I. Nombres entiers, rationnels et irrationnels

Qu'est-ce qu'un nombre ?
Définition selon le petit Larousse illustré de 1997.
Nombre : Notion fondamentale des mathématiques, qui permet de dénombrer, de classer les objets ou de mesurer les grandeurs mais **qui ne peut faire l'objet d'une définition stricte**.

I.1 Ensembles particuliers de nombres

1. L'ensemble des **nombres naturels** : $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,...\}$

   L'ensemble des **nombres entiers positifs** : $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,5,...\}$

♦ Opérations de base : L'addition (+), La multiplication (x) et La relation d'ordre ($\leq$)
Opérations secondaires : La soustraction ($-$) et La division ($\div$)
Défauts :
i) La soustraction de deux nombres dans $\mathbb{N}$ ne donne pas toujours un résultat dans $\mathbb{N}$.
ii) La division de deux nombres dans $\mathbb{N}$ ne donne pas toujours un résultat dans $\mathbb{N}$.

2. L'ensemble des **nombres entiers** : $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

♦ Opérations de base : L'addition (+), La multiplication (x) et La relation d'ordre ($\leq$)
Opérations secondaires : La soustraction ($-$) et La division ($\div$)
Avantage : La soustraction de deux nombres dans $\mathbb{Z}$ donne toujours un résultat dans $\mathbb{Z}$.
Défaut : La division de deux nombres dans $\mathbb{Z}$ ne donne pas toujours un résultat dans $\mathbb{Z}$.

3. L'ensemble des **nombres rationnels** :
   $\mathbb{Q}$ = l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

♦ Opérations de base : L'addition (+), La multiplication (x) et La relation d'ordre ($\leq$)
Opérations secondaires : La soustraction ($-$) et La division ($\div$)
Avantages :
i) La soustraction de deux nombres dans $\mathbb{Q}$ donne toujours un résultat dans $\mathbb{Q}$.
ii) La division d'un nombre de $\mathbb{Q}$ par un nombre de $\mathbb{Q}^*$ donne toujours un résultat dans $\mathbb{Q}$.
Défauts :
Beaucoup de problèmes ne possèdent pas de solution dans $\mathbb{Q}$, bien qu'il existe des nombres rationnels qui donnent une bonne approximation de la solution exacte.

Exemple :
$x^2 = 2$
$x = 1{,}414$ n'est pas une solution exacte mais 1,414 est une solution approchée car
$1{,}414^2 = 1{,}999396 \approx 2$.

4. L'ensemble des **nombres réels** : $\mathbb{R}$

   Une définition précise de cet ensemble a nécessité plus de 2000 ans d'histoire des mathématiques. On peut dire que l'ensemble des nombres réels correspond à tous les nombres à virgule, que la partie décimale soit limitée, illimitée périodique ou illimitée non périodique.

- ♦ $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq 0 \}$, $\mathbb{R}_- = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq 0 \}$
- ♦ Opérations de base : L'addition (+), La multiplication (x) et La relation d'ordre ($\leq$)
  Opérations secondaires : La soustraction ($-$) et La division ($\div$)

Avantages :

i) La soustraction de deux nombres dans $\mathbb{R}$ donne toujours un résultat dans $\mathbb{R}$.

ii) La division d'un nombre de $\mathbb{R}$ par un nombre de $\mathbb{R}^*$ donne toujours un résultat dans $\mathbb{R}$.

iii) Presque tous les problèmes qui ne possèdent pas de solutions dans $\mathbb{Q}$, bien qu'il existe des nombres rationnels qui soient extrêmement proches d'une solution, ont une solution dans $\mathbb{R}$.
   Exemple : $x^2 = 2$ admet pour solution exacte deux valeurs : $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.

Défauts :

Certains problèmes ne possèdent pas de solution dans $\mathbb{R}$, bien qu'ils aient une solution dans de plus grands ensembles de nombres.
Exemples : $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ mais possède une solution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Nous ne définirons pas cet ensemble.

Définition : Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**. Exemples : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π.
Autrement dit :

Un nombre irrationnel est un nombre dont la partie décimale est **illimitée non périodique** .

I.2 Intervalles fermés et ouverts

Certains sous-ensembles des nombres réels sont très souvent utilisés, ce sont les **intervalles**.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$

Intervalle fermé : $[a; b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$
= **l'ensemble des nombres réels "x" tels que le nombre "a" soit plus petit ou égal au nombre "x" et le nombre "x" soit plus petit ou égal au nombre "b".**

Intervalle ouvert : $]a; b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$
= **l'ensemble des "x" réels tels que "a" soit plus petit que "x" et "x" soit plus petit que "b".**

Intervalle **fermé à gauche**, **ouvert à droite** : $[a; b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$
Intervalle **ouvert à gauche**, **fermé à droite** : $]a; b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$

Intervalle allant jusqu'à **l'infini** :

$]a; \infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \}$

$[a; \infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \}$

$]-\infty; a[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$

$]-\infty; a] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \}$

$]-\infty; \infty[= \{ x \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$

Du côté de l'infini, l'intervalle est toujours ouvert, car l'infini n'est pas un nombre réel.
(L'infini n'est pas un point sur la droite des nombres réels.)

I.3 Propriétés des opérations dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$

Dans les quatre cas, l'addition (+) :

(1) est une **opération interne** : La somme de deux nombres reste dans le même ensemble.

(2) est **associative** : (a + b) + c = a + (b + c) (les parenthèses ne sont donc pas nécessaires)

(3) est **commutative** : a + b = b + a

(4) possède un **élément neutre** : 0 + a = a (0 est l'élément neutre de l'addition)

Dans les quatre cas, la multiplication (x) :

(1) est une **opération interne** : Le produit de deux nombres reste dans le même ensemble.

