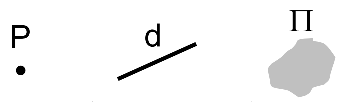
I. Définitions de termes de base et notations

<u>Qu'est-ce que la géométrie ?</u>

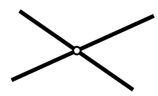
Ce mot vient du grec et signifie à peu près « mesure de la terre », à comprendre dans le sens « mesure des champs ». Au début, elle servait à mesurer la taille de champs à cultiver et les dimensions de certains objets. Par exemple, quelle est la longueur du cerceau métallique qui entoure un tonneau d'un diamètre connu ?
Au VI$^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C., Thalès de Milet déduit la hauteur de la grande pyramide de Kheops par un raisonnement géométrique. Plus tard les Grecs ont étudié de façon plus abstraite les propriétés des figures dans un plan. C'est la naissance des mathématiques rigoureuses : on cherche à démontrer certaines formules, on ne se contente plus de simplement les utiliser.

Depuis cette époque, la géométrie s'est beaucoup développée et ne se limite plus à l'étude de figures dans un plan, mais s'occupe aussi de l'étude d'objets dans l'espace de dimension trois, et même de dimension supérieure à trois. Elle généralise l'étude de figures dans un plan à l'étude de figures dans une surface courbe. Par exemple, il est utile d'étudier les propriétés de figures, par exemple un triangle, sur la surface de la terre : la somme des angles d'un triangle n'est plus 180° !
De plus en plus abstraites, les mathématiques permettent même de définir un espace courbe de dimension trois, quatre ou plus. Ces travaux ont été utiles pour développer la théorie de la relativité générale.
Dans tout ce qui suit, nous nous limiterons à la ***géométrie euclidienne plane*** qui nous vient du grec Euclide (330 -276 av. J.-C.), auteur d'un ouvrage « Les Eléments », qui réunit à la fois ses propres découvertes et aussi les principaux faits connus de son temps aussi bien en géométrie qu'en arithmétique. La valeur toute particulière que nous accordons à cet ouvrage est l'utilisation systématique du **raisonnement déductif**.



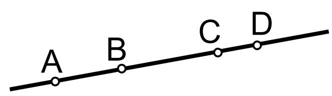
<u>Définitions :</u>
Nous utiliserons notre notion intuitive de **point**, de **droite** et de **plan**.

Deux droites sont **sécantes** lorsqu'elles passent par un même point.

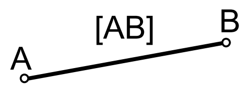


Deux droites sont **parallèles** lorsqu'elles n'ont pas de point d'intersection.

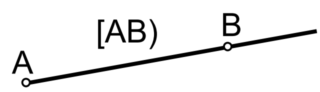
Plusieurs points sont dits **alignés**, s'ils appartiennent à une même droite.



Un **segment de droite** est la portion de droite limitée par deux points.
On notera **[AB]** le segment de droite limitée par les deux points A et B.

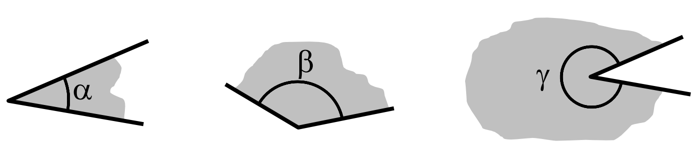


Une **demi-droite** est une portion de droite limitée par un point.
On notera **[AB)** la demi-droite limitée par le point A, passant par le point B.

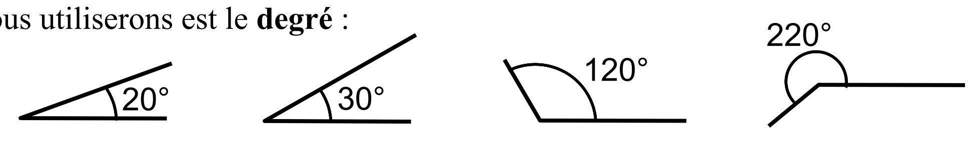


Les extrémités d'un segment de droite et l'extrémité d'une demi-droite sont appelées **sommets**.
A et B sont les **sommets** du segment [AB].
A est le **sommet** de la demi-droite [AB).

Un **angle** est une portion de plan, limitée par deux demi-droites de même sommet.



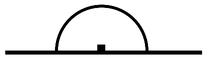
La **grandeur d'un angle** "mesure l'écartement" entre les deux demi-droites qui forment l'angle.
L'unité de mesure que nous utiliserons est le **degré** :



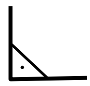
Remarque :

Les angles se notent généralement avec des lettres de l'alphabet grec :

α se lit "**alpha**", β se lit "**bêta**", γ se lit "**gamma**", δ se lit "**delta**", θ se lit "**thêta**", ...

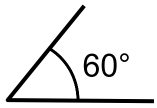


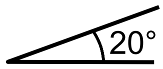
Un **angle plat** est un angle formé par deux demi-droites qui sont dans le prolongement l'une de l'autre.
Sa grandeur est de 180°.



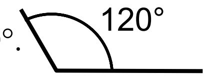
Un **angle droit** est un angle de grandeur 90°.

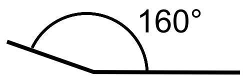
Un **angle aigu** est un angle de grandeur inférieure à 90°.



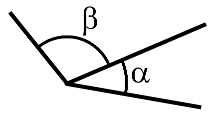


Un **angle obtus** est un angle de grandeur comprise entre 90° et 180°.

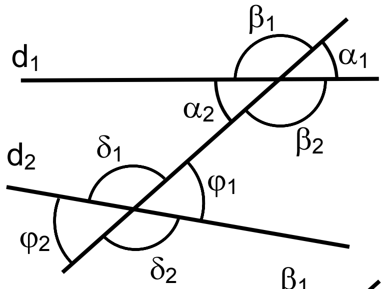




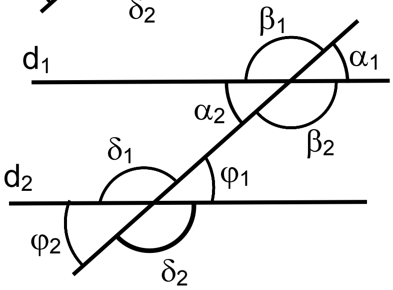
Deux angles sont **adjacents** s'ils ont le même sommet et un côté en commun.
α et β sont deux angles adjacents.



