + 4), c.-à-d. de 8. CQFD

---

❹ Notons x le chiffre des unités, y le chiffre des dizaines et z le chiffre des centaines.

Le nombre est donc : $x + 10y + 100z$

Le nombre renversé est $z + 10y + 100x$

L'énoncé nous dit que : $x + y + z = 16$ et $(z + 10y + 100x) + (x + 10y + 100z) = 1'211$ et $(z + 10y + 100x) - (x + 10y + 100z) = 297$

Ceci conduit à un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ 101x + 20y + 101z = 1'211 \\ 99x - 99z = 297 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par 101 et en lui soustrayant la deuxième équation, on obtient :

$(101 - 20)\cdot y = 101\cdot 16 - 1'211$

donc $81\cdot y = 405$ donc $\underline{\underline{y = 5}}$

Avec ce résultat et en divisant la troisième équation par 99, le système se simplifie en :

$$\begin{cases} x + z = 11 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

En additionnant ces deux équations, on obtient : $2\cdot x = 14$ donc $\underline{\underline{x = 7}}$ et $\underline{\underline{z = 4}}$

Le nombre cherché est donc 457, le nombre renversé est 754.

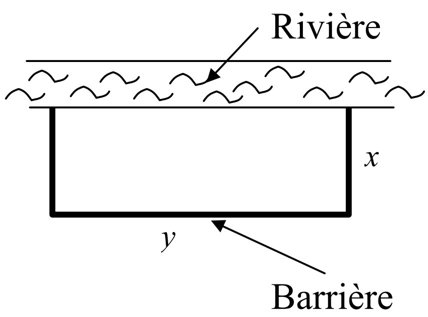
---

❺a Soit n un nombre entier. n peut toujours s'écrire de la façon suivante :
$n = 3 \cdot k + m$, avec k un nombre entier et m égale 0, 1 ou 2.
$n^2 = 9 \cdot k^2 + 6 \cdot k \cdot m + m^2 = 3 \cdot (3 \cdot k^2 + 2 \cdot k \cdot m) + m^2$
Si n^2 est un multiple de 3, alors m^2 doit aussi être un multiple de 3.
Puisque m égale 0, 1 ou 2 et m^2 est un multiple de 3, m ne peut que être égale à 0.
Conclusion, $n = 3 \cdot k$ est un multiple de trois. CQFD.

❺b On cherche deux nombres entiers n et m tels que $1 + n^2 + m^2$ est divisible par 4.
On va montrer que ce n'est pas possible.
On peut considérer les quatre cas, suivant que n et m sont pairs ou impairs.
Ils ne peuvent pas être pairs tous les deux, car sinon $1 + n^2 + m^2$ est impair.
Ils ne peuvent pas être impairs tous les deux, car sinon $1 + n^2 + m^2$ est aussi impair.
Si n est pair et m est impair. $n = 2 \cdot k$, $m = 2 \cdot j + 1$
$1 + n^2 + m^2 = 1 + 4 \cdot k^2 + 4 \cdot j^2 + 4 \cdot j + 1 = 4 \cdot (k^2 + j^2 + j) + 2$ qui est pair, mais pas divisible par 4.
Le cas n impair et m pair est symétrique au cas suivant.
Donc dans aucun cas $1 + n^2 + m^2$ n'est divisible par 4. CQFD