(2) est **associative** : (a · b) · c = a · (b · c) (les parenthèses ne sont donc pas nécessaires)

(3) est **commutative** : a · b = b · a

(4) possède un **élément neutre** : 1 · a = a (1 est l'élément neutre de la multiplication)

Remarque :
Ni la soustraction ni la division ne possèdent ces propriétés, c'est la raison pour laquelle ce sont des opérations secondaires.

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition : a · (b + c) = a · b + a · c

Dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$, chaque nombre possède un **opposé** : "- a" est l'opposé de "a" car a + (- a) = 0

Dans $\mathbb{Q}^*$, et $\mathbb{R}^*$, chaque nombre possède un **inverse** : $\frac{1}{a}$ est l'inverse de "a" car $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Règle des signes dans la multiplication :

positif fois positif = positif
positif fois négatif = négatif
négatif fois positif = négatif
négatif fois négatif = positif

II. Puissances et radicaux

Définition : Soit $\boldsymbol{n}$ un entier strictement positif ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$) et $\boldsymbol{a}$ un nombre réel ($\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$).
La $\boldsymbol{n}^{\text{ème}}$ **puissance** de $\boldsymbol{a}$ est le produit de $\boldsymbol{n}$ facteurs égaux au nombre $\boldsymbol{a}$.
On la note $\boldsymbol{a^n}$ et on dit "$\boldsymbol{a}$ **puissance** $\boldsymbol{n}$".
$\boldsymbol{a}$ s'appelle la **base** et $\boldsymbol{n}$ l'**exposant**.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fois}}$$

Exemples : 3^5 se lit "3 puissance 5" et est égale à : $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$
5^3 se lit "5 puissance 3" et est égale à : $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Les deux propriétés principales des puissances sont :
Pour $\boldsymbol{n, m} \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ et $\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}}$
Elles sont faciles à vérifier :

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fois}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m fois}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n + m fois}} = a^{n+m}$$

$$\left(a^n\right)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{\text{m fois}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n} \cdot \text{m fois}} = a^{n \cdot m}$$

1) On désire étendre la définition de puissance pour des exposants qui appartiennent à des ensembles plus grands que $\mathbb{N}$, c'est-à-dire pour des entiers relatifs, des fractions, des réels, etc.
Naturellement, les deux propriétés ci-dessus doivent rester valables.
Si on veut que $a^0 \cdot a^m = a^{0+m}$, il faut définir $\boxed{a^0 = 1}$ (c'est possible seulement si $a \neq 0$).

Si on veut que $a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$, il faut définir $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$ (c'est possible seulement si $a \neq 0$).

Donc, on a étendu la définition de puissance d'un nombre pour tout exposant entier, qu'il soit positif, négatif ou nul.

2) Si la règle "puissance d'une puissance" doit s'appliquer : $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a^1 = a$,
il faut définir $a^{\frac{1}{n}}$ comme étant un nombre, qui mis à la puissance $\boldsymbol{n}$, donne $\boldsymbol{a}$.

Est-ce toujours possible ?
Dans l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$), la réponse dépend du signe de la base $\boldsymbol{a}$ et de la parité de l'exposant $\boldsymbol{n}$.
Si l'*exposant* $\boldsymbol{n}$ est *impair*, alors
il existe toujours un unique nombre réel, qui mis à la puissance $\boldsymbol{n}$, est égal à $\boldsymbol{a}$.
Si l'*exposant* $\boldsymbol{n}$ est *pair* et que la *base* $\boldsymbol{a}$ est *négative*, alors
il **n'existe pas** de nombre réel qui mis à la puissance $\boldsymbol{n}$, est égal à $\boldsymbol{a}$.
Si l'*exposant* $\boldsymbol{n}$ est *pair* et que la *base* $\boldsymbol{a}$ est *positive*, alors
il **existe deux** nombres réels qui mis à la puissance $\boldsymbol{n}$, sont égaux à $\boldsymbol{a}$.
L'un des deux est négatif, l'autre est positif.
Nous ne montrerons pas ces affirmations.

Définitions et notations :

Pour $\boldsymbol{n}$ entier positif ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$) et $\boldsymbol{a}$ réel ($\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$),

Si $\boldsymbol{n}$ est *impair*, on note $\boxed{\sqrt[n]{a}}$ cet unique nombre réel, qui mis à la puissance $\boldsymbol{n}$, donne $\boldsymbol{a}$.

Si $\boldsymbol{n}$ est *pair* et $\boldsymbol{a}$ positif, on note $\boxed{\sqrt[n]{a}}$ le nombre réel positif, qui mis à la puissance $\boldsymbol{n}$, donne $\boldsymbol{a}$.

$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{si } n \text{ est impair ou si } a \text{ est positif}}$ et $\boxed{\sqrt[n]{0} = 0}$

En symboles :

Vu ce qui précède, il faut définir $\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ et donc aussi $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$.

Cela n'est possible que si $\boldsymbol{a}$ est un nombre réel positif ou nul, ou si $\boldsymbol{n}$ est impair.

On a étendu la définition de puissance d'un nombre pour des exposants rationnels.
Il est possible d'étendre la définition de puissance pour des exposants réels.

Résumé :

Pour $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$, (parfois il faut se restreindre à $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}_+^*$)

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fois}}$

$a^0 = 1$ ici, la base $\boldsymbol{a}$ peut être négative, mais pas nulle.

$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$ ici, la base $\boldsymbol{a}$ doit être positive, sauf si p est un nombre entier impair.

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ et $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ Si $\boldsymbol{n}$ est *pair*, il faut se restreindre à une base $\boldsymbol{a} \geq 0$

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

$\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

$\left(a^p\right)^q = \left(a^q\right)^p = a^{p \cdot q}$

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ici $\boldsymbol{a}$ doit être positif ou nul.