Deux angles sont **opposés par leur sommet** si les prolongements des côtés de l'un sont les côtés de l'autre.
α_1 et α_2, β_1 et β_2, φ_1 et φ_2, δ_1 et δ_2 sont opposés par leur sommet.

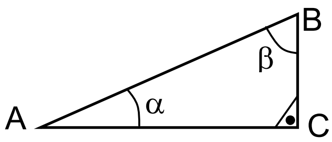


Les paires d'angles : α_1 et φ_2, β_1 et δ_2 sont **alternes-externes**.
Les paires d'angles : α_2 et φ_1, β_2 et δ_1 sont **alternes-internes**.
Les paires d'angles : α_1 et φ_1, α_2 et φ_2,
β_1 et δ_1, β_2 et δ_2 sont **correspondants**.



Deux angles sont **supplémentaires** si leur somme vaut 180°.
δ_1 et α_1 sont deux angles supplémentaires. Notez-en trois autres.

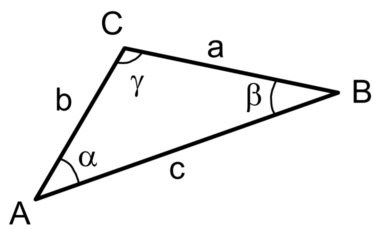
Deux angles sont **complémentaires** si leur somme vaut 90°.
Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus α et β sont complémentaires.



Propriétés :

! Des angles opposés par leur sommet sont toujours de même grandeur.
! La somme des angles d'un triangle est de 180°.
! Si les droites d_1 et d_2 sont parallèles,
alors les angles alternes-externes, alternes-internes et correspondants sont de même grandeur.
Réciproquement :
! Si deux angles d'une des paires ci-dessus sont de même grandeur, alors d_1 et d_2 sont parallèles.
Propriété essentielle lorsque nous traiterons des triangles semblables

Notations :



A, **B** et **C** sont des points ou des sommets

(AB), **(AC)** et **(BC)** sont des droites

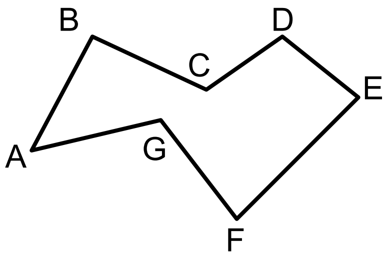
[AB], **[AC]** et **[BC]** sont des segments de droites

$\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$ sont des angles

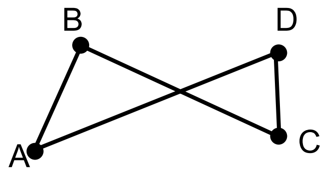
a = BC = $\overline{BC}$, b = AC = $\overline{AC}$ et **c = AB =** $\overline{AB}$ sont des longueurs de segments de droites

II.1 Les polygones, introduction

Définitions :
Un **polygone** est défini par un nombre fini de points donnés **dans un certain ordre** et par la ligne brisée fermée qui relie chaque point au suivant, le dernier étant relié au premier.
Chaque point est un **sommet** du polygone.
Chaque segment de la ligne brisée est un **côté** du polygone.
Un polygone est **croisé** si un ou plusieurs côtés croisent un ou plusieurs autres côtés.
Un polygone est **convexe** si chaque ligne reliant deux points à l'intérieur du polygone est aussi à l'intérieur du polygone.
Un polygone est **régulier** si tous les côtés ont même longueur et tous les angles sont égaux.



Un polygone ABCDEFG



C'est un polygone croisé

Dessinez le polygone ABCD

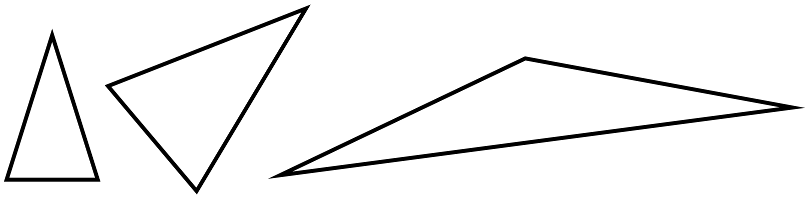
II.2 Les triangles

Définition : Un **triangle** est un polygone à trois côtés (et donc à trois sommets).

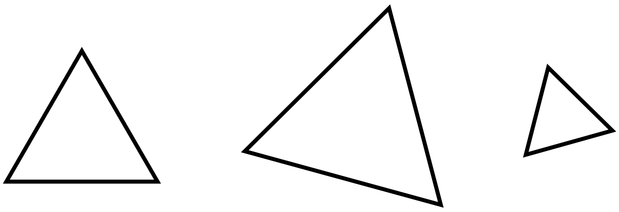
Propriété importante : **La somme des angles d'un triangle est toujours de 180°**.

Les triangles particuliers :

Par définition, un triangle est **isocèle**
⇔ il possède deux côtés isométriques.
⇔ il possède deux angles isométriques.
Ces deux propriétés sont **équivalentes**.

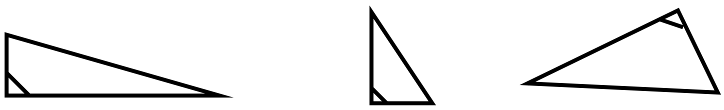


Un triangle est **équilatéral** si :
⇔ il possède trois côtés isométriques.
⇔ il possède trois angles isométriques.
Ces deux propriétés sont **équivalentes**.



Quelle est la grandeur de chaque angle ?

Un triangle est **rectangle**
⇔ il possède un angle droit.



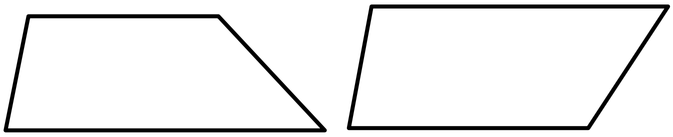
Un triangle peut-il être **rectangle et isocèle** en même temps ?
Oui, s'il possède un angle droit et deux angles de 45°.

II.3 Les quadrilatères

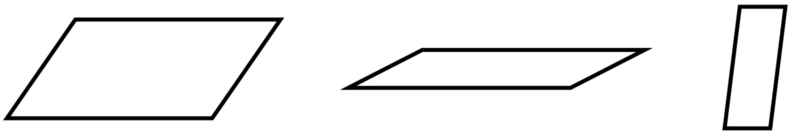
Définition : Un **quadrilatère** est un polygone à quatre côtés (et donc à quatre sommets).

Propriété importante : **La somme des angles d'un quadrilatère non croisé est toujours de 360°**.

