Exercice ❶ :

Le <u>premier graphique</u> correspond à la fonction $F_2(x)=(2-x)\cdot(2+x)$, car elle s'annule en $x=2$ et en $x=-2$ et son sommet est en (0 ; 4). Cette fonction est concave.

Le <u>deuxième graphique</u> correspond à la fonction $F_1(x)=(x-2)^2$, car elle s'annule en $x=2$ et pour aucune autre valeur de x, et son sommet est en (2 ; 0). Cette fonction est convexe.

Le <u>troisième graphique</u> correspond à la fonction $F_3(x)=-\frac{1}{2}\cdot(x-3)^2+2$, car elle s'annule en $x=1$ et en $x=5$ et son sommet est en (3 ; 2). Cette fonction est concave.

Exercice ❷:

a) $f(x)=a\cdot(x+2)\cdot(x-4)$ $\quad f(0)=a\cdot(0+2)\cdot(0-4)=16$ donc $a=-2$.
$\underline{\underline{f(x)=-2\cdot(x+2)\cdot(x-4)}}$

b) $f(x)=a\cdot(x-3)\cdot(x-5)$ $\quad f(1)=a\cdot(1-3)\cdot(1-5)=8$ donc $a=1$.
$\underline{\underline{f(x)=(x-3)\cdot(x-5)}}$

c) Posons $g(x)=f(x)-2$, donc $g(0)=1$; $g(1)=0$; $g(-4)=0$.
Donc $g(x)=a\cdot(x-1)\cdot(x+4)$ $\quad g(0)=a\cdot(0-1)\cdot(0+4)=1$ donc $a=-0,25$.
Finalement $\underline{\underline{f(x)=g(x)+2=-0,25\cdot(x-1)\cdot(x+4)+2}}$.

d) $f(x)=a\cdot(x+1)^2-2$ $\quad f(2)=a\cdot(2+1)^2-2=6$ donc $a=\frac{8}{9}$. Finalement $\underline{\underline{f(x)=\frac{8}{9}\cdot(x+1)^2-2}}$.

e) $f(x)=a\cdot(x+1)^2+5$ $\quad f(3)=a\cdot(3+1)^2+5=1$ donc $a=-\frac{1}{4}$. Finalement $\underline{\underline{f(x)=-\frac{1}{4}\cdot(x+1)^2+5}}$.

f) Ici, on ne peut pas utiliser les mêmes méthodes que précédemment, car on ne connaît pas deux valeurs de x qui possèdent la même image.
$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+5$
On sait que : $a\cdot 2^2+b\cdot 2+5=7$ et $a\cdot 4^2+b\cdot 4+5=13$.
Cela donne deux équations. Multiplions la première par -2 et additionnons les !

$$\begin{cases}-8\cdot a-4\cdot b-10=-14\\ 16\cdot a+4\cdot b+\ \ 5=\ \ 13\end{cases}$$
$$\overline{8\cdot a \qquad -\ 5=-1}$$

Donc $a=0,5$ et de $4\cdot 0,5+2\cdot b+5=7$ on en déduit que : $b=0$.
Finalement : $\underline{\underline{f(x)=0,5\cdot x^2+5}}$

g) Ici, on peut utiliser la même méthode que en f).
$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+20$
On sait que : $a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+20=-16$ et $a\cdot 1^2+b\cdot 1+20=12$.
Cela donne deux équations. Multiplions la deuxième par 3 et additionnons les !

$$\begin{cases}9\cdot a-3\cdot b+20=-16\\ 3\cdot a+3\cdot b+60=\ \ 36\end{cases}$$
$$\overline{12\cdot a \qquad +80=\ \ 20}$$

Donc $a=-5$ et de $1\cdot(-5)+1\cdot b+20=12$ on en déduit que : $b=-3$.
Finalement : $\underline{\underline{f(x)=-5\cdot x^2-3x+20}}$

Exercice ❸ :

a) $x^2+3x+2=(x+2)\cdot(x+1)=0$ Donc $\underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\{-2\,;-1\}}}$

f possède un **minimum** en $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\dfrac{3}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{4}\right)$. $\Delta=1$

b) $x^2+4x+3=(x+3)\cdot(x+1)=0$ Donc $\underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\{-3\,;-1\}}}$

$f(x)=(x+2)^2-1$ f possède un **minimum** en $(-2\ ;\ -1)$. $\Delta=4$

c) $x^2+8x+5=0;\ \ a=1;\ b=8;\ c=5;\ \ \Delta=8^2-4\cdot5=44;\ \ \ x=\dfrac{-8\pm\sqrt{44}}{2}=-4\pm\sqrt{11}$

$x=\dfrac{-8\pm\sqrt{44}}{2}=\dfrac{-8}{2}\pm\dfrac{2\cdot\sqrt{11}}{2}=-4\pm\sqrt{11}$. $\underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\left\{-4-\sqrt{11}\,;-4+\sqrt{11}\right\}}}$

$f(x)=(x+4)^2-11$ f possède un **minimum** en $(-4\ ;\ -11)$.

d) $x^2-x-1=0;\ \ a=1;\ b=-1;\ c=-1;\ \ \Delta=1^2+4=5;\ \ \ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. $\underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}}$

f possède un **minimum** en $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{5}{4}\right)$.

e) $-x^2+7x-3=0;\ \ a=-1;\ b=7;\ c=3;\ \ \Delta=7^2+4\cdot3=61$.