La **racine carrée d'un nombre** $a \geq 0$ est l'unique nombre positif qui mis au carré vaut a.

Ceci se résume en : $\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$

$\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n$; $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$

VRAI ou FAUX ?

1) $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$. L'égalité est fausse, donc il est vrai que : $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

2) $\sqrt{a^2} = a$. Cette égalité est vraie pour a > 0, mais devient $\sqrt{a^2} = -a$ pour a < 0.

3) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$. Cette égalité est toujours vraie pour a > 0 et n'a pas de sens pour a ≤ 0.

III. Nombres décimaux et puissances de dix

Remarque :
Un même nombre peut s'écrire de beaucoup de manières différentes. Par exemple, voici plusieurs manières de représenter le même nombre :

$$\frac{4+3}{40'000}=\frac{7}{40'000}=\frac{7}{200^2}=\frac{7}{2^6\cdot 5^4}=0,000175=1,75\cdot 10^{-4}=175\cdot 10^{-6}=5^2\cdot 7\cdot 10^{-6}$$

Chaque écriture possède ses avantages et ses inconvénients, selon le contexte.
Il est important de savoir passer de l'une à l'autre.

Pour additionner et soustraire, l'écriture décimale est généralement la plus simple.
Pour multiplier et diviser, l'écriture fractionnaire est souvent la plus simple, surtout si l'on décompose le numérateur et le dénominateur en produit de nombres premiers.

La notation scientifique :
Une écriture souvent utilisée est la **notation scientifique**, qui consiste à écrire un nombre sous forme décimale multiplié par une puissance de dix (10).
La **notation scientifique** s'écrit sous la forme $\boldsymbol{a}\cdot 10^n$ où $\boldsymbol{a}$ est un nombre décimal compris entre 1 et 10 : $1 \le \boldsymbol{a} < 10$ et $\boldsymbol{n}$ un nombre entier relatif.
Exemples : $1,75\cdot 10^{-4}$; $7,123\cdot 10^{12}$; $9,99\cdot 10^{-10}$; 10^8

Cette manière de faire est utile sur votre calculatrice, pour afficher un maximum de chiffres significatifs d'un nombre. Calculez par exemple $\frac{355}{113'000'000}\approx 0,000003142\approx 3,1415922\cdot 10^{-6}$. La dernière écriture donne plus d'information sur l'approximation décimale de la fraction.

Simplification de fractions :
Dans des fractions faisant intervenir des nombres décimaux avec beaucoup de zéros, les simplifications sont plus aisées si l'on utilise l'écriture comportant des puissances de dix et si l'on décompose les nombres en facteurs premiers.
Exemple :

$$\frac{0,000006\cdot 105'000\cdot 0,0081}{21'000\cdot 0,00027}=\frac{2\cdot 3\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 10^3\cdot 3^4\cdot 10^{-4}}{3\cdot 7\cdot 10^3\cdot 3^3\cdot 10^{-5}}=\frac{2\cdot 5\cdot 3^2\cdot 10^3}{1}\cdot 10^{-6+3-4-3+5}=9\cdot 10^{-4}$$

Cette écriture permet de n'avoir que des nombres entiers et des puissances de dix. Ensuite, on décompose les nombres entiers en facteurs premiers, pour mieux identifier les simplifications possibles.
En additionnant les puissances de dix du numérateur et en soustrayant les puissances de dix du dénominateur, on obtient une unique puissance de dix, ce qui réduit le résultat final.

Remarque :
De nos jours, les machines à calculer permettent généralement d'effectuer ces calculs simplement, mais il faut faire attention à leurs limites :
1) Demandez $(0,009)^3\cdot 0,12$ et notez le résultat : 0,000000087.
2) Puis divisez 0,2187 par ce résultat, vous obtenez 0,2187 ÷ 0,000000087 = 2513793,103.
3) Maintenant, demandez . $\frac{0,2187}{(0,009)^3\cdot 0,12}$, vous obtenez 2500000. Explication ???

La notation scientifique vous permet d'éviter ce genre d'erreur.

Le résultat 0,000000087 est arrondi et peu précis, donc il induit des erreurs de précision par la suite.

IV. Les identités remarquables

Définitions :
On appelle **identité** l'égalité de deux expressions algébriques équivalentes, c'est-à-dire qui prennent la même valeur numérique **quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables**.

Voici quelques identités particulières, que l'on appelle **identités remarquables**.
Elles servent particulièrement à la factorisation et la simplification d'expressions.

Carré de la somme de deux termes : $\boxed{(x+a)^2 = x^2+2\cdot a\cdot x+a^2}$

Carré de la différence de deux termes : $\boxed{(x-a)^2 = x^2-2\cdot a\cdot x+a^2}$

Produit de la somme de deux termes par leur différence : $\boxed{(A+B)\cdot(A-B) = A^2-B^2}$

Voici la quatrième identité remarquable : $\boxed{(x+a)\cdot(x+b) = x^2+(a+b)\cdot x+a\cdot b}$

Exercices :
Vérifiez que :
a) Somme de deux cubes : $x^3+a^3 = (x+a)\cdot(x^2-a\cdot x+a^2)$
Il suffit de développer :
$(x+a)\cdot(x^2-a\cdot x+a^2) = x^3-a\cdot x^2+a^2\cdot x+a\cdot x^2-a^2\cdot x+a^3 = x^3+a^3$.

b) Différence de deux cubes : $x^3-a^3 = (x-a)\cdot(x^2+a\cdot x+a^2)$
Il suffit de développer :
$(x-a)\cdot(x^2+a\cdot x+a^2) = x^3+a\cdot x^2+a^2\cdot x-a\cdot x^2-a^2\cdot x-a^3 = x^3-a^3$.