---

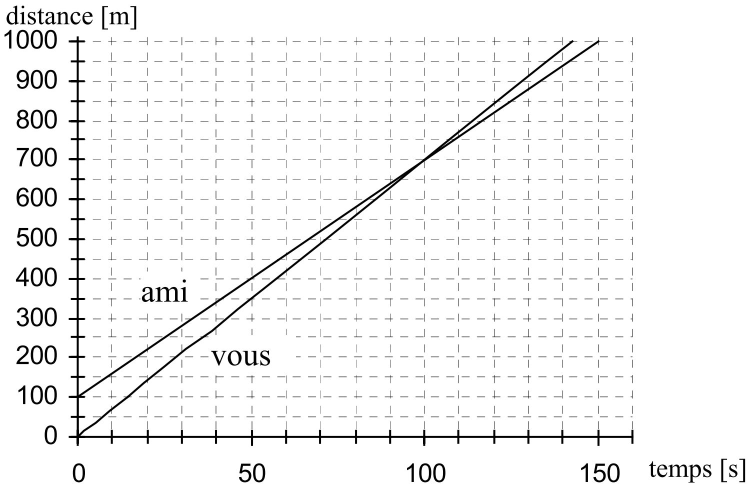
❻ Notons y la longueur de la barrière, x la hauteur de la barrière.
L'énoncé nous dit que : $y + 2x = 120$ mètres
On veut maximiser l'aire $x \cdot y$
De la première égalité, on en déduit que $y = 120 - 2x$
On veut donc maximiser : $x \cdot (120 - 2x) = 2x^2 - 120x$
C'est l'équation d'une parabole convexe avec (a = 2, b = -120, c = 0),
qui possède un minimum en $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{120}{4} = 30$.
Donc les dimensions optimales sont $x = 30$ mètres et $y = 60$ mètres.
Ce qui donne une aire de 30·60 = <u>1'800 mètres carrés</u>.



On peut faire mieux avec une barrière en forme de demi-cercle de rayon r.
On doit avoir : $\dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = 120$, donc $r = \dfrac{120}{\pi} \approx 38{,}2$ mètres
L'aire correspondante est de : $\dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \approx \underline{\underline{2'292 \text{ mètres carrés}}}$

---

❼ Voici une résolution graphique.



Votre position en fonction du temps :

$y_{vous} = 7 \cdot t$

La position de votre ami en fonction du temps :

$y_{ami} = 100 + 6 \cdot t$

Le graphique suggère qu'après 100 secondes, vous dépassiez votre ami. Effectivement, pour t = 100 [s], vous êtes tous les deux à 700 [m] du départ.

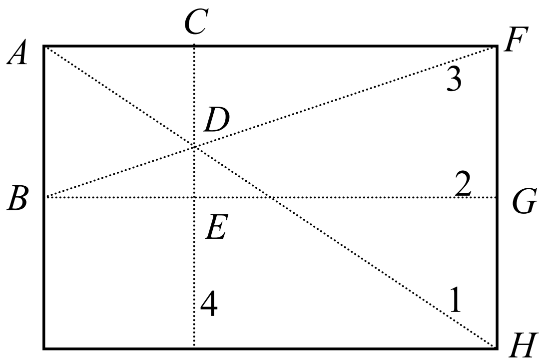
Vous terminez la course après $\frac{1'000}{7} \approx 142{,}9$ secondes, alors que votre ami termine la course après :

$\frac{1'000-100}{6} = 150$ secondes.

Pour que votre ami termine en même temps que vous, après 142,9 secondes, il doit avoir une avance de : 1000 – 6 · 142,9 ≈ 142,6 mètres.

---

❽ Voici deux justifications de la méthode.



<u>Première justification, en utilisant de la géométrie.</u>

Longueur de la feuille = $AF = BG$

Hauteur de la feuille = $FH = 2FG$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Thalès} \Rightarrow \dfrac{CD}{FH} = \dfrac{AC}{AF} \\ \text{Thalès} \Rightarrow \dfrac{DE}{FG} = \dfrac{BE}{BG} \\ BE = AC \\ BG = AF \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{CD}{FH} = \frac{DE}{FG}$$

$$FH = 2 \cdot FG \quad \to \quad \frac{CD}{2 \cdot FG} = \frac{DE}{FG} \quad \to \quad 2 \cdot DE = CD$$

$$FG = CD + DE = 2 \cdot DE + DE = 3 \cdot DE$$

Donc le rapport de similitude des triangles BDE et BFG est de 1 / 3.

Donc la longueur BE égale 1 / 3 de la longueur BG de la feuille. CQFD

<u>Deuxième justification, en utilisant les fonctions.</u>

Notons $\ell = AF$ = largeur de la feuille et $h = FG$ = la demi-hauteur de la feuille

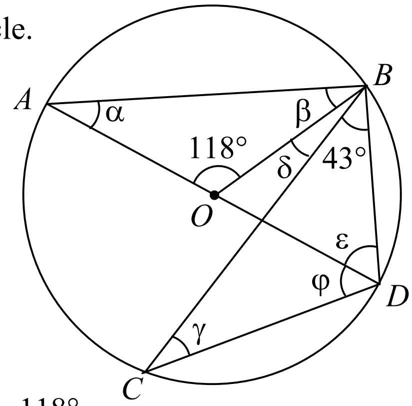
Prenons B comme origine.