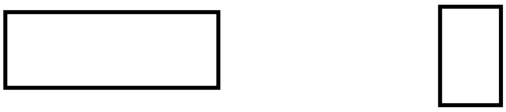
Un **trapèze** a deux côtés parallèles.



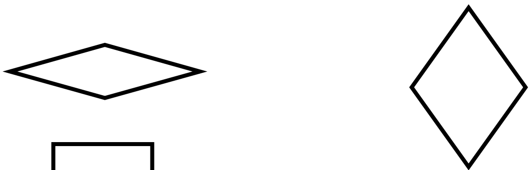
Un **parallélogramme** a ses côtés opposés parallèles.
Est-il correct de dire qu'un parallélogramme est un trapèze ?
Oui, c'est un trapèze particulier.



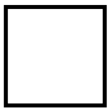
Un **rectangle** a quatre angles droits.
Est-il correct de dire qu'un rectangle est un parallélogramme ?
Oui, c'est un parallélogramme particulier.
Est-il correct de dire qu'un parallélogramme est un rectangle ? Non, il existe des parallélogrammes non rectangle !



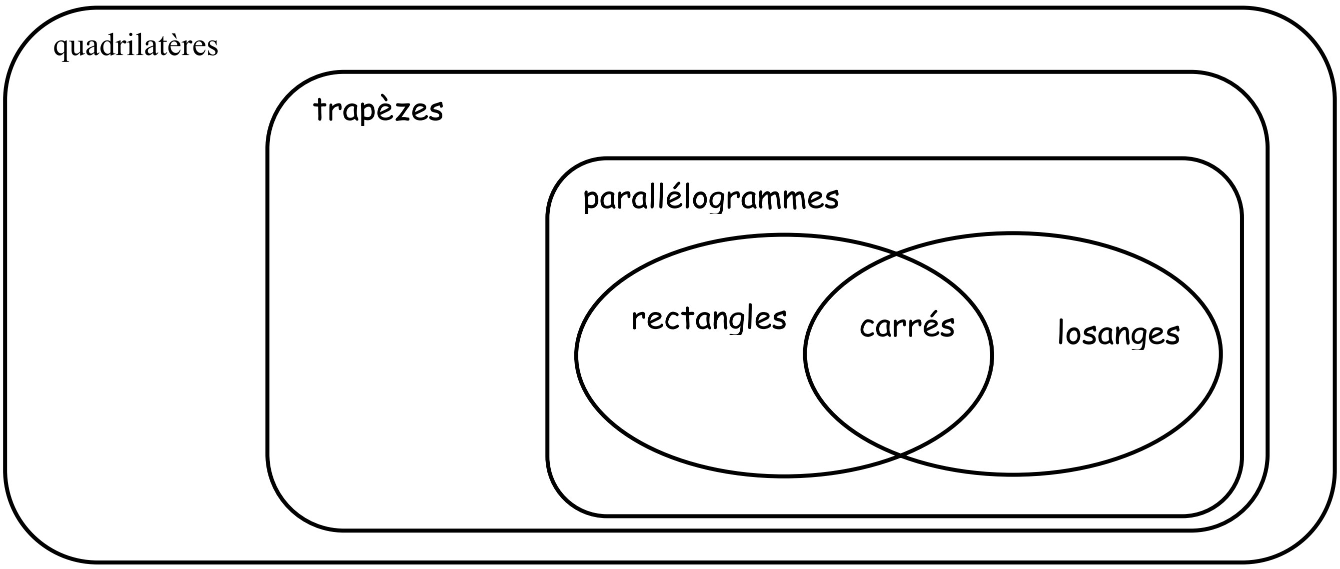
Un **losange** a quatre côtés de même longueur.



Un **carré** a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur.



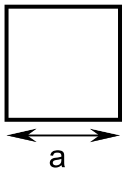
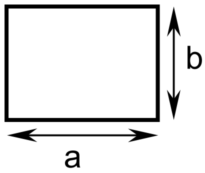
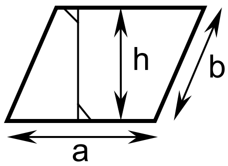
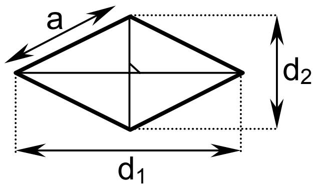
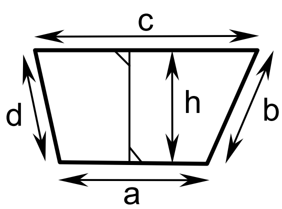
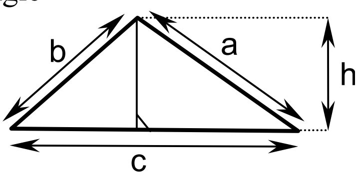
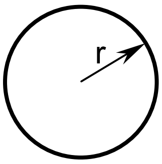
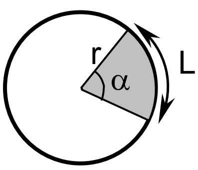
Dénommez, dans l'ensemble des quadrilatères : l'ensemble des trapèzes, des parallélogrammes, des rectangles, des losanges et des carrés, sans qu'il y ait de zone correspondant à un ensemble vide.



Pour les curieux, voici d'autres polygones :

Les polygones à 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 12 côtés sont appelés respectivement **pentagone**, **hexagone**, **heptagone**, **octogone**, **ennéagone**, **décagone** et **dodécagone**.

III. Formules d'aire et de périmètre **à compléter...**

Figure	Périmètre	Aire
Carré 	$P = 4 \cdot a$	$A = a^2$
Rectangle 	$P = 2 \cdot (a + b)$	$A = a \cdot b$
Parallélogramme 	$P = 2 \cdot (a + b)$	$A = a \cdot h$
Losange 	$P = 4 \cdot a$ Rem : $a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$	$A = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$
Trapèze 	$P = a + b + c + d$	$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$
Triangle 	$P = a + b + c$	$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$
Disque 	$P = 2 \cdot \pi \cdot r$	$A = \pi \cdot r^2$
Secteur circulaire 	$P = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi \cdot r + 2 \cdot r$	$A = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi \cdot r^2$

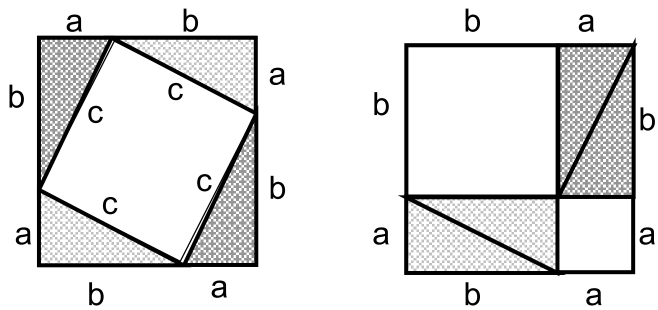
IV. Le théorème de Pythagore

Pythagore de Samos, né à Samos en env. 580 av. JC, décédé en Italie en env. 500 av.JC.