Développez :
c) Cube de la somme de deux termes : $(x+a)^3 =$
$(x+a)^3 = (x+a)\cdot(x+a)^2 = (x+a)\cdot(x^2+2\,a\,x+a^2) = x^3+2\,a\,x^2+a^2\,x+a\,x^2+2\,a^2\,x+a^3 =$
$x^3+3\,a\,x^2+3\,a^2\,x+a^3$

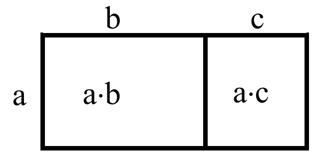
d) Cube de la différence de deux termes : $(x-a)^3 =$
$(x+a)^3 = (x+a)\cdot(x+a)^2 = (x+a)\cdot(x^2+2\,a\,x+a^2) = x^3+2\,a\,x^2+a^2\,x+a\,x^2+2\,a^2\,x+a^3 =$
$x^3+3\,a\,x^2+3\,a^2\,x+a^3$

e) VRAI ou FAUX ? : $(x+a)^2 = x^2+a^2$
Cette égalité est fausse, c'est une erreur classique à éviter.
On peut vérifier avec des nombres : $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$ est différent de $2^2 + 3^2 = 13$!

Voici, pour ceux qui ont une vision géométrique, quelques identités remarquables vues de manière géométrique.

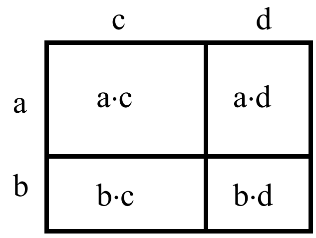
Commençons par **la distributivité** :
Aire du grand rectangle = somme des aires des deux rectangles.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$



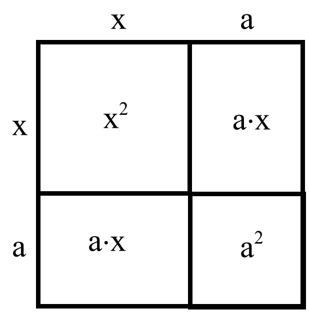
La double distributivité :
Aire du grand rectangle = somme des aires des quatre rectangles.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$



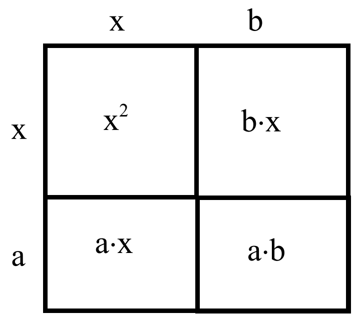
Carré de la somme de deux termes :
Aire du grand carré = somme des aires des deux carrés
plus les aires des deux rectangles.

$$(x + a)^2 = x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a^2$$



La quatrième identité remarquable :

$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b) \cdot x + a \cdot b$$



V. Factorisation

Développer est un processus qui transforme un *produit de facteurs* en une *somme de termes*. C'est simple à faire. Les calculs peuvent être longs.

Exemple : Développez l'expression : $(x+y)\cdot(x^2-x\cdot y+y^2)$

$(x+y)\cdot(x^2-x\cdot y+y^2) \;=\; x^3-x^2\cdot y+x\cdot y^2+x^2\cdot y-x\cdot y^2+y^3 \;=\; x^3+y^3$
Déjà vu dans l'exercice a) de la page 7.

Quelle propriété de la multiplication avez-vous utilisée ? La distributivité a été utilisée.

Factoriser est le processus inverse, qui transforme une *somme de termes* en un *produit de facteurs*. C'est généralement plus compliqué à faire que de développer, mais plus utile.

Exemple : Factorisez l'expression : x^2+5x+6
$x^2+5x+6 \;=\; (x+2)\cdot(x+3)$. C'est la 4ème identité remarquable.

Voici deux utilisations fréquentes de la factorisation :

1) **Factoriser peut servir à résoudre des équations.**

Résolvez l'équation : $x^3+5x^2+6x=0$
$x^3+5x^2+6x \;=\; x\cdot(x^2+5x+6) \;=\; x\cdot(x+2)\cdot(x+3)$. C.f. l'exemple précédent.
Donc l'ensemble des solutions est : S = {-3 ; -2 ; 0}.

2) **Factoriser peut servir à simplifier des fractions.**

Simplifiez la fraction : $\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x+3}$

$\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x+3} \;=\; \dfrac{x\cdot(x+2)\cdot(x+3)}{x+3} \;=\; x\cdot(x+2)$. Il est inutile de développer la réponse !

De manière générale, on cherche **toujours** à obtenir le **nombre maximum de facteurs possibles**.

$x^4-y^4=(x^2+y^2)\cdot(x^2-y^2)$ est une factorisation incomplète **car le dernier facteur peut être factorisé,**

alors que :
$x^4-y^4=(x^2+y^2)\cdot(x+y)\cdot(x-y)$ est une factorisation complète, **on ne peut pas factoriser plus.**

Techniques de factorisation :

Il n'existe pas de recette pour factoriser à coup sûr une expression, mais uniquement divers moyens que l'on doit essayer successivement.
Voici ces principaux moyens :

1) Factorisation par mise en évidence.

C'est le processus inverse de la distributivité : $A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$

Factorisez : $x^3 y + xy^3 \ = \ x\,y \cdot (x^2 + y^2)$

Factorisez : $(x-y)\cdot(3a+5b)+(x-y)\cdot(a-2b) \ = \ (x-y)\cdot\big((3a+5b)+(a-2b)\big) \ = \ (x-y)\cdot(4a+3b)$

2) Factorisation par groupement de termes.

