I. Introduction

<u>Qu'est-ce que l'Analyse ?</u>
Un but de l'analyse est d'approcher l'infiniment grand et l'infiniment petit. Une bonne connaissance des fonctions est nécessaire pour faire cela, c'est la raison pour laquelle ce cours traitera principalement des fonctions, que nous définirons précisément au chapitre IV.

<u>Justifications de l'importance des fonctions.</u>
Nous utilisons régulièrement des fonctions sans le savoir.
Un horaire de train donne la position du train *en fonction du* temps.
La distance parcourue en voiture *en fonction du* temps est un autre exemple de fonction.
Un thermomètre indique la température *en fonction de* la hauteur de l'alcool dans le tube.
Un voltmètre analogique indique la tension *en fonction de* la position de l'aiguille.
Une montre analogique indique l'heure *en fonction de* la position des aiguilles.
etc.

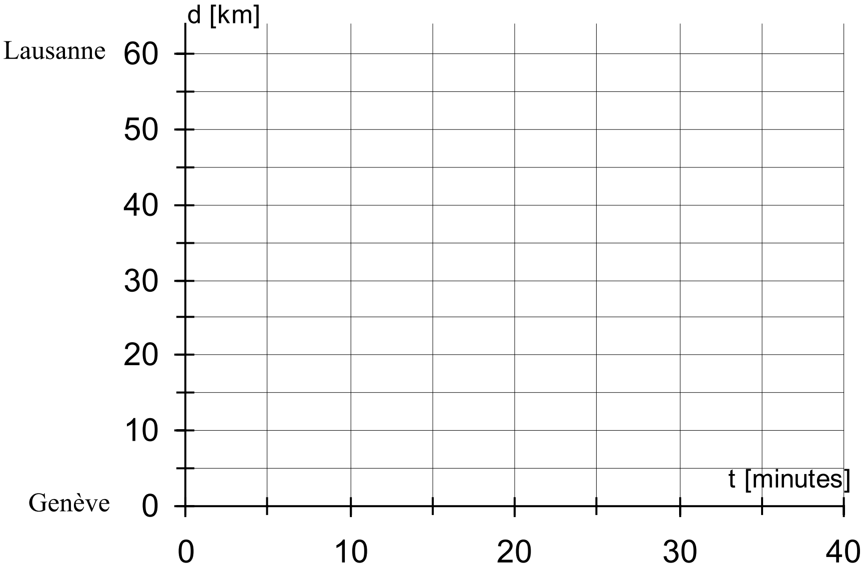
Dès que vous apprenez à compter, vous utilisez une *fonction* :
celle qui à un nombre entier, fait correspondre le nombre entier suivant, c'est-à-dire $f : n \mapsto n+1$ où $n \in \mathbb{N}$.

En première primaire, vous apprenez à additionner deux nombres. C'est aussi une *fonction*, qui à deux nombres en fait correspondre un troisième : $g : \langle m;n \rangle \mapsto m+n$ où $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Ces exemples montrent que les fonctions se retrouvent partout.

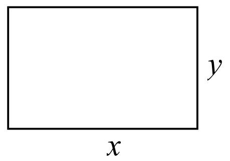
<u>Voici deux problèmes qui se résolvent plus facilement avec l'utilisation de fonctions.</u>
<u>Problème n° 1 :</u>
Une voiture part de Genève à midi au début de l'autoroute, en direction de Lausanne. Pendant les quinze premières minutes, elle roule à une vitesse de 80 km/h, puis le reste du temps à une vitesse de 120 km/h.
A midi vingt, une autre voiture part du début de l'autoroute de Lausanne en direction de Genève. Elle roule à 90 km/h.
Quand les voitures se croiseront-elles, et à quelle distance de Genève, sachant que la distance d'autoroute Genève-Lausanne est de 60 km ?

Pour résoudre ce problème, on peut définir la distance par rapport à Genève de chaque voiture *en fonction du* temps, puis lire sur un graphique à quel instant elles se croisent :



Problème n° 2 :

Parmi tous les rectangles de périmètre valant 20 centimètres, quelles sont les dimensions de celui qui a une aire maximale ?



Notons x la longueur d'un côté et y la longueur de l'autre côté.

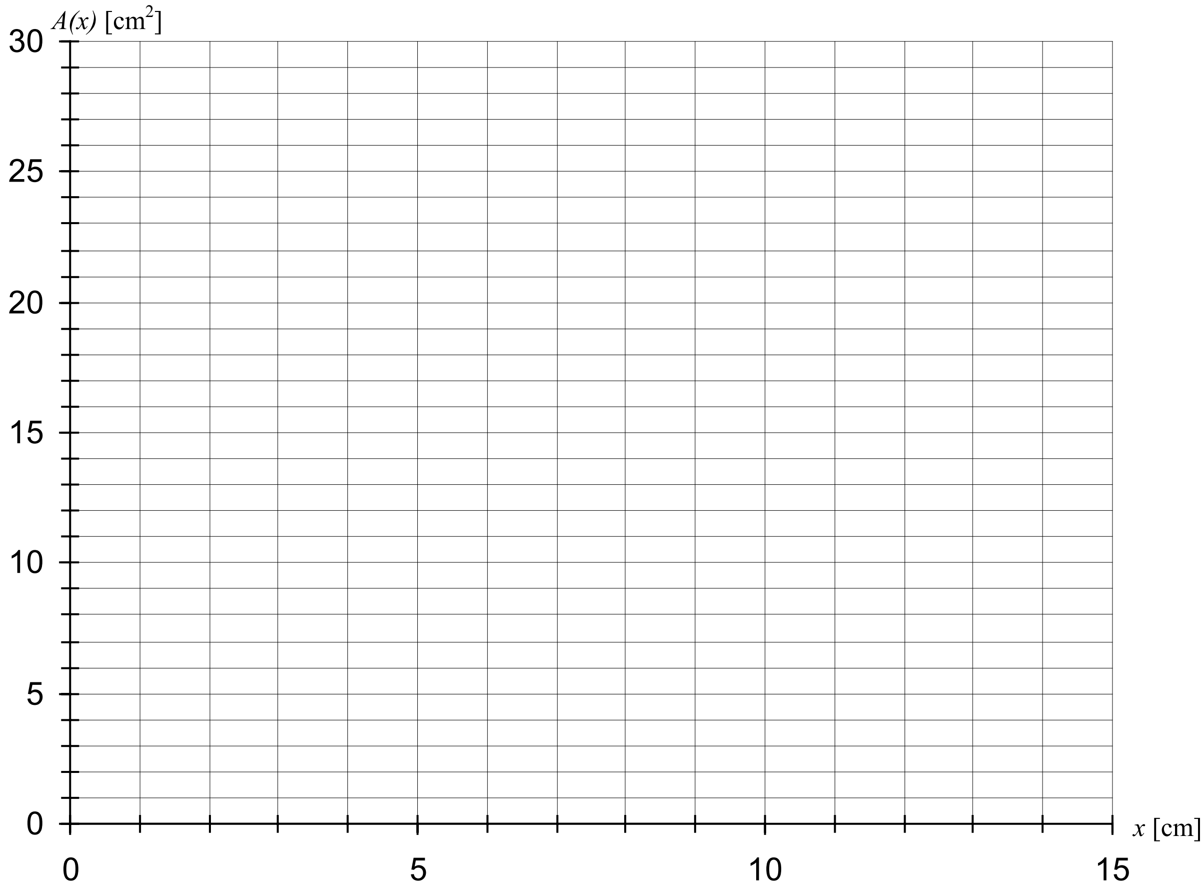
Le périmètre = 20 centimètres, donc $x + y =$ .... donc $y =$ ....

L'aire $A(x\,;y) =$ ....

L'aire en fonction de x : $A(x) =$ ....

A l'aide d'un graphique trouvez la valeur de x qui maximise l'aire $A(x)$.

Quelle est la particularité de ce rectangle ?



II. La notion de variable

En analyse, les notions de **variable** et de **fonction** sont essentielles.

Voici une tentative de définition :
Une **variable** est une grandeur qui peut prendre plusieurs valeurs différentes.

Par convention, on utilise en mathématiques les dernières lettres de l'alphabet $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ pour désigner une variable. En physique, des exemples de variables sont le temps, la distance, la vitesse.

Si la variable ne prend que des valeurs entières, on utilise les lettres $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\ell}$, $\boldsymbol{m}$ ou $\boldsymbol{n}$.

Attention :
Une variable seule n'est pas intéressante.
La notion intéressante est le lien entre deux (ou plusieurs) variables.

Deux variables sont **liées** ou **dépendantes** si les valeurs possibles d'une variable dépendent des valeurs possibles de l'autre variable.

Les exemples qui suivent devraient vous permettre de comprendre la notion de **variables liées**.
Notons x et y deux variables.

Exemple 1 :
Pour une personne donnée : x désigne son âge, y désigne sa taille.
Ces deux valeurs varient avec le temps, ce sont donc des variables. Elles sont liées.

Exemple 2 :
Pour un aliment donné : x désigne son poids, y désigne son prix.
Ce sont deux variables liées. Si le poids double, le prix double aussi.

Exemple 3 :
$y = 4 \cdot x + 3$ est une égalité qui lie les deux variables x et y.
Dès que l'on attribue une valeur à la variable x, cela impose une valeur à la variable y.

Par exemple, si $x = 1$, alors $y = 7$. Si $x = 5$, alors $y =$ .... Si $x = \sqrt{2}$, alors $y =$ ....
De même, dès que l'on attribue une valeur à la variable y, cela impose une valeur à la variable x.

Par exemple, si $y = 1$, alors $x =$ .... Si $y = 3$, alors $x =$ .... Si $y = \sqrt{2}$, alors $x =$ ....

Exemple 4 :
$y = (x + 1)^2$ est une égalité qui lie les deux variables x et y.
Dès que l'on attribue une valeur à la variable x, cela impose une valeur à la variable y.

Par exemple, si $x = 1$, alors $y =$ .... Si $x = 4$, alors $y =$ .... Si $x = \sqrt{2}$, alors $y =$ ....
De même, dès que l'on attribue une valeur à la variable y, cela limite à zéro, une ou deux, les valeurs possibles pour la variable x.

Par exemple, si $y = 4$, alors les valeurs possibles pour x sont : ....

Si $y = -1$, alors les valeurs possibles pour x sont : ....

Exemple 5 :

Notons x et y deux variables.

$x^2 + y^2 = 4$ est une égalité qui lie les deux variables x et y.

Dès que l'on attribue une valeur à la variable x, cela limite les valeurs possibles de la variable y.

Par exemple, si $x = 2$, alors $y =$ .... Si $x = 0$, alors $y =$ ....

Si $x = \sqrt{2}$, alors $y =$ ....

Si $x = 3$, alors $y =$ ....

Exemple 6 :

Notons x et y deux variables.

$y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ est une égalité qui lie les deux variables x et y.

Dès que l'on attribue une valeur à la variable x, cela impose une valeur à la variable y. Sauf si $x = 1$. Cet exemple est typique de l'approche de l'infiniment petit en analyse. Si x prend des valeurs de plus en plus proches de 1, le numérateur $x^2 - 1$ et dénominateur $x - 1$ prennent des valeurs de plus en plus proches de 0, mais la variable y prend des valeurs de plus en plus proches de ....