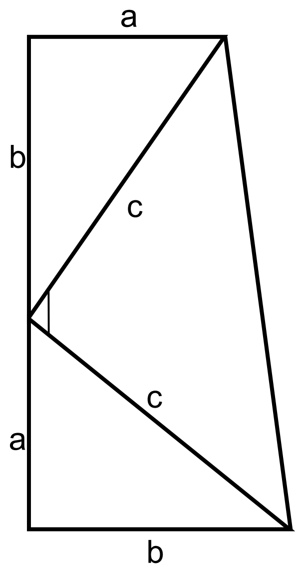
<u>Si</u> un triangle possède un angle droit,
<u>alors</u> le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

<u>Voici deux démonstrations du théorème de Pythagore :</u>

1) L'aire du carré blanc à gauche est égale à la somme des aires des deux carrés blancs de droite, donc $c^2 = a^2 + b^2$.



2) Voici une démonstration due au 20ème président des Etats-Unis, James A. Garfield (1876).



L'aire du trapèze égale $\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot(a+b)$

Elle est égale à la somme des aires des trois triangles :

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b+\frac{1}{2}\cdot a\cdot b+\frac{1}{2}\cdot c\cdot c$

Donc

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b+\frac{1}{2}\cdot a\cdot b+\frac{1}{2}\cdot c\cdot c=\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot(a+b)$

En simplifiant, on trouve que $c^2 = a^2 + b^2$.

En 1968, on recensait 367 démonstrations du théorème de Pythagore !!!

<u>Réciproque :</u>

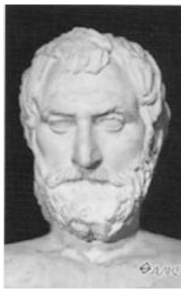
Dans un théorème, il y a une hypothèse et une conclusion.
Si l'on inverse l'hypothèse et la conclusion, on obtient une nouvelle assertion, appelée **réciproque**, qui peut être vraie ou fausse.
Dans notre cas, cette réciproque est vraie (nous l'admettrons sans démonstration) :

<u>Si</u> le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés,
<u>alors</u> ce triangle est un triangle rectangle.

<u>En résumé :</u>

un triangle possède un angle de 90° $\Leftrightarrow$
le carré d'un côté vaut la somme des carrés des deux autres

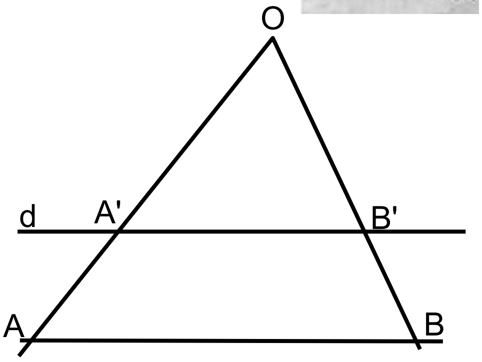
V.1 Le Théorème de Thalès



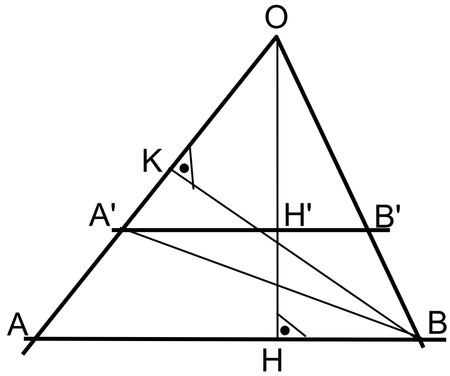
Thalès de Milet, (environ : 625 - 547 av. J.-C.) était un mathématicien, astronome, physicien et philosophe grec.

<u>Théorème de Thalès</u>

Soit un triangle OAB et une droite **d** coupant la demi-droite $[OA)$ en A' et la demi-droite $[OB)$ en B'. **<u>Si</u> d** est parallèle à la droite (AB) **<u>alors</u>** $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$



Démonstration :



L'idée de la démonstration est de calculer les aires des triangles OAB et OA'B de deux manières différentes, puis d'exprimer le rapport de ces deux aires de deux manières différentes.

Aire du triangle OAB :
$2 \cdot \text{Aire}_{OAB} = AB \cdot OH = OA \cdot KB$

Aire du triangle OA'B :
$$2 \cdot \text{Aire}_{OA'B} = \underbrace{A'B' \cdot OH' + A'B' \cdot H'H}_{= A'B' \cdot OH} = OA' \cdot KB$$
$$= OA' \cdot KB$$

Donc le rapport des deux aires peut s'exprimer de deux manières différentes :
$$\frac{Aire_{OA'B}}{Aire_{OAB}} = \frac{A'B' \cdot OH}{AB \cdot OH} = \frac{OA' \cdot KB}{OA \cdot KB}$$

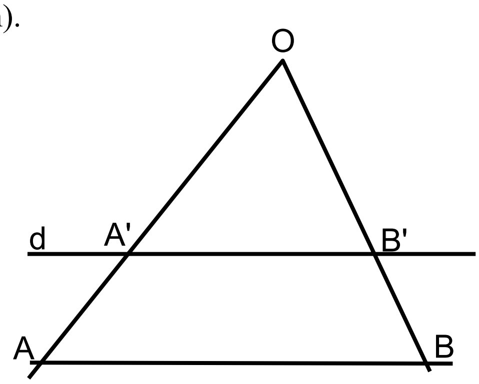
Après simplification la première égalité du théorème est obtenue : $\boxed{\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{OA'}{OA}}$

La deuxième égalité s'obtient de manière similaire. CQFD

Réciproque : elle est vraie (nous l'admettrons sans démonstration).

Enoncé de la réciproque du théorème de Thalès :

> Soit un triangle OAB et une droite **d** coupant la demi-droite $[OA)$ en A' et la demi-droite $[OB)$ en B'.
>
> **Si** $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$
> **alors** **d** est parallèle à la droite (AB).