C'est le processus inverse de la double distributivité :

$$\underbrace{A \cdot C + A \cdot D}_{1er\ groupe} + \underbrace{B \cdot C + B \cdot D}_{2ème\ groupe} = A \cdot (C + D) + B \cdot (C + D) = \underbrace{(A + B) \cdot (C + D)}_{\mathrm{Pr}oduit\ de\ deux\ facteurs}$$

Remarquons que deux factorisations successives par mise en évidence ont été effectuées.
Aurions-nous pu grouper les termes autrement ?

Factorisez : $a\,x - b\,y + a\,y - b\,x \ = \ a\cdot(x+y) - b\cdot(x+y) \ = \ (a-b)\cdot(x+y)$

Factorisez : $x^3 + x^2 + x + 1 \ = \ x^2\cdot(x+1) + x + 1 \ = \ (x^2+1)\cdot(x+1)$

3) Factorisation à l'aide des identités remarquables.

Factorisez :

a) $4x^2 + 12x + 9 \ = \ (2x+3)^2$

b) $x^2 - \dfrac{10}{6}x + \dfrac{25}{36} \ = \ \left(x + \dfrac{5}{6}\right)^2$

c) $x^2 - 3x - 70 \ = \ (x-10)\cdot(x+7)$

Souvent, il faut combiner les trois méthodes pour factoriser toute l'expression algébrique.

Factorisez :

a) $(x+1)^3 - 4(x+1) \ =$
$(x+1)\cdot\big((x+1)^2 - 4\big) \ = \ (x+1)\cdot\big((x+1)+2\big)\cdot\big((x+1)-2\big) \ = \ (x+1)\cdot(x+3)\cdot(x-1)$

b) $4x^2 - 9x + (x+5)\cdot(2x-3) \ =$
$(2x-3)\cdot(2x+3) + (x+5)\cdot(2x-3) \ = \ (2x-3)\cdot\big((2x+3)+(x+5)\big) \ = \ (2x-3)\cdot(3x+8)$

Curiosités :

1) Factorisez l'expression suivante, de deux manières différentes : $(a+b)^2-(a-b)^2$.

2) En utilisant un cas particulier de la troisième identité remarquable, $(a-5)\cdot(a+5)=a^2-25$, expliquez comment calculer de tête les carrés suivants : 15^2 ; 25^2 ; 35^2 ; ... ; 95^2 .

3) Choisissez un chiffre entre 1 et 9, puis effectuez les opérations suivantes :
 1) Faire 10 moins le chiffre choisi
 2) Additionner 5
 3) Multiplier par 2
 4) Additionner 5
 5) Multiplier par 2
 6) Additionner 5
 7) Multiplier par 2
 8) Additionner 30
 9) Faire la somme des chiffres qui composent le résultat
10) Si le résultat est supérieur à 9, refaire la somme des chiffres qui composent le résultat.

Que constatez-vous ?
Recommencez avec un autre chiffre de départ. Constatez-vous le même phénomène ?
Savez-vous expliquer pourquoi ?

4) Choisissez un nombre entre 1 et 30, puis sur une calculatrice :
Additionnez 3 ; Multipliez par 30 ; Additionnez 1
Répétez le nombre, *cdu* devient *cdu'cdu*. Exemple 473 devient 473'473
Si le nombre est divisible par 2, divisez-le par 2.
Idem pour les nombres premiers : 3, 5, 7, 11, 13.
Soustrayez 1 au résultat.
Si le nombre est divisible par 2, divisez-le par 2.
Idem pour les nombres premiers : 3, 5, 7, 11, 13.
Soustrayez 3 au résultat.

Que constatez-vous ? Que constatent les autres personnes ? Savez-vous expliquer pourquoi ?

VI. Histoire : Origine de l'algèbre

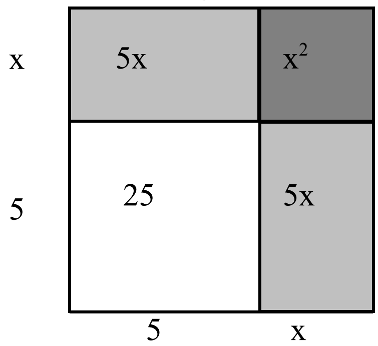
Les nombres rationnels et réels ont été définis plus de mille ans après que les premiers problèmes d'algèbre ont été résolus. C'est la civilisation grecque qui connaît la première grande floraison de talents mathématiques. A partir de l'époque d'Euclide (~300 ans av. J.-C.), **Alexandrie** devient le centre mondial des sciences. La ville est dévastée à trois reprises (par les Romains en 47 av. J.-C., par les Chrétiens en 392 après J.-C. et finalement par les Musulmans en 640), ce qui entraîna le déclin de cette civilisation.
A la suite du perfectionnement de l'écriture arabe (nécessaire à la rédaction du Coran), des écrivains arabes traduisent avidement les fragments des œuvres grecques (Euclide, Aristote, Platon, Archimède, Apollonius, Ptolémée), ainsi que l'arithmétique indienne, et lancent une nouvelle recherche en mathématiques.
Enfin, au temps des croisades (1100-1300), les Européens découvrent cette civilisation; Gherardo Cremonese (1114-11187), Robertus Castrensis (XII^{e} siècle), Leonardo da Pisa ("Fibonacci", vers 1200) et Regiomontanus (136-1476) sont les principaux traducteurs et les premiers scientifiques de la nouvelle ère.
A cette époque, les mathématiques sont nettement séparées : d'un côté *l'algèbre*, de l'autre la *géométrie*.

L'algèbre est un héritage culturel de l'Antiquité grecque et orientale. Le célèbre ouvrage "Al-jabr w'al muqâbala" (origine du mot "Algèbre") a été écrit vers 830 par Mahammed ben musa Al-Khowârizmî (origine du mot "Algorithme"). Il commence par la résolution d'une équation du second degré.