$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{61}}{-2}$. $\underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\left\{\dfrac{7-\sqrt{61}}{2};\dfrac{7+\sqrt{61}}{2}\right\}}}$

f possède un **maximum** en $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(\dfrac{7}{2}\ ;\ \dfrac{61}{4}\right)$.

f) $x^2-4x+6=0;\ \ a=1;\ b=-4;\ c=6;\ \ \Delta=4^2-4\cdot6=-8<0$ donc $\underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\varnothing}}$

$f(x)=(x-2)^2+2$ f possède un **minimum** en $(2\ ;\ 2)$.

g) $2x^2+5x+1=0;\ \ a=2;\ b=5;\ c=1;\ \ \Delta=5^2-4\cdot2=17$

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$. $\underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\left\{\dfrac{-5-\sqrt{17}}{4};\dfrac{-5+\sqrt{17}}{4}\right\}}}$

f possède un **minimum** en $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\dfrac{5}{4}\ ;\ -\dfrac{17}{8}\right)$.

h) $-2x^2+5x-3=0;\ \ a=-2;\ b=5;\ c=-3;\ \ \Delta=5^2-4\cdot2\cdot3=1$

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{1}}{-4}$. ; $Z\acute{e}ros(f)=\left\{\dfrac{5-1}{4};\dfrac{5+1}{4}\right\}=\left\{\dfrac{4}{4};\dfrac{6}{4}\right\}$; $\underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\{1\ ;\ 1{,}5\}}}$

On aurait aussi pu factoriser : $2x^2-5x+3=(2x-3)\cdot(x-1)$.

f possède un **maximum** en $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(\dfrac{5}{4}\ ;\ \dfrac{1}{8}\right)$.

i) $2x^2+4x+1=0;\ \ a=2;\ b=4;\ c=1;\ \ \Delta=4^2-4\cdot2=8$

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{8}}{4}=\dfrac{-4}{4}\pm\dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{4}=-1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\left\{-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}}}$

$f(x)=2\cdot(x+1)^2-1$ f possède un **minimum** en $(-1\ ;\ -1)$.

Exercice ❸ suite :

j) $3x^2+5x+1=0;\quad a=3;\ b=5;\ c=1;\quad \Delta=5^2-4\cdot 3=13$

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{6}.\qquad \underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\left\{\dfrac{-5-\sqrt{13}}{6};\dfrac{-5+\sqrt{13}}{6}\right\}}}$

f possède un **minimum** en $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\dfrac{5}{6}\ ;\ -\dfrac{13}{12}\right)$.

k) $-10x^2-7x-2=0;\quad a=-10;\ b=-7;\ c=-2;\quad \Delta=7^2-4\cdot 10\cdot 2=9$

$x=\dfrac{7\pm\sqrt{9}}{20}.\qquad Z\acute{e}ros(f)=\left\{\dfrac{7-3}{20};\dfrac{7+3}{20}\right\}\qquad \underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\left\{\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{2}\right\}}}$

f possède un **maximum** en $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\dfrac{7}{20}\ ;\ \dfrac{9}{40}\right)$.

l) $12x^2-11x+5=0;\quad a=12;\ b=-11;\ c=5;\quad \Delta=11^2-4\cdot 12\cdot 5=-119<0$

donc : $\underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\varnothing.}}$

f possède un **minimum** en $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\dfrac{11}{24}\ ;\ \dfrac{119}{48}\right)$.

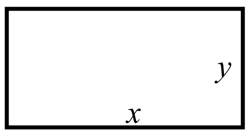
m) $-30x^2+23x-4=0;\quad a=-30;\ b=23;\ c=-4;\quad \Delta=23^2-4\cdot 30\cdot 4=49$

$x=\dfrac{-23\pm\sqrt{49}}{-60}.\qquad Z\acute{e}ros(f)=\left\{\dfrac{23-7}{60};\dfrac{23+7}{60}\right\}\qquad \underline{\underline{Z\acute{e}ros(f)=\left\{\dfrac{4}{15};\dfrac{1}{2}\right\}}}$

On aurait aussi pu factoriser : $-30x^2+23x-4=-(30x^2-23x+4)=-(15x-4)\cdot(2x-1)$.

f possède un **maximum** en $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(\dfrac{23}{60}\ ;\ \dfrac{49}{120}\right)$.