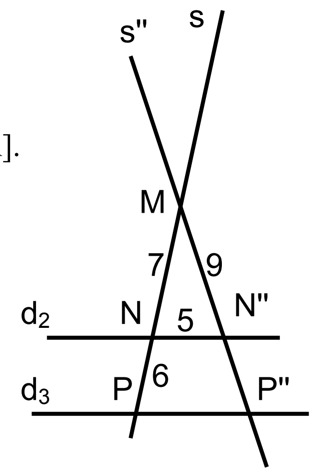


Applications du théorème de Thalès

Exemple 1 :
d_2 est parallèle à d_3.
M, N, N'', P et P'' sont les intersections indiquées sur le schéma.
Sachant que : MN = 7 [cm] ; MN'' = 9 [cm] ; NN'' = 5 [cm] et MP = 13 [cm].
Que valent les longueurs : MP'' et PP'' ?

$\frac{MP''}{MP} = \frac{MN''}{MN}$ donc MP'' = $MP \cdot \frac{MN''}{MN} = 13 \cdot \frac{9}{7} = \frac{117}{7} \approx 16{,}714$ [cm].

$\frac{PP''}{NN''} = \frac{MP}{MN}$ donc PP'' = $NN'' \cdot \frac{MP}{MN} = 5 \cdot \frac{13}{7} = \frac{65}{7} \approx 9{,}286$ [cm].



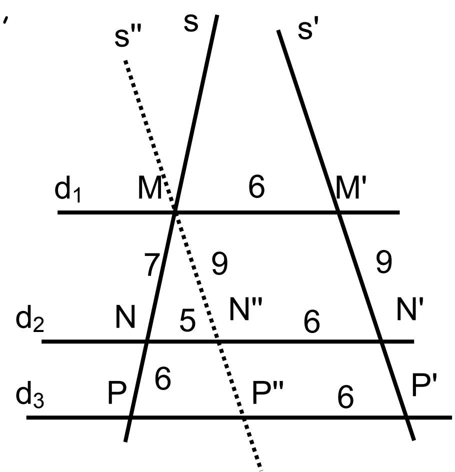
Exemple 2 :
d_1 ; d_2 et d_3 sont parallèles.
M, M', N, N', P et P' sont les intersections indiquées sur le schéma.
Sachant que : MN = 7 [cm] ; M'N' = 9 [cm] ; MM' = 6 [cm] ; NN' = 11 [cm] et MP = 13 [cm].
Que valent les longueurs : M'P' et PP' ?
Explicitez clairement le théorème de Thalès dans la résolution de ce problème.

En traçant la ligne s'' parallèlement à s', passant par M, on retrouve exactement la figure ci-dessus.

Donc M'P' = MP'' = $\frac{117}{7} \approx 16{,}714$ [cm].

Et PP' = PP'' + P''P = 6 + $\frac{65}{7} \approx 15{,}286$ [cm].

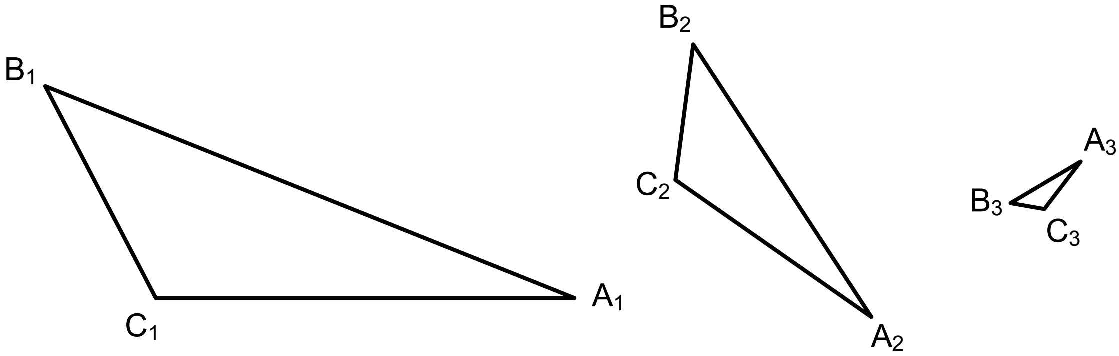
Il a fallut tracer la ligne s'' pour pouvoir appliquer le théorème de Thalès.



V.2 Triangles semblables

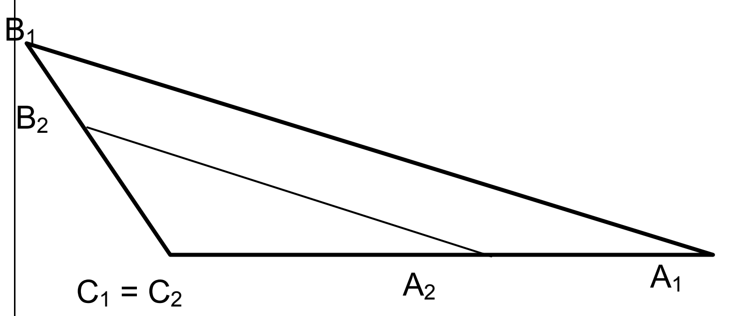
Définition :
Deux triangles sont **semblables** si leurs trois angles sont **respectivement** égaux.

Exemple :
Ces trois triangles sont semblables car
l'angle en A_1 égale l'angle en A_2 qui égale l'angle en A_3 et
l'angle en B_1 égale l'angle en B_2 qui égale l'angle en B_3 et
l'angle en C_1 égale l'angle en C_2 qui égale l'angle en C_3.



Application aux triangles semblables.

Par glissement, grâce à l'égalité respective de leurs trois angles, on peut amener le triangle $A_2B_2C_2$ à l'intérieur du triangle $A_1B_1C_1$, dans une position qui permet l'utilisation du théorème de Thalès :



L'égalité des angles garantit le parallélisme des segments A_2B_2 et A_1B_1 qui est l'hypothèse du théorème de Thalès.

Ce théorème nous permet d'affirmer :

$$\frac{C_2A_2}{C_1A_1} = \frac{C_2B_2}{C_1B_1} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1}.$$

Ces quotients sont appelés :
"**rapport de similitude** des deux triangles"

Pour mieux se repérer dans des triangles semblables, on parle d'angles homologues :
ce sont les paires d'angles égaux, par exemple $\widehat{C_2B_2A_2} = \widehat{C_1B_1A_1}$ ou $\widehat{B_2C_2A_2} = \widehat{B_1C_1A_1}$.
Pratiquement, cochez les angles égaux sur les figures.