En écriture moderne, le travail d'Al-Khowârizmî est le suivant :
On cherche pour quel nombre x l'égalité suivante est réalisée : $x^2 + 10 \cdot x = 39$

Al-Khowârizmî résout ce problème géométriquement.

Il dessine la figure



Il cherche une valeur de x pour que la somme des aires "gris clair" plus "gris foncé" égale 39.
L'aire du carré de côté (x+5) vaut donc 39 + 25, mais aussi $(x + 5)^2$.
Al-Khowârizmî en déduit que $(x + 5)^2 = 64$ et donc que $x = 3$.

Les nombres négatifs n'existaient pas à cette époque, donc $x = -13$ n'était pas considéré comme solution.

Pour vous, il est maintenant simple de résoudre la deuxième équation Al-Khowârizmî : $x^2 + 21 = 10 \cdot x$,
que nous pouvons écrire de la manière suivante : $x^2 - 10 \cdot x = -21$
Il suffit d'ajouter 25 des deux côtés de l'égalité pour obtenir l'équation : $x^2 - 10 \cdot x + 25 = 4$
c.-à-d. l'équation : $(x-5)^2 = 4$
d'où on déduit facilement les deux solutions $x = 3$ et $x = 7$.

Al-Khowârizmî ne connaissait pas les nombres négatifs, donc pour lui l'équation s'écrivait : $x^2 + 21 = 10 \cdot x$
Il ne pouvait donc pas utiliser la méthode de résolution ci-dessus.

La création des nombres négatifs a représenté un immense progrès puisqu'elle a permis d'appliquer une méthode de résolution identique à des problèmes apparemment différents.

VII. Equation à une inconnue

VII.1 Qu'est-ce qu'une équation ?

Dans une **équation à une inconnue**, on a deux expressions qui dépendent chacune d'un nombre inconnu représenté par une lettre, généralement x.
On se demande pour quelle(s) valeur(s) de ce nombre x, les deux expressions donnent le même résultat.
Dans une équation, ces deux expressions à égaliser sont appelés **les deux membres de l'équation.**

Exemples :

1) $5 \cdot x - 7 = 2 \cdot x + 2$
2) $9 \cdot (7 + 3 \cdot x) = 5 \cdot (2 \cdot x + 11 + 3 \cdot x)$
3) $x^{17} + 45 \cdot x^{11} - 12 \cdot x^3 + 3 = \sqrt{x^3 - 9 \cdot x + 2}$

Les deux premières équations sont simples à résoudre. La troisième ne peut être résolue que par approximation numérique.

Règles de résolution :
Chaque équation peut être transformée en une **équation équivalente** par l'une des actions suivantes :
1) En développant et réduisant chacune des deux membres.
2) En additionnant ou soustrayant le même nombre à chacune des deux membres.
3) En multipliant ou divisant par le même nombre différent de zéro chacune des deux membres.

Exemple :

$9 \cdot (7 + 3 \cdot x) = 5 \cdot (2 \cdot x + 11 + 3 \cdot x)$	peut être transformée par la règle (1) en :
$63 + 27 \cdot x = 25 \cdot x + 55$	qui peut être transformée par la règle (2) en soustrayant 63 - 25 $\cdot x$ des deux côtés :
$2 \cdot x = -12$	qui peut être être transformée par la règle (3) en divisant par 2 des deux côtés.
$x = -6$	Ceci nous montre quelle valeur doit prendre le nombre inconnu x pour satisfaire l'équation initiale.

Une équation ("visible") cache les solutions x ("invisibles"), de la même manière que la forme d'un arbre (visible) laisse deviner la forme (invisible) de ses racines. Pour cette raison les Arabes appellent **racines** les solutions x d'une équation, vocabulaire encore utilisé de nos jours.

VII.2 Equation du premier degré (à une inconnue)

Une **équation du premier degré à une inconnue** est une équation dans laquelle le nombre inconnu x n'apparaît ni sous une racine, ni au dénominateur, ni à une puissance autre que 1, etc.
Plus précisément, c'est une équation que l'on peut transformer en appliquant les trois règles ci-dessus en une **équation équivalente** du style : $a \cdot x + b = 0$ où a et b sont deux nombres réels !

Les exemples (1) et (2) ci-dessus sont des exemples d'équation du premier degré à une inconnue.

VII.3 Equation du deuxième degré (à une inconnue)

Une **équation du deuxième degré à une inconnue** est une équation que l'on peut transformer, en appliquant les trois règles ci-dessus, en une **équation équivalente** du style : $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$
où a, b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$, x étant le nombre recherché.

Remarque : $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ est appelé un trinôme du deuxième degré.

Résolvez ces équations du deuxième degré :

1) $x^2+6x+8=0$ <=> $(x+2)\cdot(x+4)=0$ <=> $S=\{-4\ ;\ -2\}$

Autre approche : $x^2+6x+8=0$ <=> $x^2+6x+9=1$ <=> $(x+3)^2=1$ <=> $x+3=\pm 1$ <=> $S=\{-4\ ;\ -2\}$

2) $x^2+6x+7=0$ <=> $x^2+6x+9=2$ <=> $(x+3)^2=2$ <=> $x+3=\pm\sqrt{2}$ <=> $S=\{-3-\sqrt{2}\ ;\ -3+\sqrt{2}\}$

3) $x^2-6x+4=0$ <=> $x^2-6x+9=5$ <=> $(x-3)^2=5$ <=> $x-3=\pm\sqrt{5}$ <=> $S=\{3-\sqrt{5}\ ;\ 3+\sqrt{5}\}$

4) $x^2+6x+8=1$ <=> $x^2+6x+7=0$, c.f. 2)

5) $x^2+6x+10=0$ <=> $x^2+6x+9=-1$ <=> $(x+3)^2=-1$ <=> $S=\emptyset$.