La droite BF suit l'équation : $y = \frac{h}{\ell} \cdot x$ La droite AH suit l'équation : $y = h - \frac{2h}{\ell} \cdot x$

Calculons l'intersection des deux droites : $\frac{h}{\ell} \cdot x = h - \frac{2h}{\ell} \cdot x$

En multipliant par $\frac{\ell}{h}$ on obtient : $x = \ell - 2x$ donc $3x = \ell$ donc $\boxed{x = \ell / 3}$

Donc l'intersection des deux droites est au tiers de la longueur de la feuille, donc le pliage 4 est au tiers de la longueur de la feuille.



❾ Le triangle OAB est isocèle car OA et OB sont deux rayons du cercle.
Donc $\alpha = \beta$

$\alpha + \beta + 118° = 180°$, donc $\underline{\underline{\alpha = \beta}} = \dfrac{180° - 118°}{2} \underline{\underline{= 31°}}$

A, B et D sont sur le cercle et AD est un diamètre du cercle,
donc ABD est rectangle en B, donc $\beta + \delta + 43° = 90°$
Donc $\underline{\underline{\delta =}} 90° - 43° - \beta = 47° - 31° \underline{\underline{= 16°}}$

On en déduit aussi que $\alpha + \varepsilon = 90°$, donc $\underline{\underline{\varepsilon = 59°}}$

On peut aussi déduire la valeur de ε en remarquant que

ε est l'angle inscrit correspondant à l'angle au centre de 118°, donc $\underline{\underline{\varepsilon = \dfrac{118°}{2} = 59°}}$

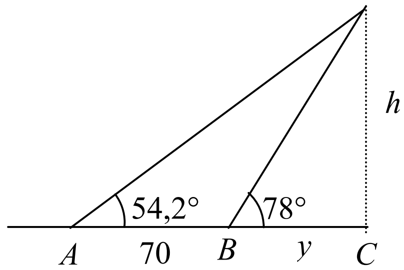
$\underline{\underline{\gamma = \alpha = 31°}}$ car γ et α sont deux angles inscrits interceptant le même arc de cercle $\widehat{BD}$.

$\underline{\underline{\varphi = \beta + \delta = 47°}}$ car φ et β+δ sont deux angles inscrits interceptant le même arc de cercle $\widehat{AC}$.

On peut vérifier que $\gamma + \varphi + \varepsilon + 43° = 180°$

---

❿ Voici un croquis correspondant au texte :



h = La hauteur du jet d'eau
A = La position du touriste lors de sa première mesure d'angle
B = La position du touriste lors de sa deuxième mesure d'angle
y = Distance du touriste à la base du jet d'eau lors de sa deuxième mesure d'angle.

Nous savons que : $\tan(54{,}2°) = \dfrac{h}{70 + y}$ et $\tan(78°) = \dfrac{h}{y}$

De ces deux égalités, nous pouvons éliminer l'inconnue y. $y = \dfrac{h}{\tan(78°)}$

Donc $h = \tan(54{,}2°) \cdot (70 + y) = \tan(54{,}2°) \cdot \left(70 + \dfrac{h}{\tan(78°)}\right) = \tan(54{,}2°) \cdot 70 + \dfrac{\tan(54{,}2°)}{\tan(78°)} \cdot h$

$\rightarrow h \cdot \left(1 - \dfrac{\tan(54{,}2°)}{\tan(78°)}\right) = \tan(54{,}2°) \cdot 70$

$\rightarrow h = \tan(54{,}2°) \cdot 70 \cdot \left(1 - \dfrac{\tan(54{,}2°)}{\tan(78°)}\right)^{-1} \approx 137{,}6$

La hauteur du jet d'eau mesurée par le touriste est de 137,6 mètres.