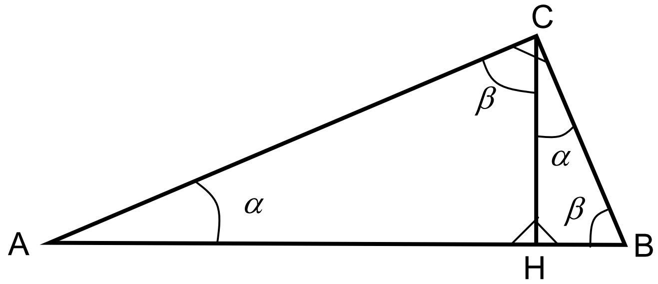
De même, on qualifie d'homologues les côtés des triangles qui sont opposés à deux angles homologues :
par exemple C_2A_2 et C_1A_1 , ou bien B_2A_2 et B_1A_1 .

Remarquez que dans les trois rapports égaux, les numérateurs sont des côtés d'un triangle et les dénominateurs ceux de l'autre triangle.

VI. Propriétés des triangles rectangles

On vérifie facilement que les triangles ABC, CBH et ACH sont semblables :

cochez les angles respectivement égaux.



Similitude des triangles ACH et CBH

Rapports égaux = $\frac{AC}{BC} = \frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$ Pourquoi a-t-on aussi $\boxed{CH^2 = AH \cdot HB}$?

C'est le **théorème de la hauteur** :

"Le carré de la hauteur issue de l'angle droit est égal au produit des deux longueurs qu'elle détermine sur l'hypoténuse"

Similitude des triangles ACH et ABC

Rapports égaux = $\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{CH}{BC}$

Pourquoi a-t-on aussi $\boxed{CA^2 = AH \cdot AB}$?

Similitude des triangles CBH et ABC

Rapports égaux = $\frac{CB}{AB} = \frac{CH}{AC} = \frac{BH}{BC}$

Pourquoi a-t-on aussi $\boxed{CB^2 = HB \cdot AB}$?

C'est le **théorème d'Euclide** :

"Le carré d'une cathète est égal au produit de l'hypoténuse par sa projection sur l'hypoténuse"

Ecrire de deux manières différentes l'aire du triangle ABC : Aire = $0,5 \cdot AC \cdot BC = 0,5 \cdot AB \cdot CH$

Pourquoi peut-on en déduire : $\boxed{AC \cdot BC = AB \cdot CH}$

"Le produit des deux cathètes est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur issue de l'angle droit"

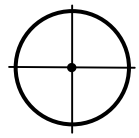
Et encore une démonstration, en une ligne, du théorème de Pythagore :

$$CA^2 + CB^2 = AH \cdot AB + HB \cdot AB = (AH + HB) \cdot AB = AB^2$$

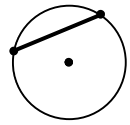
VII. Angle au centre et angle inscrit dans un cercle

VII.1 Quelques définitions

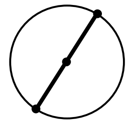
Un **cercle** est le lieu géométrique des points équidistants à un point appelé le **centre**.



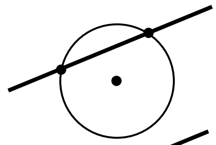
Une **corde** est un segment de droite dont les deux extrémités sont sur le cercle.



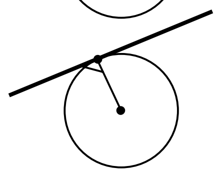
Un **diamètre** est une corde passant par le centre du cercle.



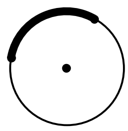
Une **sécante** est une droite qui possède deux points communs avec le cercle.



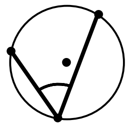
Une **tangente** est une droite qui possède un seul point commun avec le cercle.
L'angle déterminé par la tangente et le rayon aboutissant à ce point commun unique, appelé point de contact, est droit.



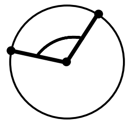
Un **arc de cercle** est une portion de cercle comprise entre deux points du cercle.



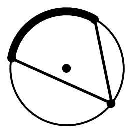
Un **angle inscrit** est un angle dont le sommet se situe sur le cercle, et dont les côtés coupent le cercle.



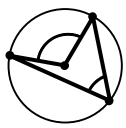
Un **angle au centre** est un angle dont le sommet se situe sur le centre du cercle.



Un **arc de cercle intercepté par un angle** est une portion de cercle contenue dans l'angle.



Un angle inscrit et un angle au centre sont **correspondants** si l'angle inscrit et l'angle au centre interceptent le même arc de cercle.



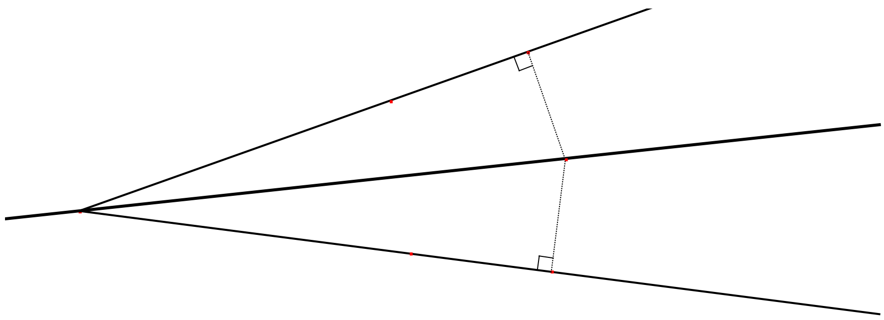
Ce vocabulaire vous sera utile dans l'activité "Angle au centre et angle inscrit".

VIII. Droites et points remarquables dans un triangle

VIII.1 Bissectrices

Définition :

On appelle **bissectrice** d'un angle la droite qui coupe l'angle en deux angles égaux.