Exemple 7 :

Notons x et y deux variables.

$y = \dfrac{x + 1}{x}$ est une égalité qui lie les deux variables x et y.

Dès que l'on attribue une valeur à la variable x, cela impose une valeur à la variable y. Sauf si $x = 0$. Cet exemple est typique de l'approche de l'infiniment grand en analyse. Si x prend des valeurs de plus en plus grandes, le numérateur $x + 1$ et dénominateur x prennent des valeurs de plus en plus grandes, mais la variable y prend des valeurs de plus en plus proche de ....

Exercices :

II.1 Dans l'exemple 2, pour un aliment donné que vous choisirez, donnez trois exemples de poids et de prix correspondant.

II.2 Dans l'exemple 3, si $y = -19$, que vaut x ?

II.3 Dans l'exemple 4, si $x = 3$, que vaut y ?

II.4 Dans l'exemple 4, si $y = 42$, que vaut x ?

II.5 Dans l'exemple 5, quelles sont les valeurs possibles de y si $x = 1$?

II.6 Dans l'exemple 6, expliquez pourquoi y prend des valeurs proches de 2, si x prend des valeurs proches de 1.

II.7 Dans l'exemple 7, expliquez pourquoi y prend des valeurs proches de 1, si x prend des valeurs très grandes.

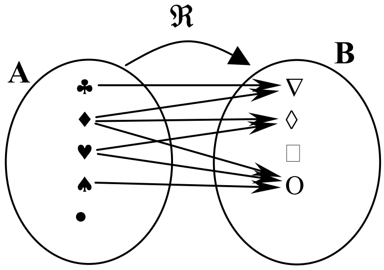
II.8 Imaginez un exemple de deux variables liées.

II.9 Imaginez un exemple de trois variables liées.

III. Les relations

Notons x et y deux variables.
Notons A l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable x.
Notons B l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable y.

Définition :
Dès que ces deux variables sont liées, il existe une **relation de A vers B**.



Voici une autre manière de définir une relation.
Définition :
Une **relation** est définie par :
1) Un ensemble A appelé **ensemble de départ**, ou **source**.
2) Un ensemble B appelé **ensemble d'arrivée**, ou **but**.
3) Une règle de correspondance, qui à chaque élément de l'ensemble de départ fait correspondre *zéro (aucun)* ou *un* ou *plusieurs* éléments de l'ensemble d'arrivée.

On dit aussi une **relation de A vers B**.
Dans le cas où les ensembles A et B sont les mêmes, on parle de **relation dans A**.

Définition :
Si $\boldsymbol{a}$ appartient à l'ensemble de départ et $\boldsymbol{b}$ est un élément de l'ensemble d'arrivée qui correspond à $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ est appelé une **image de $\boldsymbol{a}$**.
$\boldsymbol{a}$ est appelé une **préimage de $\boldsymbol{b}$**.

Si on désigne la relation par $\Re$ alors on note : $\boldsymbol{a} \, \Re \, \boldsymbol{b}$ pour dire que $\boldsymbol{b}$ correspond à $\boldsymbol{a}$.

Attention : On met un élément de la *source à gauche* du $\Re$ et un élément du *but à droite* du $\Re$.

Pour que les exemples du chapitre II définissent des relations, il faut encore spécifier l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

Exemple 1 :
La variable x désigne un être humain.
La variable y désigne un objet.
La source est l'ensemble des êtres humains.
Le but est l'ensemble des objets.
Règle $\Re$: A chaque humain, on fait correspondre les objets qu'il possède.
Si x désigne vous-même, alors y ne peut être qu'un de vos objets.
Si y désigne votre calculatrice, alors x désigne vous-même.

Exemple 2 :
La variable x désigne un animal.
La variable y désigne un animal.
La source et le but sont les mêmes et représentent l'ensemble des animaux.
Règle $\Re$: A chaque animal on fait correspondre ses enfants.
C'est un exemple de relation dans "l'ensemble des animaux"
Si x est votre mère, alors y ne peut être que vous-même ou un de vos frères ou une de vos sœurs.
Si y est vous-même, alors x peut être votre père ou votre mère.

Exemple 3 :
La variable n désigne un nombre entier positif.
La variable m désigne un nombre entier positif.
La source et le but sont égaux à $\mathbb{N}^*$, qui représente l'ensemble des nombres entiers positifs.
Règle : "... est divisible par ...", c.-à-d. qu'à chaque nombre on fait correspondre ses diviseurs.
On peut noter $6 \Re 1$, car 6 est divisible par 1.
$6 \Re 2$, car 6 est divisible par 2
On a aussi $6 \Re 3$ et $6 \Re 6$.
Il est faux de noter : $3 \Re 6$. car 3 n'est pas divisible par 6. : $\cancel{3 \Re 6}$
De $6 \Re 2$, on peut dire que 2 est une **image** de 6 et que 6 est une **préimage** de 2.

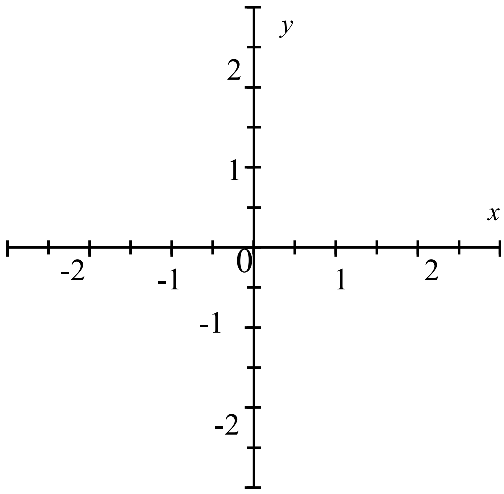
On représente souvent une relation par un tableau :

but source	1	2	3	4	5	6	...
1							
2							
3							
4							
5							
6		x	x				
...							

Mettez une croix dans les cases des éléments qui sont en relation.
Remarquez qu'une relation est un ensemble de couples : $\{\langle x; y\rangle \mid x \in \text{ source et } y \in \text{but et } x \Re y\}$

Exemple 4 :
La variable x désigne un nombre réel.
La variable y désigne un nombre réel.
La source et le but sont égaux à $\mathbb{R}$
Règle : $x^2 + y^2 = 4$ c.-à-d. :
$\boldsymbol{a} \Re \boldsymbol{b}$ si et seulement si $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = 4$.

Dans le cas où la source et le but sont égaux à $\mathbb{R}$.
On représente souvent la relation par un graphique.



Exercices :

III.1 Ecrivez les trois phrases qui définissent une relation.

III.2 Dans l'exemple 1, x désigne vous-même, indiquez trois images de x.

III.3 Dans l'exemple 3, écrivez toutes les images du nombre 60.

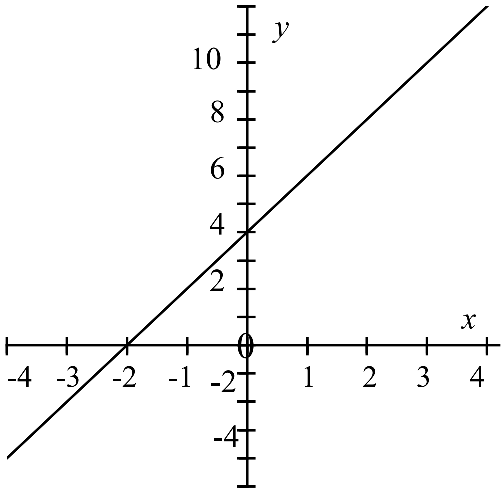
III.4 Dans l'exemple 3, écrivez cinq préimages du nombre 7.

III.5 Représentez graphiquement les relations $\Re$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

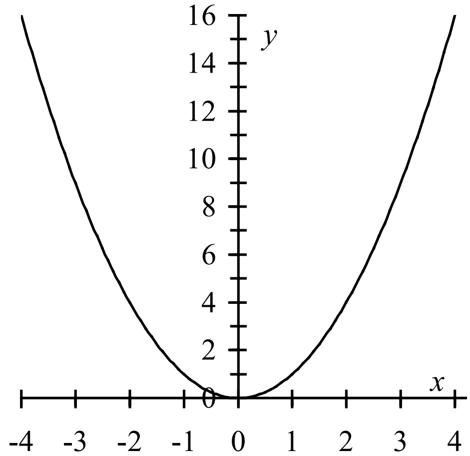
a) $x \Re y$: $y - 2x = 4$
b) $x \Re y$: $y = x^2$
c) $x \Re y$: $y^2 = 4x$
d) $x \Re y$: $x^2 = y^2$
e) $x \Re y$: $x^2 = 4 - y^2$
f) $x \Re y$: $x^2 + y^2 < 1$
g) $x \Re y$: $x^2 + y^2 \leq 1$
h) $x \Re y$: $y < 4 + 2x$
i) $x \Re y$: $x^2 + y^2 \geq 4$

Voici quatre réponses, pour vous aider. A vous de dire à quelle relation elles correspondent.

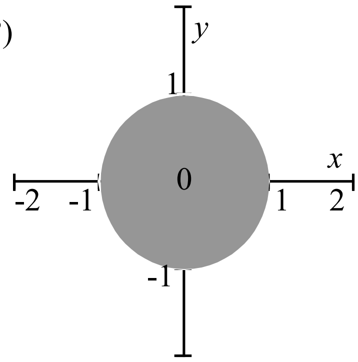
°)



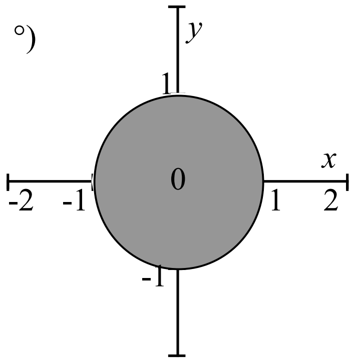
°)



°)



°)



IV. Les fonctions et applications

Un cas particulier de relation est la FONCTION.

Souvent, dans une relation, chaque élément de la source possède aucune ou une seule image.
Dans ce cas, on parle de FONCTION.

Exercice :
Déterminez, parmi les relations suivantes, lesquelles sont également des fonctions.

Exemple 1 :
Pour une personne donnée. x est son âge, y est sa taille. Si on fixe l'âge de la personne, cela définit sa taille. La source et le but égalent l'ensemble des nombres réels positifs.

Exemple 2 :
Pour un aliment donné. x est son poids, y est son prix. Si on fixe le poids de l'aliment, cela définit son prix. La source est l'ensemble des poids, le but l'ensemble des prix.

Exemple 3 :
$y = 4 \cdot x + 3$. La source et le but égalent $\mathbb{R}$.

Exemple 4 :
$y = (x + 1)^2$. La source et le but égalent $\mathbb{R}$.

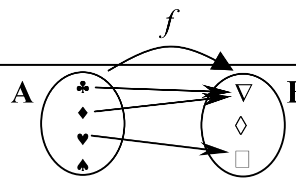
Exemple 5 :
$x^2 + y^2 = 4$. La source et le but égalent $\mathbb{R}$.

Exemple 6 :
$y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. La source et le but égalent $\mathbb{R}$.

Exemple 7 :
$y = \dfrac{x + 1}{x}$. La source et le but égalent $\mathbb{R}$.

Définition :

Une **fonction** est une relation qui fait correspondre au plus une image à chaque élément de l'ensemble de départ.