Le carré d'un nombre réel, ne peut pas être négatif.

6) $x^2+7x+9=4$ <=> $x^2+7x+12{,}25=7{,}25$ <=> $(x+3{,}5)^2=7{,}25$ <=> $x+3{,}5=\pm\sqrt{7{,}25}$ <=> $S=\{-3{,}5-\sqrt{7{,}25}\ ;\ -3{,}5+\sqrt{7{,}25}\}$

7) $3x^2+18x+7=0$ <=> $3\cdot(x^2+6x+9)=20$ <=> $3\cdot(x+3)^2=20$ <=> $(x+3)^2=\dfrac{20}{3}$ <=>

$x+3=\pm\sqrt{\dfrac{20}{3}}$ <=> $S=\left\{-3-\sqrt{\dfrac{20}{3}}\ ;\ -3+\sqrt{\dfrac{20}{3}}\right\}$

La notation $S=\left\{-3-\dfrac{\sqrt{60}}{3}\ ;\ -3+\dfrac{\sqrt{60}}{3}\right\}$ est préférable.

Formule générale de résolution d'une équation du second degré.

On désire résoudre l'équation : $\boxed{a\cdot x^2+b\cdot x+c=0}$ avec $a \neq 0$.

1) On calcule la valeur du **discriminant** qui se note : Δ et qui vaut $\boxed{\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c}$.
Δ se lit "**delta**".

2) On a trois cas possibles :

° Si $\boxed{\Delta < 0}$, alors l'équation ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$.

° Si $\boxed{\Delta = 0}$, alors l'équation possède une unique solution qui est : $\boxed{x_1 = -\frac{b}{2a}}$.

Dans ce cas, on a la factorisation : $a\cdot x^2+b\cdot x+c = a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

° Si $\boxed{\Delta > 0}$, alors l'équation possède deux solutions qui sont : $\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$.

Dans ce cas, on a la factorisation : $a\cdot x^2+b\cdot x+c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

On dit que ces solutions sont obtenue à l'aide de "**La Formule de Viète**".

Exercice :
Vérifiez que vous retrouvez les solutions trouvées à la page précédente, avec cette "Formule de Viète".

1) $x^2+6x+8=0$ $a = 1$; $b = 6$; $c = 8$; $\Delta = 6^2 - 4\cdot1\cdot8 = 4 \Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow S=\{-4\ ;\ -2\}$

2) $x^2+6x+7=0$ $a = 1$; $b = 6$; $c = 7$; $\Delta = 6^2 - 4\cdot1\cdot7 = 8 \Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{8}}{2} \Rightarrow$
$S=\{-3-\sqrt{2}\ ;\ -3+\sqrt{2}\}$

3) $x^2-6x+4=0$ $a = 1$; $b = -6$; $c = 4$; $\Delta = (-6)^2 - 4\cdot1\cdot4 = 20 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{20}}{2} \Rightarrow$
$S=\{3-\sqrt{5}\ ;\ 3+\sqrt{5}\}$

4) $x^2+5x+6{,}25=2$ $a = 1$; $b = 5$; $c = 4{,}25$; $\Delta = 5^2 - 4\cdot1\cdot4{,}25 = 8 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{8}}{2} \Rightarrow$
$S=\{-2{,}5-\sqrt{2}\ ;\ -2{,}5+\sqrt{2}\}$

5) $x^2+5x+4{,}25=0$ c.f. 4)

6) $x^2+7x+9=4$ $a = 1$; $b = 7$; $c = 5$; $\Delta = 7^2 - 4\cdot1\cdot5 = 29 \Rightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{29}}{2} \Rightarrow$
$S=\{-3{,}5-\sqrt{7{,}25}\ ;\ -3{,}5+\sqrt{7{,}25}\}$

7) $3x^2+18x+7=0$ $a = 3$; $b = 18$; $c = 7$; $\Delta = 18^2 - 4\cdot3\cdot7 = 240 \Rightarrow x=\frac{-18\pm\sqrt{240}}{6} \Rightarrow$
$S=\left\{-3-\frac{\sqrt{60}}{3}\ ;\ -3+\frac{\sqrt{20}}{3}\right\}$.


François Viète
(1540-1603)

C'est au juriste François Viète que l'on doit cette méthode générale de résolution des équations du deuxième degré.
Il imagina une *« logistique spécieuse »*, dont les principes font de lui un créateur des mathématiques modernes : il utilise des lettres majuscules latines pour représenter les grandeurs, les voyelles désignant les inconnues, les consonnes les données.

Exercice 1:

Déterminez les racines des équations suivantes, après avoir soigneusement identifié les paramètres $a\ ;\ b\ ;\ c$:

a) $5x^2-13x+20=0$ $a=5$; $b=-13$; $c=20$; $\Delta=(-13)^2-4\cdot5\cdot20=-231 \Rightarrow S=\varnothing$.

b) $-15x^2+14x+7=0$ $a=-15$; $b=14$; $c=7$; $\Delta=14^2-4\cdot(-15)\cdot7=616 \Rightarrow x=\dfrac{-14\pm\sqrt{616}}{-30} \Rightarrow$

$S=\left\{\dfrac{7-\sqrt{154}}{15}\ ;\ \dfrac{7+\sqrt{154}}{15}\right\}$.

c) $169-26x+x^2=0$ $a=1$; $b=-26$; $c=169$; $\Delta=(-26)^2-4\cdot1\cdot169=0 \Rightarrow x=\dfrac{26\pm\sqrt{0}}{2} \Rightarrow$

$S=\{13\}$.