Propriété:

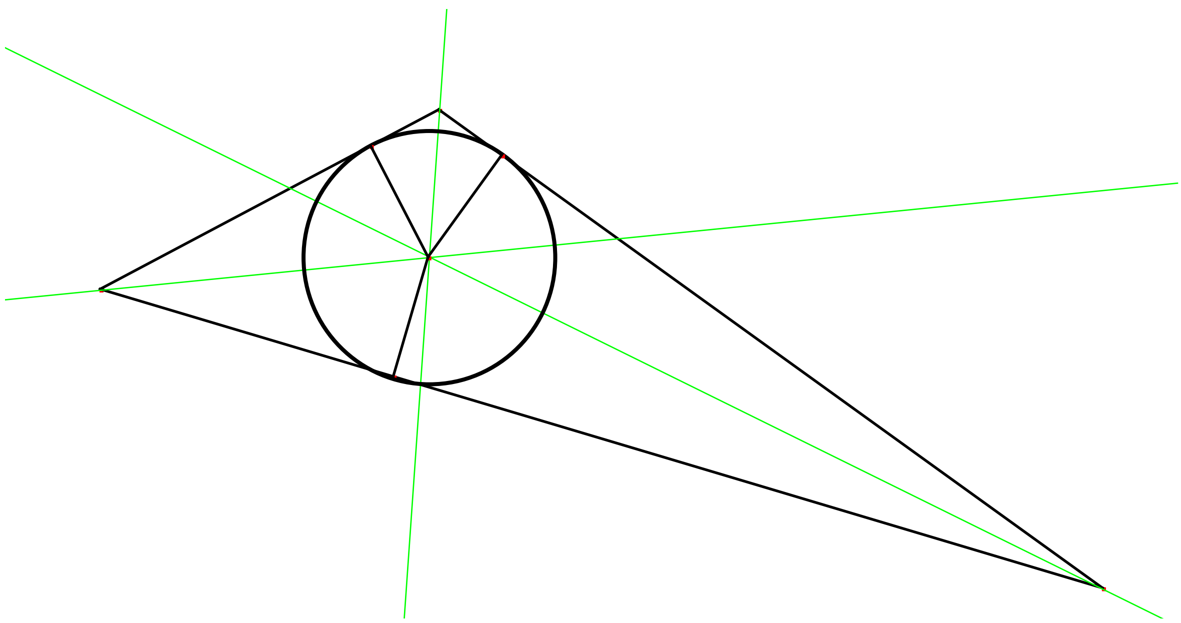
a) La bissectrice est l'axe de symétrie de l'angle.

b) Tout point de la bissectrice est équidistant des côtés de l'angle :

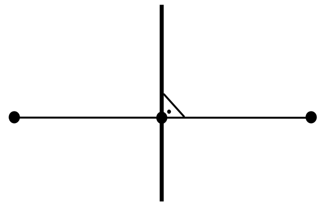
Application aux trois angles d'un triangle

a) Un triangle possède trois bissectrices intérieures.

b) Elles se coupent en un même point qui est le centre du **cercle inscrit** du triangle.



VIII.2 Médiatrices



Définition :

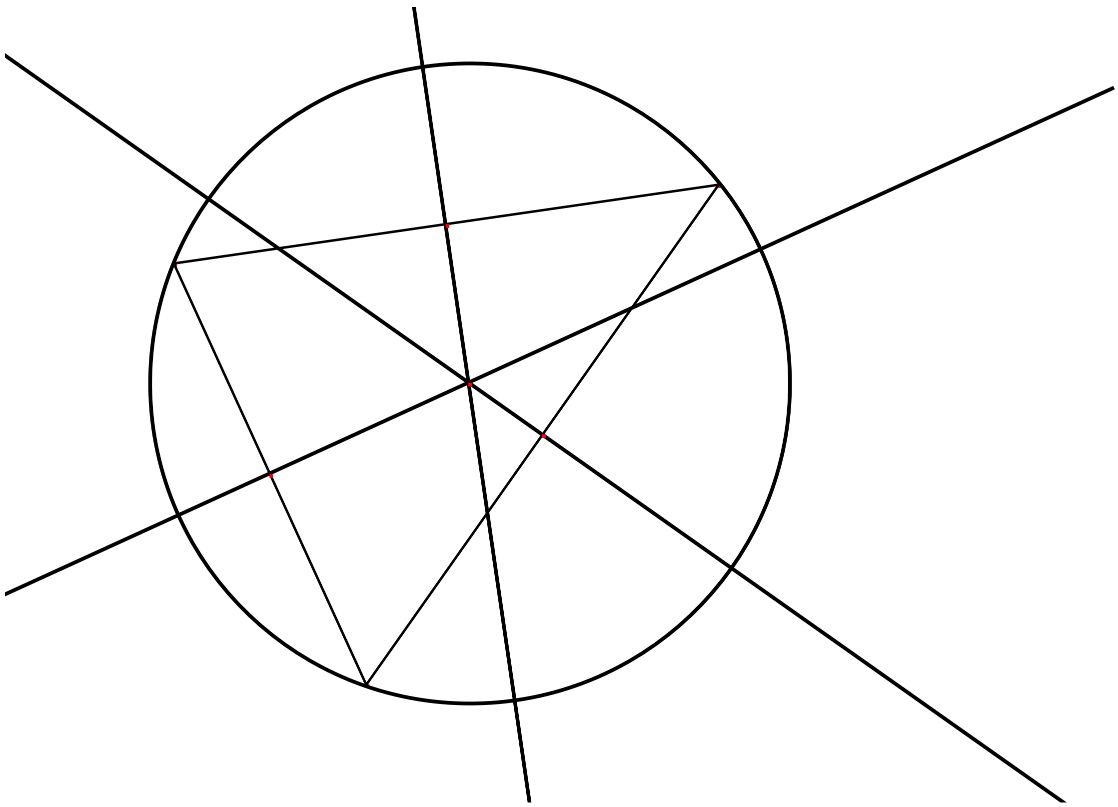
On appelle **médiatrice** d'un segment de droite,
la droite perpendiculaire au segment en son milieu.

Propriétés :

a) La médiatrice est l'axe de symétrie du segment de droite.
b) Tout point de la médiatrice d'un segment de droite est équidistant de ses deux extrémités.

Application aux trois côtés d'un triangle

a) Un triangle possède trois médiatrices.
b) Elles se coupent en un même point qui est le centre du **cercle circonscrit** au triangle.



VIII.3 Médianes

Définition :

On appelle **médiane** d'un triangle, un segment qui joint un sommet du triangle au milieu du côté opposé.