Donc une **fonction** est définie par :

1) Un ensemble A appelé **ensemble de départ**, ou **source**.
2) Un ensemble B appelé **ensemble d'arrivée**, ou **but**.
3) Une règle de correspondance, qui à chaque élément de l'ensemble de départ fait correspondre *zéro (aucun)* ou *un* élément de l'ensemble d'arrivée.

Si a chaque élément de l'ensemble de départ correspond exactement un élément de l'ensemble d'arrivée (jamais aucun), on parle **d'application** au lieu de fonction.

Les définitions données pour des relations restent valables :
Si ***a*** appartient à l'ensemble de départ et ***b*** est un élément de l'ensemble d'arrivée qui correspond à ***a***,
b est appelé l'**image de *a***. (***a*** possède au plus une image)
a est appelé une **préimage de *b***. (***b*** peut posséder zéro, une ou plusieurs préimages)

On désigne souvent une fonction ou une application par les lettres **f**, **g** ou **h**.

Si on désigne la fonction par **f** alors on note : **f(a)** l'image de ***a***.

On note une fonction : $\boxed{\begin{array}{l} f : A \to B \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array}}$ On parle d'une **fonction de A dans B**.

On peut toujours limiter l'ensemble de départ d'une fonction, pour obtenir une application.

Définition :

Le **domaine de définition** d'une fonction **f** noté **Dom(f)** est *la partie de l'ensemble de départ formée des éléments possédant une image*.

Exemples : *A compléter :*

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ La source est ....
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+5x+6}$ Le but est ....
Le domaine de définition est ....
L'image de 4 est ....
Une préimage de $\dfrac{1}{12}$ est .... (Il y en a une autre qui est -6)

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ La source est ....
$x \mapsto \sqrt{x}$ Le but est ....
Le domaine de définition est ....
L'image de 4 est ....
Une préimage de 6 est .... Y en a-t-il une autre ?

3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ La source est ....
$x \mapsto x^2$ Le but est ....
Le domaine de définition est ....

L'ensemble des préimage de 36 est ....

Exercices :

IV.1 Ecrivez les trois phrases qui définissent une fonction.

IV.2 Quelle est la différence entre une relation et une fonction ?

IV.3 Quelle est la différence entre une fonction et une application ?

IV.4 Considérons la fonction donnée dans le deuxième exemple de la page précédente.
Calculez les images de 64, 121, 144 et 200 par cette fonction.
Quelles sont les préimages de 7, 11 et 15 par cette fonction ?
Déterminez l'image de -4 par cette fonction.

IV.5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 6x + 8}$$

Quelles sont les images de 0, π, $\sqrt{2}$, 2 et 4 par cette fonction ?
Quel est le domaine de définition de cette fonction ?
Quelles sont les préimages respectives de $\frac{1}{3}$ et de $\frac{1}{8}$ par cette fonction ?

V. Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Le cas particulier de fonction ayant les nombres réels ou une partie des nombres réels comme source et comme but nous intéressera tout particulièrement : ce sont les "**fonctions réelles**".

Exemples de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto 2\cdot x$ à un nombre, f fait correspondre son double.

On note aussi : $y = 2 \cdot x$ qui lie les deux variables x et y.

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto \frac{2}{3}\cdot x+\frac{3}{7}$ à un nombre, f fait correspondre la somme de ses deux tiers et de trois septièmes.

On note aussi : $y=\frac{2}{3}\cdot x+\frac{3}{7}$ qui lie les deux variables x et y.

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto x^2+0,75\cdot x-\pi$ à un nombre, f fait correspondre le carré de ce nombre plus 0,75 fois ce nombre moins le nombre π.

On note aussi : $y=x^2+0,75\cdot x-\pi$ qui lie les deux variables x et y.

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto \frac{1}{x}$ à un nombre, f fait correspondre son inverse.

On note aussi : $y=\frac{1}{x}$ qui lie les deux variables x et y.

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto \sqrt{x}$ à un nombre, f fait correspondre sa racine carrée.

On note aussi : $y=\sqrt{x}$ qui lie les deux variables x et y.

Exercice : Déterminez le domaine de définition de chacune des fonctions précédentes.

Une calculatrice répond généralement par "DOMAIN Error" ou "DIVIDE BY 0 Error" quand elle ne sait pas évaluer l'image d'un nombre par une fonction, c'est à dire quand le nombre de départ est hors domaine de définition.

A une fonction, on peut faire correspondre un **ensemble de couples**, donc un **graphique** :

Exercice :

Identifiez le graphique qui représente chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2 \cdot x$

2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

3) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 + 0,75 \cdot x - \pi$

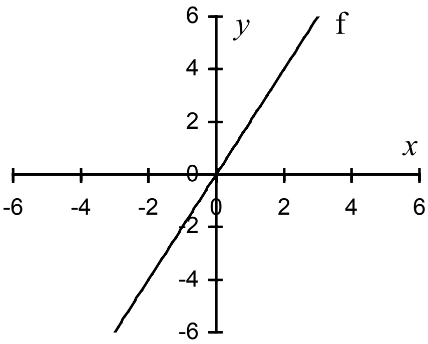
4) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{2}{3} \cdot x + \dfrac{3}{7}$

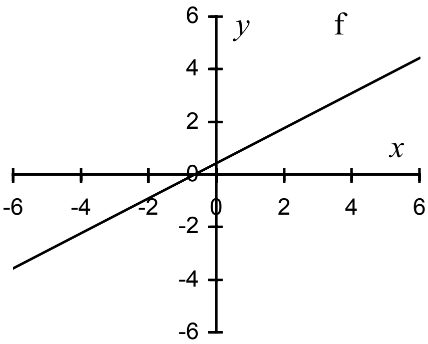
5) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$

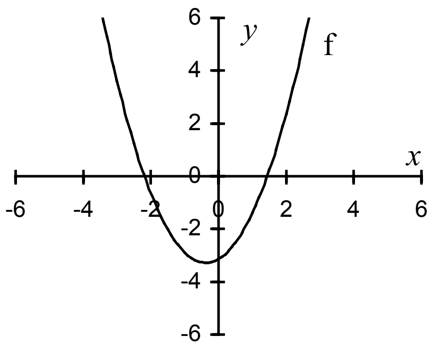
Graphique a)



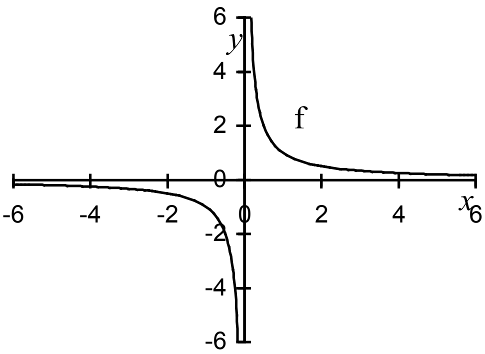
Graphique b)



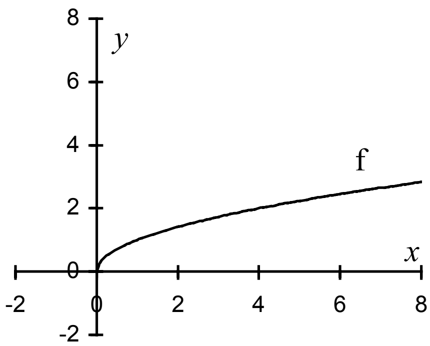
Graphique c)



Graphique d)



Graphique e)



Définitions :

L'axe horizontal s'appelle l'axe des **abscisses**. Il représente souvent la variable ***x***, ou ***t*** pour les fonctions du temps.

L'axe vertical s'appelle l'axe des **ordonnées**. Il représente souvent la variable ***y***.

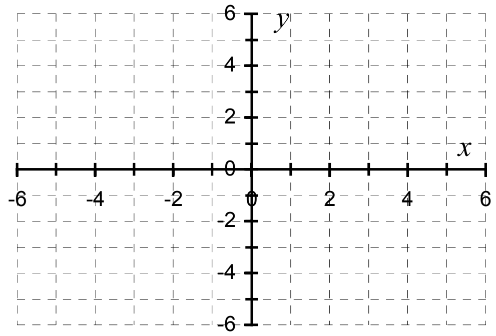
Voici quelques fonctions particulières de ℝ dans ℝ

1) **Les fonctions constantes :**

Soit ***c*** un nombre réel. Par exemple, ***c*** peut valoir 0 ou 1 ou $-2{,}75$ ou π.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto c$ A un nombre, f fait correspondre le nombre ***c***.



Dessinez l'exemple de graphique avec ***c*** = 3,14

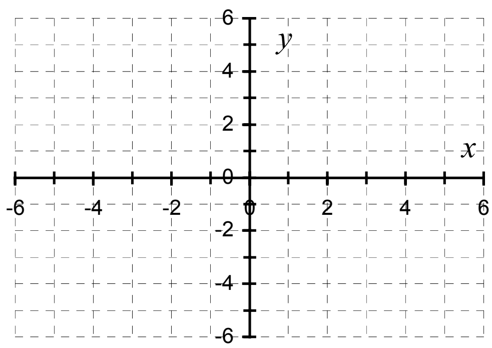
2) **Les fonctions linéaires :**

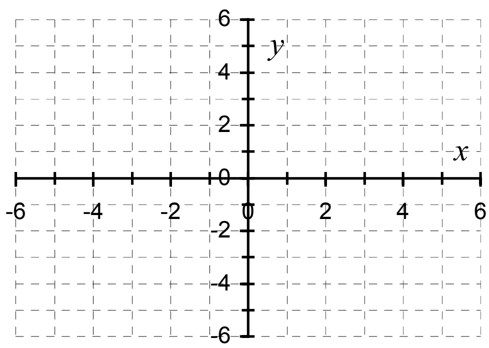
Soit ***a*** un nombre réel. Par exemple, ***a*** peut valoir 0 ou 1 ou -1 ou $-\sqrt{2}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto a \cdot x$ A un nombre, f fait correspondre ***a*** fois ce nombre.

Exemples de graphique avec ***a*** = 0,8 et avec ***a*** = –0,8. A compléter.





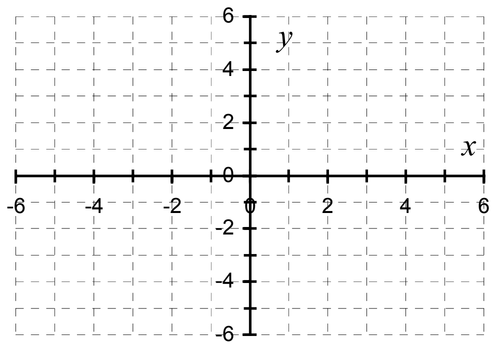
3) **Les fonctions affines :**

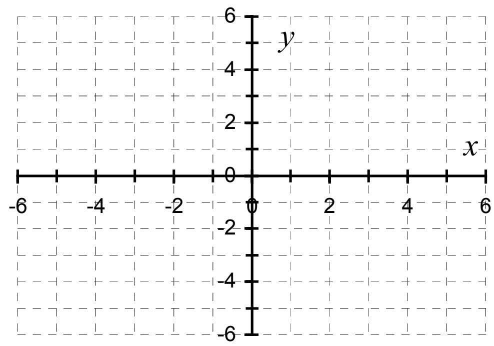
Soient ***a*** et ***b*** deux nombres réels.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto a \cdot x + b$ A un nombre, f fait correspondre ***a*** fois ce nombre plus ***b***.