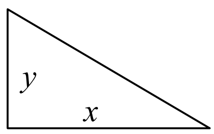
Exercice ❹



Notons x et y la longueur en [cm] des deux côtés du rectangle.
L'énoncé dit que $2x + 2y = 24$.
Donc $x + y = 12$. Donc $y = 12 - x$.
L'aire du rectangle est : Aire $= x \cdot y = x \cdot (12 - x)$.
$f(x) = x \cdot (12 - x)$ est une fonction qui représente l'aire du rectangle en fonction de la longueur d'un de ses côtés.
$f(x) = -x^2 + 12x$ représente une parabole concave ayant un maximum en $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{12}{-2}=6$

Donc l'aire est maximale lorsque $x = y = 6$.
<u>Le rectangle d'aire maximale est un carré de côtés 6 [cm] de longueur et d'aire égale à 36 [cm^2].</u>

Exercice ❺



Notons x et y la longueur en [cm] des deux cathètes du triangle rectangle.
L'énoncé dit que $x + y = 60$.
La longueur de l'hypoténuse au carré vaut : $H^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (60 - x)^2$.
$f(x) = x^2 + (60 - x)^2$ est une fonction qui représente le carré de la longueur de l'hypoténuse en fonction de la longueur d'une de ses cathète.

$f(x) = 2x^2 - 120x + 3'600$ représente une parabole convexe ayant un minimum en $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{120}{2\cdot 2}=30$

Donc l'hypoténuse est de longueur minimale lorsque $x = y = 30$.
Le triangle rectangle est donc isocèle de cathètes valant chacune 30 [cm].

Exercice ❻

Notons y la longueur de la barrière, x la hauteur de la barrière.
L'énoncé nous dit que : $y+2x=120$ mètres

On veut maximiser l'aire $x\cdot y$

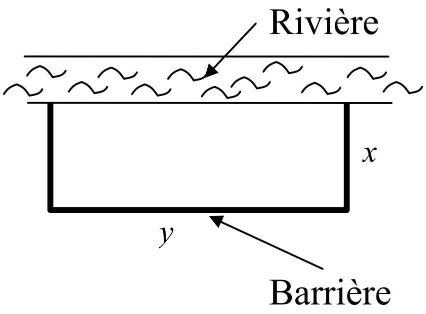
De la première égalité, on en déduit que $y=120-2x$

On veut donc maximiser : $x\cdot(120-2x)=2x^2-120x$

C'est l'équation d'une parabole convexe avec (a = 2, b = -120, c = 0),

qui possède un minimum en $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{120}{4}=30$.

Donc les dimensions optimales sont $x = 30$ mètres et $y = 60$ mètres.
Ce qui donne une aire de 30·60 = <u>1'800 mètres carrés</u>.



Exercice ❼

L'équation de la droite est : $y=6-\dfrac{2}{3}\cdot x$.

Si on note x la largeur du rectangle, alors $y=6-\dfrac{2}{3}\cdot x$ sera sa hauteur et donc

son aire sera égale à $Aire=x\cdot y=x\cdot\left(6-\dfrac{2}{3}\cdot x\right)=6x-\dfrac{2}{3}\cdot x^2$.

Le graphique de l'aire en fonction de x est une parabole concave, donc elle possède un maximum, qui se trouve en $x_{\max}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}=4,5$, donc $y_{\max}=6-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{2}=3$.

Les dimensions du rectangle d'aire maximale sont : 4,5 x 3 (largeur x hauteur).
L'aire maximale est donc de $y_{\max}=4,5\cdot 3=13,5$.

Exercice ❽

L'énoncé nous dit que la hauteur de l'objet en fonction du temps est : $h(t)=-4,9\cdot t^2+6\cdot t+1,5$

Les distances exprimées en mètres et le temps en secondes.

a) On cherche t tel que $h(t)=-4,9\cdot t^2+6\cdot t+1,5=1,5$.

Donc $-4,9\cdot t^2+6\cdot t=0$. Soit $t = 0$ [s], au départ, soit $t=\dfrac{6}{4,9}\approx 1,22\,[s]$.

Après 1,22 [s] l'objet se retrouve à une hauteur de 1,5 [m].

b) On cherche t tel que $h(t)=-4,9\cdot t^2+6\cdot t+1,5=3,2$.

Donc $-4,9\cdot t^2+6\cdot t-1,7=0$. $a=-4,9$; $b=6$; $c=-1,7$ $\Delta = 2,68$.

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6\pm\sqrt{2,68}}{-9,8}=\begin{cases}0,445\\0,779\end{cases}$$

L'objet se trouve à une hauteur de 3,2 [m] au temps $t = 0,455$ [s] à la montée et au temps $t = 0,779$ [s] à la descente.

c) la hauteur $h(t)$ représente une parabole concave en fonction du temps.

Son maximum se trouve en $t=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{6}{2\cdot 4,9}=0,612$ [s].

La hauteur maximale vaut : $h_{\max}=-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4a}=\dfrac{36-4\cdot(-4,9)\cdot 1,5}{4\cdot 4,9}=3,34$ [m].