Placez les points D, E et F :

D est le milieu du segment [AC]

E est le milieu du segment [AB]

F est le milieu du segment [BC]

Propriétés :

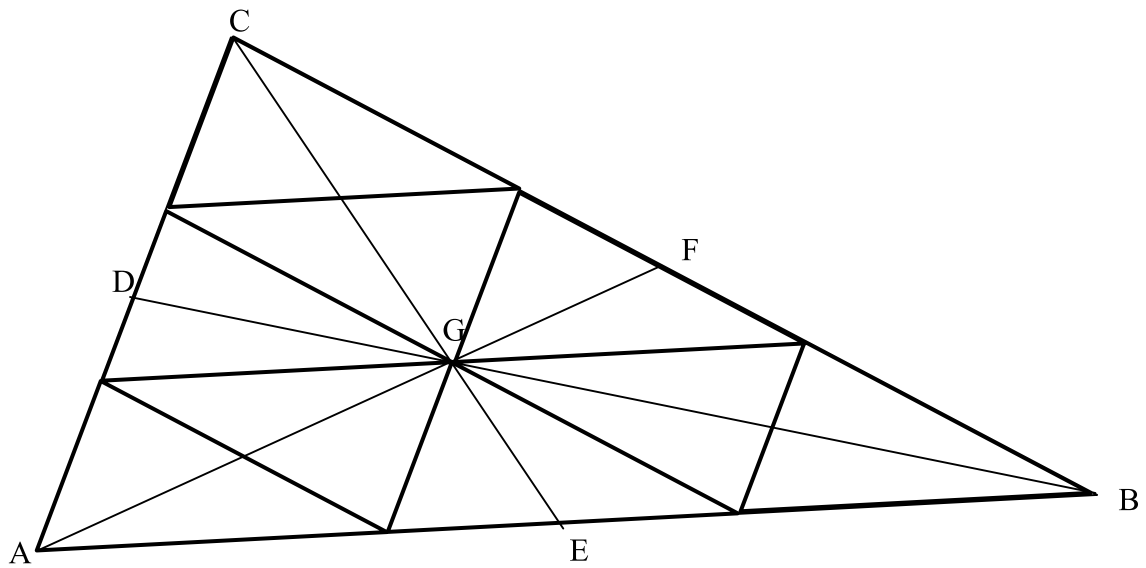
a) Un triangle possède trois médianes.

b) Les médianes d'un triangle se coupent en un même point **G** appelé **centre de gravité** du triangle.

c) La distance GA est le double de la distance GF

La distance GB est le double de la distance GD

La distance GC est le double de la distance GE



En traçant neuf triangles semblables au triangle ABC, de dimensions trois fois plus petites, comme dans le dessin ci-dessus, les propriétés deviennent évidentes. Les médianes du triangles ABC sont aussi des médianes des plus petits triangles, dont six ont un sommet qui se trouve au point G. (Par application du théorème de Thalès.)

De plus, la distance GA est le double de GF. car le segment GA traverse deux triangles, alors que le segment GF n'en traverse qu'un seul.

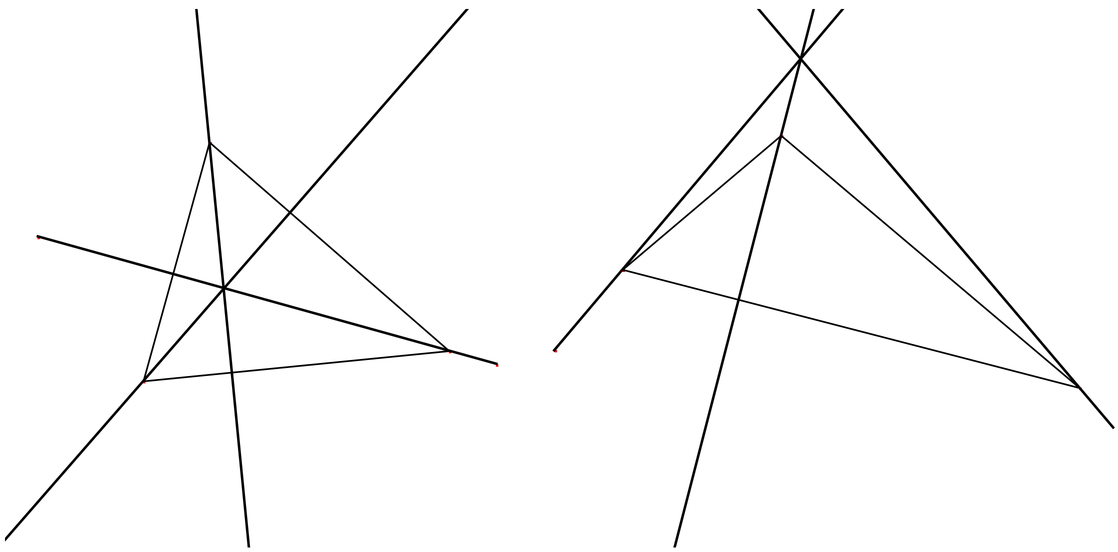
De même pour GB et GC.

VIII.4 Hauteurs d'un triangle

Définition :

On appelle **hauteur** d'un triangle, une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Les hauteurs ne se trouvent pas nécessairement à l'intérieur du triangle.



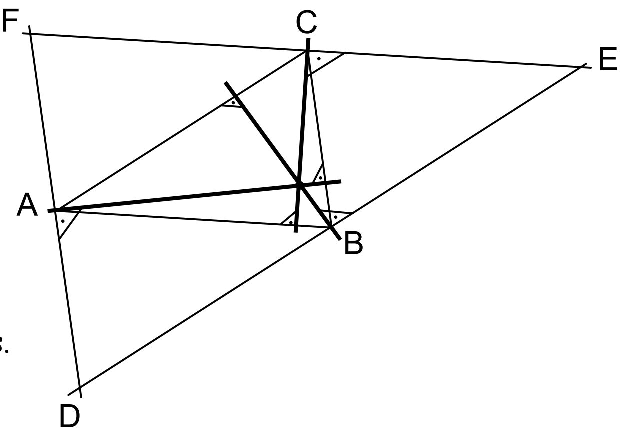
Propriétés :

a) Un triangle possède trois hauteurs.
b) Les hauteurs d'un triangle se coupent toutes en un même point, appelé **orthocentre** du triangle.

Par curiosité, montrons que les hauteurs d'un triangle *ABC* sont les médiatrices d'un triangle *DEF* plus grand. Ceci démontrera le point b).

Définissons une droite (FE) parallèle à (AB) passant par *C*,
puis une autre (DE) parallèle à (AC) passant par B,
puis finalement une troisième (DF) parallèle à (BC) passant par *A*.

Notons D, E et F les intersections de ces trois droites.
Ces trois points forment un nouveau triangle.
Nous allons montrer que les hauteurs du triangle *ABC* sont les médiatrices du triangle *DEF*,
donc elles se croisent en un même point.



Les triangles *ABC*, *BAD*, *ECB* et *CFA* sont égaux,
puisqu'ils sont semblables et partagent des côtés communs.
Donc DB = BE, EC = CF et DA = AF.

De plus, les hauteurs du triangle *ABC* sont perpendiculaires aux côtés du triangle *DEF*.
Ceci qui montre qu'elles sont les médiatrices du triangle *DEF*.
Et donc qu'elles se coupent en un même point.

CQFD

Index