Exemples de graphique avec ***a*** = 0,6 ***b*** = 0,5 et avec ***a*** = –0,6 ***b*** = 0,5. A compléter.



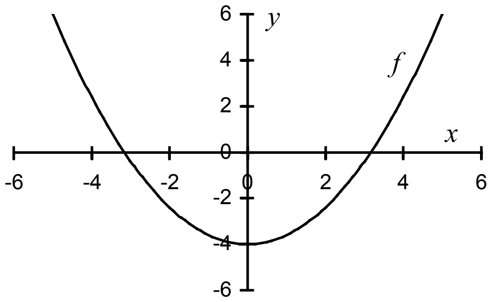


4) **Les fonctions paraboliques :**
Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ trois nombres réels.

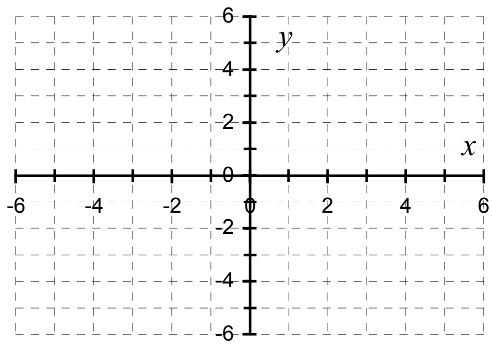
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x \mapsto a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

Graphique avec $\boldsymbol{a} = 0{,}4$ $\boldsymbol{b} = 0$ $\boldsymbol{c} = -4$



Graphique avec $\boldsymbol{a} = -0{,}4$ $\boldsymbol{b} = 0$ $\boldsymbol{c} = 6$
A compléter.

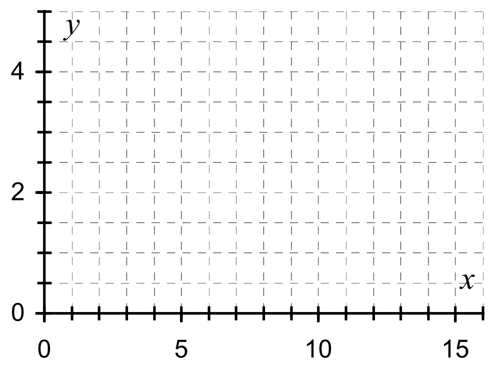


5) **La fonction racine carrée :**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$

Dom(f) = $\mathbb{R}_+$ car les nombres négatifs n'ont pas de racines carrées dans $\mathbb{R}$.
Dessinez le graphique de cette fonction.

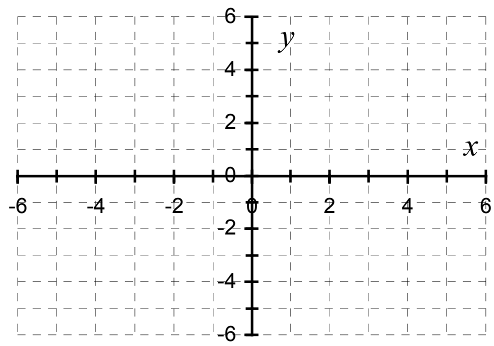


6) **La fonction inverse :**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Dessinez le graphique de cette fonction.
Dom(f) = $\mathbb{R}^*$ car on ne peut pas diviser par 0.



Remarques :

1) Une fonction n'est pas forcément définie à partir d'une formule ou d'une expression.
Certaines fonctions sont définies dans des tableaux de deux colonnes (x et $f(x)$).
Par exemple, le graphique représentant l'évolution annuelle du bénéfice d'une société est défini à partir de quelques points $\langle$mois ; bénéfice$\rangle$ que l'on relie par des segments de droite.

2) Une fonction peut être définie de manière plus compliquée que dans les exemples précédents.

Exemples : $f(x) = \begin{cases} x & si\ \ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x > 0 \\ 0 & si\ \ x = 0 \\ -1 & si\ \ x < 0 \end{cases}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On aime généralement déterminer des particularités de la fonction.

1) Le domaine de définition de la fonction : **Dom(f)**
On a déjà défini au chapitre IV le domaine de définition d'une fonction.
Dans le cas de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on peut définir le **domaine de définition** comme étant *le plus grand ensemble de nombres réels pour lequel la définition de la fonction a un sens*.

En particulier, il faut exclure du domaine de définition tout nombre faisant :
- Apparaître une division par zéro.
- Apparaître une racine carrée d'un nombre négatif.
- Apparaître une racine $4^{ème}$, $6^{ème}$, $8^{ème}$, etc. d'un nombre négatif.

En deuxième année, vous verrez d'autres raisons d'exclure des valeurs du domaine de définition.

2) L'ordonnée à l'origine de la fonction : ***f*(0)**
C'est tout simplement l'image de 0 par la fonction *f*.
Sur le graphique, elle correspond à l'intersection de la courbe avec l'**axe des ordonnées**.

Une fonction peut-elle avoir plusieurs ordonnées à l'origine ?

3) Les **zéros** ou **les racines** (ou le noyau) de la fonction : $\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = 0\}$
C'est l'ensemble des préimages de zéro par la fonction *f*.
Sur le graphique, les zéros correspondent aux intersections de la courbe avec l'**axe des abscisses**.

Une fonction peut-elle avoir plusieurs zéros ?

Lors des études de fonction, de nombreuses autres caractéristiques sont étudiées, telles que la périodicité, la parité, la croissance, les extremums locaux, le comportement "proche de l'infini", c.-à-d. pour de très grandes valeurs positives et négatives et le comportement aux bords du domaine de définition. Ces notions seront développées en $2^{ème}$ ou $3^{ème}$.

Exercices :

V.1 a) Ecrivez l'image de 0 par chacune des cinq fonctions données en page 12.
b) Ecrivez l'ordonnée à l'origine de chacune des cinq fonctions données en page 12.

V.2 Quel est l'axe des abscisses et quel est l'axe des ordonnées dans un repère ?

V.3 Donnez un exemple de fonction constante, un exemple de fonction linéaire, un exemple de fonction affine et un exemple de fonction parabolique. Dans chaque cas, représentez graphiquement la fonction correspondante.

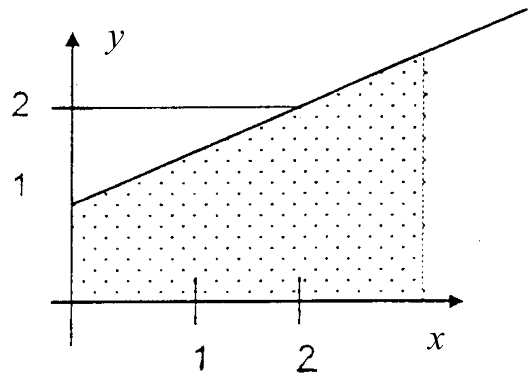
V.4 Représentez graphiquement les deux fonctions f et g définies au deuxième point de la remarque au bas de la page 15.

V.5 Sachant que la somme de deux nombres vaut 9, exprimez l'un des nombres en fonction de l'autre. Explicitez les ensembles de départ et d'arrivée.

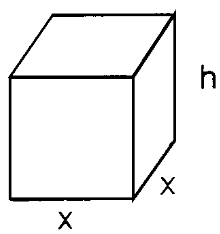
V.6 Exprimez la longueur de la diagonale d'un carré en fonction de la longueur d'un côté. Explicitez les ensembles de départ et d'arrivée.

V.7 Exprimez la fonction *Aire d'un triangle équilatéral* en fonction de la longueur d'un côté. Explicitez les ensembles de départ et d'arrivée.

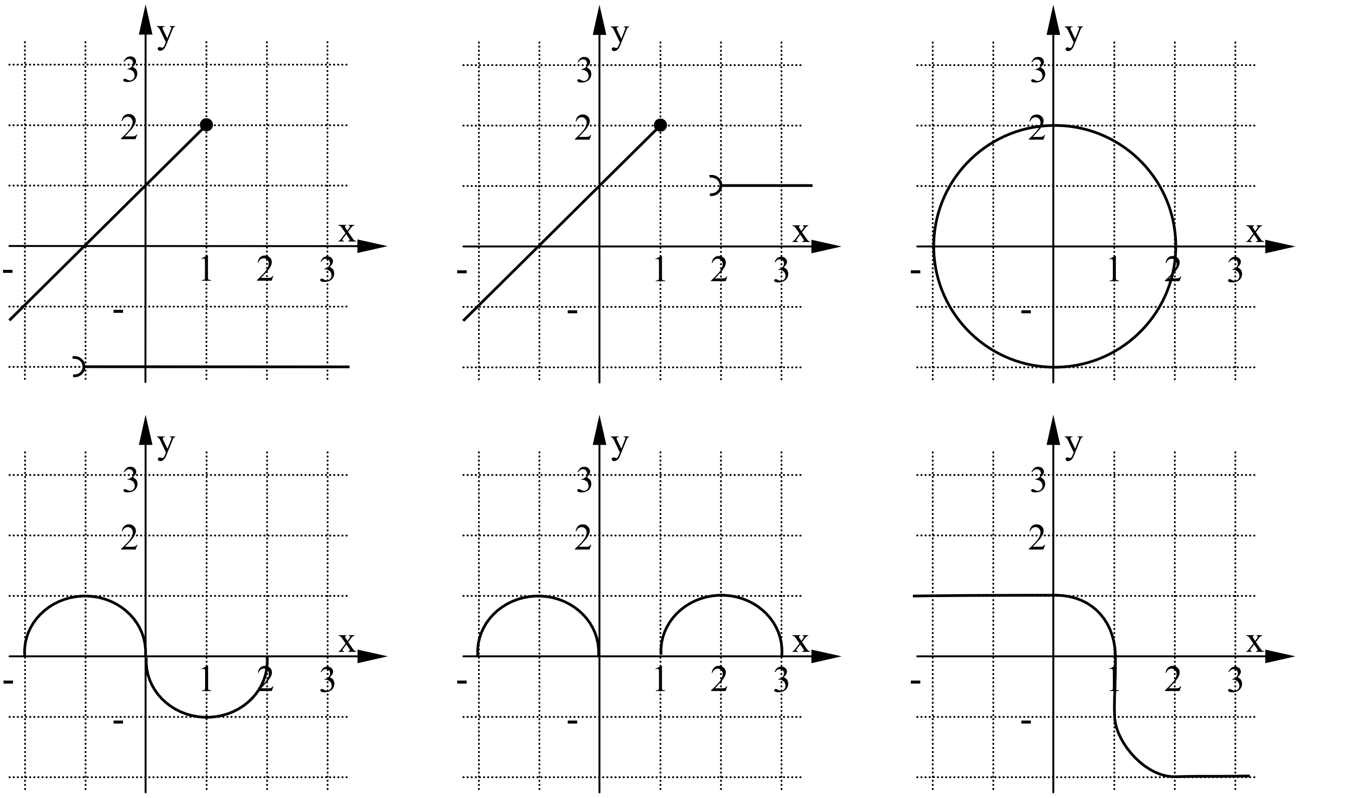
V.8 Quelle est l'équation de la fonction qui correspond à la droite du graphique ci-dessous ? Exprimez en fonction de la position du point x ($x > 0$), la fonction *Aire du trapèze hachuré*. Explicitez les ensembles de départ et d'arrivée.



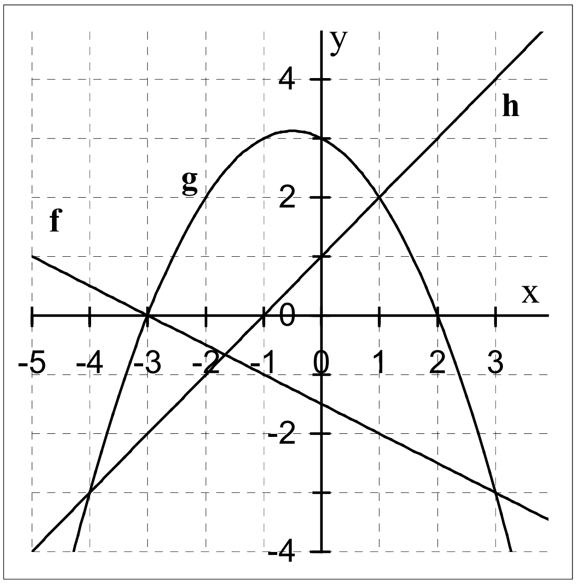
V.9 Une boîte sans couvercle de contenance 500 cm^3 a la forme du parallélépipède rectangle ci-contre (x et h sont exprimés en centimètres).
Exprimez en fonction de x la hauteur h.
Exprimez en fonction de x l'aire A(x) des parois de la boîte (fond plus parois latérales).
Explicitez les ensembles de départ et d'arrivée.



V.10 Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont représentatives d'une fonction réelle ? Justifiez !



V.11 Voici les représentations graphiques de trois fonctions **f**, **g**, **h** de ℝ dans ℝ.



a) Calcul **d'images** :
Déterminez à partir de ces graphes :

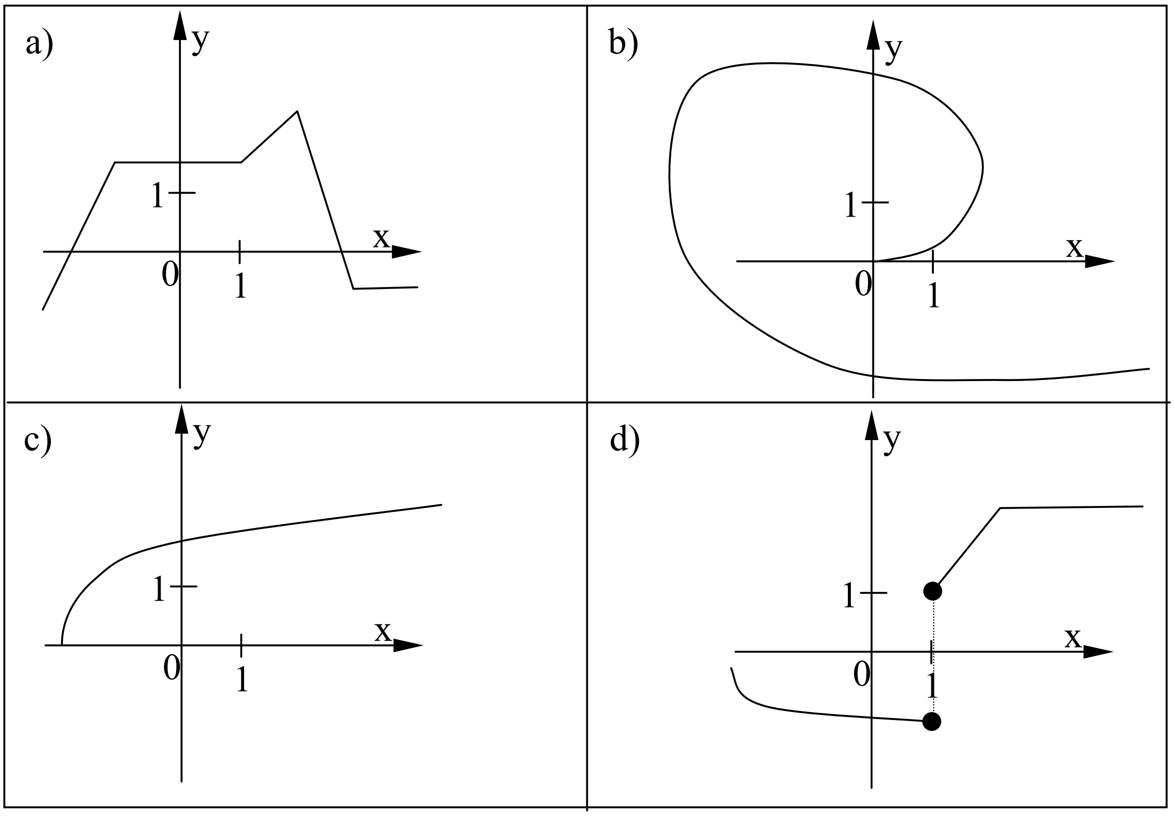
f(1)	f(−2)	f(0)
g(1)	g(−2)	g(0)
h(1)	h(−2)	h(0)

b) "Le point <−49 ; −48> appartient à la courbe représentative de **h**."
Est-ce VRAI ou FAUX ?

c) Calcul de **préimages** :
Complétez :
Si f(x) = −3, alors x =
Si g(x) = 3, alors x =
Si h(x) = 0, alors x =
Si f(x) = g(2), alors x =
Si g(x) = h(x), alors x =
Si g(x) = g(x+1), alors x =
Si f(x) = h(−3), alors x =
Si g(x) > f(x), alors x =
Si f(x) = h(x), alors x =

d) Quel est l'ensemble des **zéros** de f ? de g ? de h?
Sur quel ensemble **f** est-elle positive ou nulle ?
Sur quel ensemble **g** est-elle négative ou nulle ?
Sur quel ensemble **h** est-elle strictement positive ?

V.12 Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont représentatives d'une fonction réelle ?



V.13

a) Le graphe ci-dessous est celui d'une fonction. Imaginez un phénomène que cette fonction pourrait décrire.

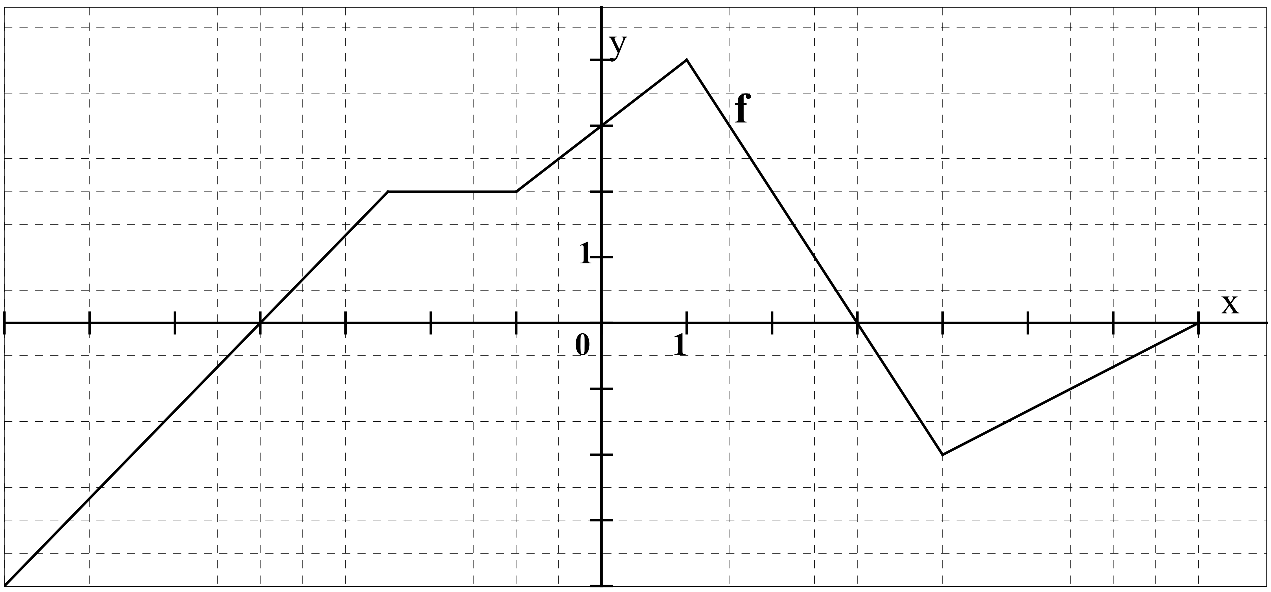
b) D'après la représentation graphique de **f**, déterminez

* Les images de -6, -4, -2, 0, $+2$, $+4$ et $+5.5$ par la fonction **f**.

* Les préimages de -2, 0, $+2$, $+3$, $+4$ et $+4.5$ par la fonction **f**.

* Les zéros de **f** et son ordonnée à l'origine.

Donnez des réponses soigneusement rédigées.



V.14 Représentez graphiquement une fonction f ayant simultanément toutes les propriétés suivantes :

* l'image de 1 vaut 2
* $f(-2) = 1$
* $f(-3) = 0$
* l'image de 6 vaut 0.
* 3 ne possède qu'une seule préimage, qui est 5.
* -1 possède 3 préimages qui sont -5, 0 et 7.

V.15 Donnez une expression algébrique $f(x)$ de la fonction définie de la manière suivante.

a) f fait correspondre à chaque nombre réel x l'opposé des deux tiers de son carré.

b) A une température x exprimée en degré Celsius, correspond cette température en degrés Fahrenheit. C'est une fonction affine d'ordonnée à l'origine égale à 32 et de pente 1,8.

c) A la longueur x d'un côté d'un rectangle d'aire égale à 10 [m^2], correspond la largeur de ce même rectangle.

V.16 Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle a un graphe passant par le point $(2\ ;\ -3)$?

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $g(x) = -3x + 2$

c) $h(x) = 4\cdot(x + 2) + 3$

d) $j(x) = 2\cdot(x - 1) - 5$

V.17 Calculez l'image de -2; 0 et 8 pour les fonctions suivantes.

a) $f(x) = -3x + 24$

b) $g(x) = x^2 - 4$

c) $h(x) = \sqrt{x+2}$

d) $j(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

V.18 Calculez la ou les préimage(s) éventuelle(s) de -1 ; 0 et $+2$ pour les fonctions suivantes.

a) $f(x) = -8x + 7$

b) $g(x) = 2x^2$

c) $h(x) = \sqrt[3]{x}$

d) $j(x) = 2$

V.19 Déterminez le domaine de définition Dom(f), l'ensemble des zéros et l'ordonnée à l'origine des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = x^2 - 9$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

e) $f(x) = \sqrt{x+5}$

f) $f(x) = \sqrt{7-2\cdot x}$

g) $f(x) = \dfrac{5}{x+3}$

h) $f(x) = \dfrac{5}{x^2+x-12}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

j) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

k) $f(x) = \sqrt{x^2}$

l) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$

m) $f(x) = \sqrt{(x-4)\cdot(5-x)}$

VI. Les applications affines

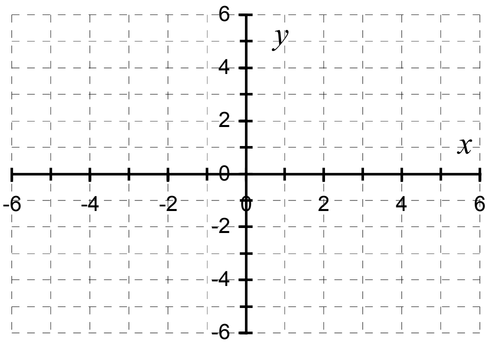
Dans l'exemple 3 du chapitre précédent, nous avons vu un exemple important de fonction. On les appelle les **applications affines** ou **fonctions affines**.

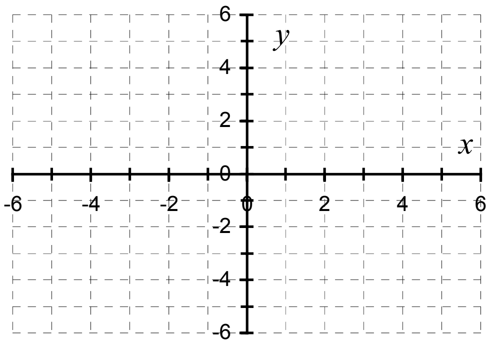
<u>Définition :</u>
Une **application affine** est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme suivante :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a \cdot x + b \qquad \text{où } \boldsymbol{a} \text{ et } \boldsymbol{b} \text{ sont deux nombres donnés.}$$

Avec la notation des variables, on écrit : $\boxed{y = a \cdot x + b}$

Exemple de graphique avec $\boldsymbol{a} = 0{,}5$ $\boldsymbol{b} = 2$ et avec $\boldsymbol{a} = -0{,}5$ $\boldsymbol{b} = 1$. A compléter.





Les deux nombres $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ déterminent entièrement une application affine.

<u>Définition :</u> Le nombre $\boldsymbol{a}$ s'appelle la **pente** de la droite.
<u>Remarque :</u> Le nombre $\boldsymbol{b}$ est l'**ordonnée à l'origine** de la fonction. $\boxed{\boldsymbol{b} = f(0)}$.
Si on prend deux points quelconques sur la droite du graphique : $(x_1 ; y_1)$ et $(x_2 ; y_2)$ alors

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Cela se vérifie facilement. $y_1 = \boldsymbol{a} \cdot x_1 + \boldsymbol{b}$ et $y_2 = \boldsymbol{a} \cdot x_2 + \boldsymbol{b}$, donc

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \overset{\text{à compléter}}{=}$$

<u>Exemple :</u>
Dans le premier graphique : $f(x) = 0{,}5 \cdot x + 2$ ou autrement écrit : $y = 0{,}5 \cdot x + 2$
Dans cet exemple, $\boldsymbol{a} = 0{,}5$ et $\boldsymbol{b} = 2$.

Calculez les images de : $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.

$y_1 =$

et $y_2 =$

Vérifiez que la pente $\boldsymbol{a}$ s'obtient par :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Remarquons que les **fonctions constantes** et les **fonctions linéaires** sont des cas particuliers des applications affines (cas $\boldsymbol{a} = 0$ et cas $\boldsymbol{b} = 0$).

Exercices :

VI.1 A chaque fois, on donne l'équation d'une droite. Pour chaque droite, dites quelle est la pente, l'ordonnée à l'origine et les zéros de l'application affine correspondante, si possible.
Donnez le graphe de chaque droite sur le même repère;
l'axe des abscisses variant de -5 à 5, celui des ordonnées de -5 à 7; 1 cm = une unité.

a) $d_1 : y = -\frac{5}{6}x + 4$ d) $d_4 : y = \frac{3}{4}x$ g) Que vaut $d_1 \cap d_2$?

b) $d_2(x) = 4x - 2$ e) $d_5 : y = 6$

c) $d_3 : x \mapsto -x + 1$ f) $d_6 : x = -3$

VI.2 On donne à chaque fois la pente de la droite, ainsi qu'un point par lequel elle devra passer. Construisez le graphe de chacune de ces droites, en donnant à chaque fois l'équation exacte.

a) Droite d_1 de pente -2 passant par $(-4 ; 1)$

b) Droite d_2 de pente $\frac{3}{4}$ passant par $(2 ; -1)$

c) Droite d_3 parallèle à d_2 passant par $(-3 ; 4)$

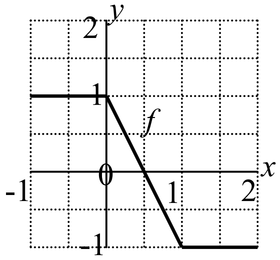
VI.3 On donne deux points par lesquels doit passer une droite. Donnez le graphe et l'équation de chaque droite.
La droite d_1 passe par les points $(-2 ; 4)$ et $(1 ; -3)$
La droite d_2 passe par les points $(-3 ; -2)$ et $(5 ; -2)$
La droite d_3 passe par les points $(-1 ; -1{,}5)$ et $(-1 ; 2{,}5)$
La droite d_4 passe par les points $(5 ; 4)$ et $(-4 ; 1)$

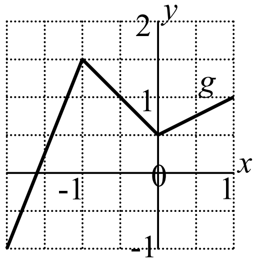
VI.4 Soit D la droite d'équation $3x + 4y = 5$.

1) Quelle est la pente de D ?
2) Quelle est son ordonnée à l'origine ?
3) Est-ce que le point $(15 ; -10) \in$ D ? Justifiez !
4) Donnez trois points $\in$ D.
5) Donnez trois points $\notin$ D.
6) Quels sont les zéros de D ?

VI.5 a) Comment trouver la pente d'une droite $D_\perp$ perpendiculaire à D ? Donnez un exemple.
b) Soit $D = \{ (x; y)$ tels que $y = 1{,}5x + 2 \}$
Donnez l'équation de la droite $D_\perp$, perpendiculaire à D et passant par le point $(6 ; -1)$.

VI.6 Les fonctions f et g sont définies par les représentations graphiques suivantes :





Pour chacune de ces fonctions, donnez l'expression algébrique qui la définit.

VII. Les fonctions paraboliques

Dans l'exemple 4 du chapitre V, nous avons vu un exemple important de fonction. On les appelle les **applications paraboliques** ou **fonctions paraboliques**.

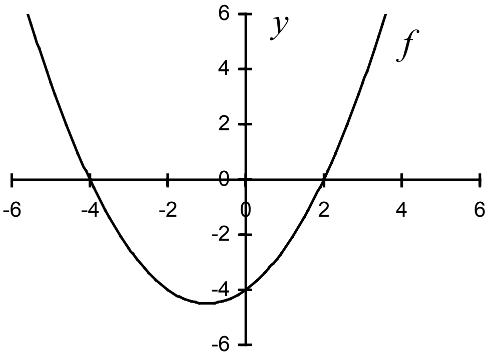
Définition :
Une **fonction parabolique** est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme suivante :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

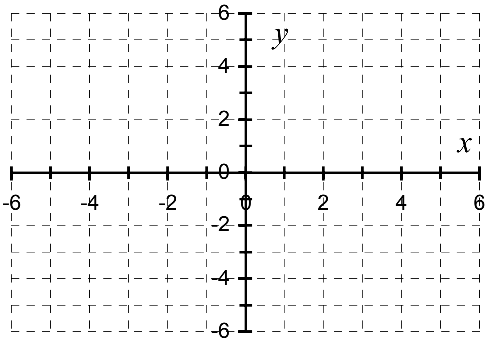
$x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ où $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont trois nombres donnés, $\boldsymbol{a} \neq 0$

Avec la notation des variables, on écrit : $\boxed{y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$

Exemple de graphique avec $\boldsymbol{a} = 0{,}5$; $\boldsymbol{b} = 1$; $\boldsymbol{c} = -4$

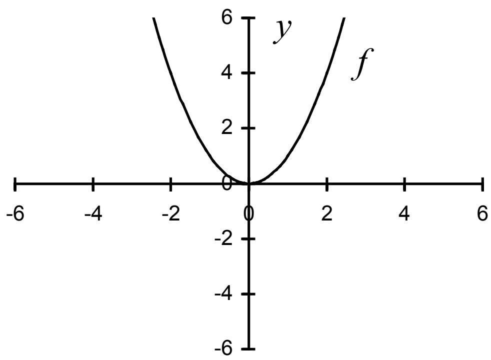


Graphique à compléter : $\boldsymbol{a} = -0{,}5$; $\boldsymbol{b} = 0$; $\boldsymbol{c} = 5$.



Les trois nombres $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ déterminent entièrement une fonction parabolique.

Comment le graphique est-il influencé par ces nombres ?
Partons d'un cas simple : $\boldsymbol{a} = 1$; $\boldsymbol{b} = 0$; $\boldsymbol{c} = 0$



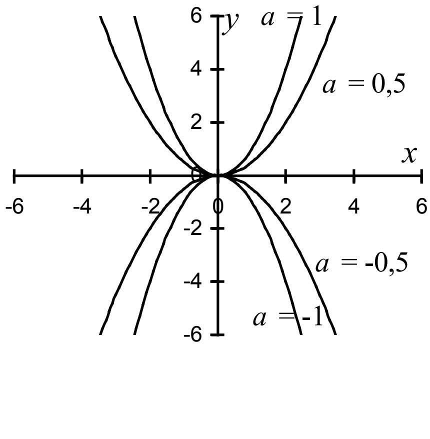
Influence du nombre $\boldsymbol{c}$:
La valeur du nombre qui ne multiplie pas la variable x (celui qu'on a appelé "$\boldsymbol{c}$" ici), ne fait que de décaler la courbe du graphique vers le haut ou vers le bas.

Si on diminue la valeur de $\boldsymbol{c}$ de 1, la courbe descend de 1.
Si on augmente la valeur de $\boldsymbol{c}$ de 1, la courbe monte de 1.
Ce nombre $\boldsymbol{c}$ est **l'ordonnée à l'origine**.

Influence du nombre $\boldsymbol{a}$:
La valeur du nombre qui multiplie la variable x mise au carré (celui qu'on a appelé "$\boldsymbol{a}$" ici), ouvre ou ferme la parabole, ou la renverse. Voici 4 courbes avec $\boldsymbol{a} = -1$; $\boldsymbol{a} = -0{,}5$; $\boldsymbol{a} = 0{,}5$; $\boldsymbol{a} = 1$. ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = 0$)

Si le nombre $\boldsymbol{a}$ est positif, alors la courbe fait un sourire.
Dans ce cas on dit que la parabole est **convexe**.

Si le nombre $\boldsymbol{a}$ est négatif, alors la courbe est triste.
Dans ce cas on dit que la parabole est **concave**.



Influence du nombre $\boldsymbol{b}$:
L'influence du nombre qui multiplie la variable x (celui qu'on a appelé "$\boldsymbol{b}$" ici), est plus compliquée et ne sera pas vue directement, mais indirectement dans ce qui suit.

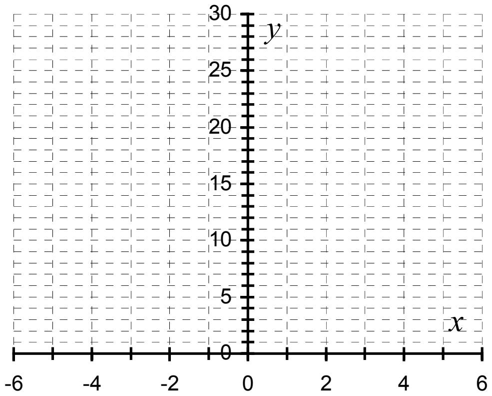
Deux questions relatives aux fonctions paraboliques.

Première question : Quels sont les **zéros** de cette fonction ?

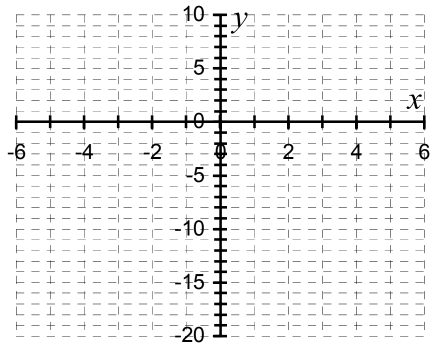
Deuxième question : La fonction possède-t-elle une valeur minimale ou une valeur maximale ?
Si oui, laquelle et pour quelle valeur de x ?

Etudiez ces deux questions sur des exemples :
Dessinez les graphiques, sont-ils concaves ou convexes,
quels sont les Zéros, les valeurs minimales ou maximales ?

Parabole 1 :
$f(x) = x^2 + 2x + 7$

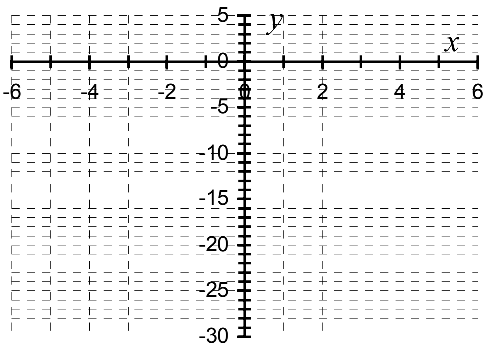


Parabole 2 :
$f(x) = x^2 + 2x - 15$



<u>Parabole 3 :</u>

$f(x) = -x^2 + 4x - 1$



<u>Exemple :</u>

Cet exemple semble plus compliqué que les précédents, mais il se résout comme les autres.

$f(x) = \mathbf{3}x^2 + \mathbf{9}x + \mathbf{5}$ Cette fonction est définie par les trois nombres : $\boldsymbol{a} = \mathbf{3}$; $\boldsymbol{b} = \mathbf{9}$; $\boldsymbol{c} = \mathbf{5}$.

Puisque $\boldsymbol{a}$ est <u>positif</u>, elle est **convexe** elle sourit.

Donc elle possède une <u>valeur minimale</u>.

Pour déterminer cette valeur minimale, écrivons la fonction différemment :

Volontairement les trois nombres **3**, **9** et **5** ont été gardés sans effectuer d'opérations avec eux.

$$f(x) = \mathbf{3}x^2 + \mathbf{9}x + \mathbf{5} = \mathbf{3}\cdot\left[x^2 + \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{3}}x + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right] = \mathbf{3}\cdot\left[\underbrace{\left(x^2 + 2\cdot\frac{\mathbf{9}}{2\cdot\mathbf{3}}x + \left(\frac{\mathbf{9}}{2\cdot\mathbf{3}}\right)^2\right)}_{\text{On peut utiliser une identité remarquable}} - \left(\frac{\mathbf{9}}{2\cdot\mathbf{3}}\right)^2 + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right] =$$

$$= \mathbf{3}\cdot\left[\left(x + \frac{\mathbf{9}}{2\cdot\mathbf{3}}\right)^2 - \frac{\mathbf{9}^2 - 4\cdot\mathbf{3}\cdot\mathbf{5}}{4\cdot\mathbf{3}^2}\right] = \mathbf{3}\cdot\left(x + \frac{\mathbf{9}}{2\cdot\mathbf{3}}\right)^2 - \frac{\mathbf{9}^2 - 4\cdot\mathbf{3}\cdot\mathbf{5}}{4\cdot\mathbf{3}} = \mathbf{3}\cdot\left(x + \frac{\mathbf{9}}{2\cdot\mathbf{3}}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\cdot\mathbf{3}}$$

où on a défini **delta** Δ par $\boxed{\Delta = \mathbf{9}^2 - 4\cdot\mathbf{3}\cdot\mathbf{5}}$. Delta Δ s'appelle le **discriminant**.

Puisque $\mathbf{3}\cdot\left(x + \frac{\mathbf{9}}{2\cdot\mathbf{3}}\right)^2$ est toujours positive ou nulle, la valeur minimale de la fonction est de $-\frac{\Delta}{4\cdot\mathbf{3}}$

qui vaut $-\frac{\mathbf{9}^2 - 4\cdot\mathbf{3}\cdot\mathbf{5}}{4\cdot\mathbf{3}} = -\frac{21}{12} = -\frac{7}{4}$. Elle est obtenue quand $x = -\frac{\mathbf{9}}{2\cdot\mathbf{3}} = -\frac{3}{2}$.

De nouveau, pour savoir quand elle s'annule, la réponse est plus facile si on cherche à résoudre :

$\mathbf{3}\cdot\left(x + \frac{\mathbf{9}}{2\cdot\mathbf{3}}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\cdot\mathbf{3}} = 0$ De cette équation, on en déduit que :

$\left(x + \frac{\mathbf{9}}{2\cdot\mathbf{3}}\right)^2 = \frac{\Delta}{2^2\cdot\mathbf{3}^2}$ donc $x + \frac{\mathbf{9}}{2\cdot\mathbf{3}} = \sqrt{\frac{\Delta}{2^2\cdot\mathbf{3}^2}}$ ou $x + \frac{\mathbf{9}}{2\cdot\mathbf{3}} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\cdot\mathbf{3}}$

Donc les deux solutions sont : Zéros (f) = $\left\{\frac{\mathbf{-9} + \sqrt{\Delta}}{2\cdot\mathbf{3}}\ ;\ \frac{\mathbf{-9} - \sqrt{\Delta}}{2\cdot\mathbf{3}}\right\}$

Répondons maintenant de manière générale aux deux questions.
On étudie la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ trois nombres quelconques, $\boldsymbol{a} \neq 0$.

Quand a-t-elle un minimum ? Quand a-t-elle un maximum ? En quelle valeur de x et de y ?
Quand s'annule-t-elle et en quelle(s) valeur(s) ?

En remplaçant dans l'exemple : **3** par ***a***; **9** par **b**; **5** par **c**, et en faisant exactement le même développement, on arrive aux conclusions suivantes :

Voici le résumé de ce dont vous devez vous souvenir !

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

On définit le **discriminant** que l'on note par la lettre grecque **delta** Δ. $\boxed{\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$

1) Si le discriminant est négatif $\Delta < 0$, la fonction ne s'annule jamais.

On a : $\boxed{\text{Zéros}(f) = \varnothing}$

2) Si le discriminant est nul $\Delta = 0$, la fonction s'annule pour une seule valeur de x qui est :

$\boxed{x_{\text{zéro}} = -\dfrac{b}{2 \cdot a}}$

On a : $\boxed{\text{Zéros}(f) = \left\{ \dfrac{-b}{2 \cdot a} \right\}}$

Dans ce cas, la fonction peut s'écrire sous la forme factorisée : $\boxed{f(x) = a \cdot \left(x + \dfrac{b}{2 \cdot a} \right)^2}$

3) Si le discriminant est positif $\Delta > 0$, la fonction s'annule pour deux valeurs de x qui sont :

$\boxed{x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \quad \text{et} \quad x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}}$ C'est la formule de **Viète**.

On a : $\boxed{\text{Zéros}(f) = \left\{ \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \; ; \; \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \right\}}$

Dans ce cas, la fonction peut s'écrire sous la forme factorisée : $\boxed{f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$

4) Dans tous les cas :
Si le nombre $\boldsymbol{a}$ est positif, alors la courbe fait un sourire
Dans ce cas on dit que la parabole est **convexe** et elle possède un minimum.

Si le nombre $\boldsymbol{a}$ est négatif, alors la courbe est triste
Dans ce cas on dit que la parabole est **concave** et elle possède un maximum.

Dans les deux cas, le minimum ou maximum se trouve en : $\boxed{x_{\text{m}} = -\dfrac{b}{2 \cdot a} \; ; \; y_{\text{m}} = -\dfrac{\Delta}{4 \cdot a}}$

La fonction peut toujours s'écrire sous la forme : $\boxed{f(x) = a \cdot (x - x_m)^2 + y_m}$

Exercices :

VII.1 Quelle fonction obtient-on si le nombre a vaut zéro dans la fonction définie par :
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$?

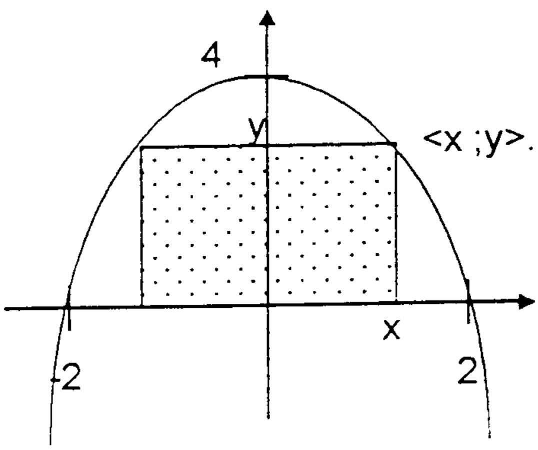
VII.2 Sur un même graphique :
a) dessinez le graphe d'une fonction parabolique concave, n'ayant pas de zéros.
b) dessinez le graphe d'une fonction parabolique convexe, ayant deux zéros.
c) dessinez le graphe d'une fonction parabolique convexe, ayant un seul zéro.

VII.3 a) Quels sont les zéros de la fonction parabolique $y = 3 \cdot (x+4) \cdot (x-3)$?
b) Développez l'expression : $3 \cdot (x+4) \cdot (x-3)$.
c) Quels sont les zéros de la fonction parabolique $y = 3x^2 + 3x - 36$?
d) Si x_1 et x_2 sont les deux zéros d'une fonction parabolique, développez $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, en remplaçant x_1 et x_2 par les expressions de la formule de Viète.
Comparez le résultat avec : $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

VII.4 Pour chaque cas ci-dessous, trouvez une fonction parabolique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait :
a) $f(-2) = 0$ $f(2) = 0$ $f(0) = -12$ (Les zéros de f sont -2 et 2)
b) $f(\ \ 1) = 0$ $f(3) = 0$ $f(0) = \ \ 6$
c) $f(\ \ 1) = 5$ $f(3) = 5$ $f(0) = \ \ 11$ (cherchez le lien avec le point b)
d) $f(-1) = 7$ $f(3) = 7$ $f(1) = \ \ 8$
e) -5 est un zéro de la fonction et elle possède un minimum en $x = -2,\ y = -18$
f) L'ordonnée à l'origine de la fonction égale 4 et elle possède un minimum en $x = 2,\ y = -8$

VII.5 Déterminez les zéros et les minimums ou maximums des fonctions paraboliques suivantes :
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 2x + 1$
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 2x - 3$
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 2x - 4$
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$
e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{9}$
g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 9x^2 - 12x + 5$

VII.6 On inscrit un rectangle dans un segment de parabole situé au-dessus de l'axe des abscisses.
a) Déterminez l'équation de cette parabole.
b) Exprimez l'aire A(x) de ce rectangle en fonction de x

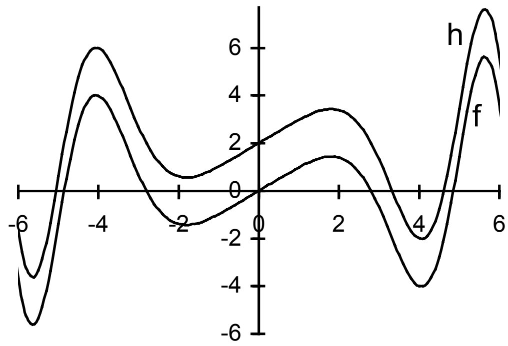


VIII. Opérations sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

VIII.1 Opérations sur une seule fonction

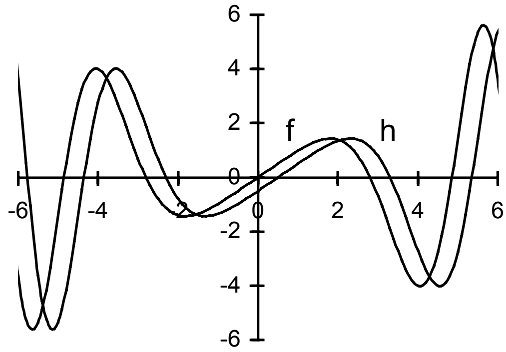
Supposons avoir une fonction : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
A partir de cette fonction, on peut en définir de nouvelles :

1) **La translation verticale**
Soit d un nombre réel.
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)+d$



Sur le graphique, cela correspond à décaler la courbe verticalement d'une distance d.
Sur l'exemple du graphique, $d = 2$.
Une valeur positive de d décale la courbe vers le haut.

2) **La translation horizontale**
Soit delta δ un nombre réel.
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x-\delta)$



Sur le graphique, cela correspond à décaler la courbe horizontalement d'une distance δ.
Sur l'exemple du graphique, $\delta = 0{,}5$.

Remarque : On met $f(x-\delta)$ "*x moins* delta" pour que un delta positif décale la courbe sur la droite. Faites des exemples pour vous en convaincre.

On peut combiner les deux translations vues ci-dessus.

On peut définir d'autres fonctions en multipliant la fonction par un nombre, en prenant le carré de la fonction, en prenant la racine carrée de la fonction etc.

Nous verrons dans la section suivante que toutes ces opérations correspondent à composer deux fonctions ensemble. Y compris les opérations de translations verticale et horizontale.

VIII.2 Opérations sur deux fonctions

Supposons avoir deux fonctions : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
A partir de ces deux fonctions, on peut en définir de nouvelles :

1) **La somme de deux fonctions**
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)+g(x)$ A un nombre, on fait correspondre la somme des images par f et par g.

On note cette fonction $\boxed{f+g}$
Donc $\boxed{(f+g)(x)=f(x)+g(x)}$

Remarques :
Ne confondez par $f+g$ qui est une fonction obtenue à partir de deux fonctions,
avec $f(a)+g(a)$ qui est la somme de deux nombres, images de $\boldsymbol{a}$ par f et par g.

Parfois, on parle de la fonction $f(x)+g(x)$ au lieu de la fonction $f+g$.
Strictement parlant, la notation $f(x)+g(x)$ représente un nombre, pas une fonction.

2) **La différence de deux fonctions**
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)-g(x)$ A un nombre, on fait correspondre la différence des images par f et par g.

On note cette fonction $\boxed{f-g}$
Donc $\boxed{(f-g)(x)=f(x)-g(x)}$

Les remarques précédentes sont valables ici aussi.

3) **Le produit de deux fonctions**
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)\cdot g(x)$ A un nombre, on fait correspondre le produit des images par f et par g.

On note cette fonction $\boxed{f\cdot g}$
Donc $\boxed{(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)}$

Les remarques précédentes sont valables ici aussi.

4) **Le quotient de deux fonctions**
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ A un nombre, on fait correspondre le quotient des images par f et par g.

On note cette fonction $\boxed{\dfrac{f}{g}}$

Donc $\boxed{\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

Les remarques précédentes sont valables ici aussi.
On remarque que l'on doit exclure du domaine de définition du quotient de deux fonctions, tous les zéros de la fonction g.

5) **La composition de deux fonctions**

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

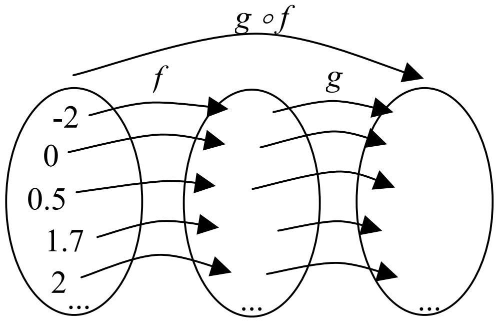
$x \mapsto g(f(x))$ A un nombre, on fait correspondre son image par f puis l'image du résultat par g.

On note cette fonction $\boxed{g \circ f}$

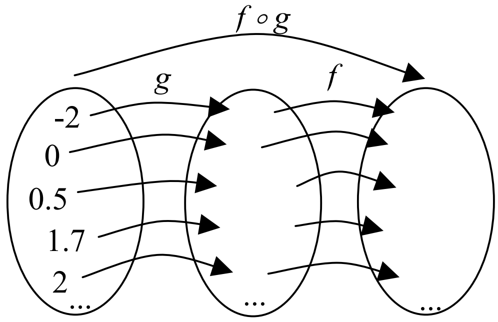
Donc $\boxed{g \circ f(x) = g(f(x))}$

Parfois, on parle de la fonction $g(f(x))$ au lieu de la fonction $g \circ f$.
Strictement parlant, la notation $g(f(x))$ représente un nombre, pas une fonction.

<u>Exemples :</u> Complétez ces représentations fléchées.



1) Si $g(x) = x^2$ et $f(x) = 2x+1$ alors
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ = ...



2) Si $g(x) = x^2$ et $f(x) = 2x+1$ alors
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ = ...

Ces deux premiers exemples montrent que :
$g \circ f \neq f \circ g$ généralement.

3) Si $g(x) = x^2$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alors

$(g \circ f)(x)$ = ... $(f \circ g)(x)$ = ...

Dans ce cas particulier, on voit que : $g \circ f = f \circ g$
Il est donc possible que $g \circ f = f \circ g$, mais ce n'est pas le cas habituellement.

4) Si $g(x) = x^2$ et $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ alors

$(g \circ f)(x)$ = ... $(f \circ g)(x)$ = ...

Comparez $g \circ f$ et $f \circ g$.

5) Si f est une fonction quelconque et $g(x) = x + d$, alors

$(g \circ f)(x)$ = ...

et $(f \circ g)(x)$ = ...

Quel est le lien avec la translation verticale de f et la translation horizontale de f vues dans la première partie de ce chapitre.

Exercices :

VIII.1 Soit la fonction parabolique suivante : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(x)=x^2+8x+12$

a) Quelle est la translation verticale de cette fonction par $+4$?
b) Quelle est la translation verticale de cette fonction par -3 ?
c) Quelle est la translation verticale de cette fonction par -12 ?
d) Quelle est la translation horizontale de cette fonction par -3 ?
e) Quelle est la translation horizontale de cette fonction par 2 ?
f) Quelle est la translation horizontale de cette fonction par 6 ?

VIII.2 Soient les deux fonctions suivantes :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(x)=x^2+4x-5$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad g(x)=x-1$

Ecrivez l'expression algébrique des fonctions $f+g$; $f-g$; $f\cdot g$; f/g; $f\circ g$; $g\circ f$.

Remarquez que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont deux fonctions différentes.

VIII.3 Soit la fonction parabolique suivante : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(x)=x^2-4x+1$

a) Ecrivez la fonction sous la forme : $f(x)=(x-x_{\min})^2+y_{\min}$
b) Obtenez par translation verticale une fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ayant une valeur minimale de zéro.
c) Obtenez par translation horizontale une fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que son minimum se trouve en $x=0$.
d) Obtenez par translation horizontale puis verticale une fonction $j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que son minimum se trouve en $x=0$; $y=0$.

VIII.4 Voici quatre fonctions réelles c.-à-d. quatre fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

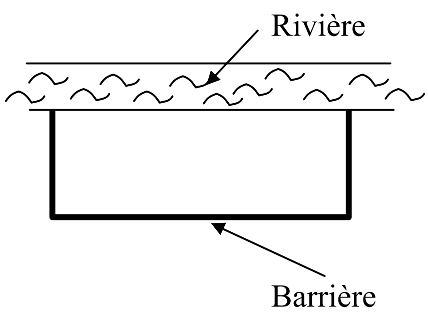
$$f(x)=x-3,\quad g(x)=x^2-9,\quad h(x)=\frac{1}{x+3},\quad j(x)=x+3$$

Déterminez les fonctions suivantes :

a) $f+g$	b) $f\cdot j$
c) $g\cdot h$	d) g/j
e) $f-j$	f) $f\cdot j$ - g
g) $g/j-f$	h) $g/(j-f)$
i) $f\circ g$	j) $g\circ f$
k) $f\circ j$	l) $j\circ f$
m) $g\circ j$	n) $j\circ g$
o) $h\circ g$	p) $g\circ g$
q) $(f\circ g)\circ h$	r) $f\circ(g\circ h)$

s) Est-il vrai qu'on a toujours : $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$, pour n'importe quelles fonctions f, g et h ?

VIII.5 Un terrain se trouve en bordure d'une rivière rectiligne. On désire délimiter une zone rectangulaire le long de la rivière à l'aide d'une barrière ayant une longueur totale de 120 mètres. Le côté de la zone le long de la rivière n'a pas besoin de barrière.
Quelle est l'aire maximale possible de la zone délimitée par la barrière et la rivière ?
Peut-on délimiter une zone non rectangulaire d'aire supérieure à celle trouvée précédemment ?



Index

Abscisses, 16
Affine, 21
Application, 10
Axe des abscisses, 13
Axe des ordonnées, 13
But, 6, 10
Composition de deux fonctions, 30
Concave, 23, 26
Convexe, 23, 26
Delta Δ, 26
Dépendante, 3
Différence de deux fonctions, 29
Discriminant, 26
Dom(f), 10, 16
Domaine de définition, 10, 16
Ensemble d'arrivée, 6, 10
Ensemble de départ, 6, 10
Fonction, 10
Fonction affine, 14, 21
Fonction constante, 14
Fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 12
Fonction inverse, 15
Fonction linéaire, 14
Fonction parabolique, 15, 23
Fonction racine carrée, 15
Fonction Réelle, 12
Image, 6
Liée, 3
Noyau, 16
Ordonnée à l'origine, 21
Ordonnées, 16
Parabolique, 23
Pente, 21
Préimage, 6, 10
Produit de deux fonctions, 29
Quotient de deux fonctions, 29
Racines, 16
Relation, 8
Somme de deux fonctions, 29
Source, 6, 10
Translation horizontale, 28
Translation verticale, 28
Variable, 3
Variable dépendante, 3
Variable liée, 3
Zéros, 16
Zéros(f), 16