Exercice 2:

Supposons qu'un trinôme $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ possède un discriminant $\Delta\geq0$ et donc les racines :

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

1) En substituant x_1 et x_2 par les expressions ci-dessus, montrez que $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$ et $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.
2) En développant l'expression $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, montrez qu'elle est égale à $a\cdot x^2-a\cdot(x_1+x_2)\cdot x+a\cdot x_1\cdot x_2$.
3) En utilisant les résultats des points 1) et 2), montrez que : $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$.
4) Comment s'appelle le passage de " $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ " à " $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ " ?

1) $x_1+x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2b}{2a}=\dfrac{-b}{a}$

$x_1\cdot x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{(-b)^2-\Delta}{4a^2}=\dfrac{b^2-(b^2-4\cdot a\cdot c)}{4a^2}=\dfrac{c}{a}$

On a utilisé la 3ème identité remarquable : $\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)\cdot\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)=(-b)^2-\Delta$.

2) $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=a\cdot\left(x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2\right)=a\cdot x^2-a\cdot(x_1+x_2)\cdot x+a\cdot x_1\cdot x_2$

3) On continue les égalités :

$a\cdot x^2-a\cdot(x_1+x_2)\cdot x+a\cdot x_1\cdot x_2=a\cdot x^2-a\cdot\dfrac{-b}{a}\cdot x+a\cdot\dfrac{c}{a}=a\cdot x^2+b\cdot x+c$.

4) Le passage de " $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ " à " $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ " s'appelle une **factorisation**.

Donc résoudre : $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ revient à résoudre : $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$.

Cette deuxième équation se résout de manière évidente : $S=\{x_1\ ;\ x_2\}$.

VIII. Equation à plusieurs inconnues

Parfois un problème demande de résoudre un système de deux équations à deux inconnues, ou même trois équations à trois inconnues ou plus...

Voici trois méthodes pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues.
Nous noterons x et y les deux inconnues.

1) Méthode par comparaison.
Si l'équation n°1 s'écrit sous la forme : y = expression n°1 dépendante de x, mais pas de y
et l'équation n°2 s'écrit sous la forme : y = expression n°2 dépendante de x, mais pas de y,
alors on se ramène à une équation ne contenant que l'inconnue x :

expression n°1 dépendante de x = expression n°2 dépendante de x

Exemple : $\begin{cases} y = 3x^2 + x + 9 \\ y = 2x^2 + 6x + 3 \end{cases}$

Ce système se simplifie en une seule équation : $3x^2 + x + 9 = 2x^2 + 6x + 3$.

Donc : $x^2 - 5x + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)\cdot(x-3) = 0$, donc $x = 2$ ou $x = 3$.

Donc $y = 3\cdot 2^2 + 2 + 9 = 23$ ou $y = 3\cdot 3^2 + 3 + 9 = 39$. $S = \{\ (2\,;3)\ ;\ (3\,;39)\ \}$.

2) Méthode par substitution.
Si l'une des équations peut s'écrire sous la forme : y = expression dépendante de x, mais pas de y,
alors on peut remplacer l'inconnue y de l'autre équation par l'expression dépendante de x, mais pas de y.

Exemple : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x + 1 \end{cases}$

Ce système se simplifie en une seule équation : $x^2 + (x+1)^2 = 25$.

Donc : $x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + 2x - 24 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+4)\cdot(x-3) = 0$.

Donc $x = -4$ ou $x = 3$ et $y = -4 + 1 = -3$ ou $y = 3 + 1 = 4$. $S = \{\ (-4\,;-3)\ ;\ (3\,;4)\ \}$.

3) Méthode par addition.
L'addition des membres de gauche des deux équations doit être égale à l'addition des membres de droite des deux équations. Donc, si après transformation, ces additions font disparaître une inconnue, il ne reste plus qu'une équation à une inconnue.

Exemple : $\begin{cases} 5x + 8y = 6 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$

On commence par transformer : $\begin{cases} 5x + 8y = 6 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}\begin{Vmatrix} \cdot\ 3 \\ \cdot(-5) \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 24y = 18 \\ -15x - 20y = -10 \end{cases}$

Par addition des membres : $0 + 4y = 8$

Donc $y = 2$. Ensuite, il faut résoudre une autre équation à une inconnue : $3x + 4\cdot 2 = 2 \;\Rightarrow\; x = -2$

La solution finale est : $S = \{\ (2\,;-2)\ \}$.

Voici quelques histoires tirés du livre "Les énigmes de Shéhérazade", de Raymond Smullyan.
L'idée est que le conte des "mille et une nuits" a une suite et que la fille Shéhérazade du grand vizir continue de raconter des histoires au Sultan, qui se présentent sous formes d'énigmes. En voici quelques-unes :

Voici le premier récit : "Qu'est-ce ?"
"Bienveillant Souverain", commença Shéhérazade lors de cette nuit mémorable, "voici une première énigme : qu'est-ce qui est plus grand qu'Allah et que mangent les morts, alors que les vivants meurent s'ils en font autant ?"

- Attends! dit le roi, cette énigme n'a pas de réponse ! Rien n'est plus grand qu'Allah, ce serait blasphémer que de prétendre le contraire!
- Je ne blasphème point, répliqua Shéhérazade, et vous venez de résoudre l'énigme.
- Nom d'un narguilé, que veux-tu dire ? s'exclama le roi.

Quelle est la solution à l'énigme de Shéhérazade ?

La mule d'Hassan (n°19)

- Hassan possédait une mule. Un jour qu'on lui demandait l'âge de sa mule, il répondit par une énigme. "Dans quatre ans, elle sera trois fois plus âgée qu'elle ne l'était il y a quatre ans."

Quel était donc l'âge de la mule ?

Quelle est la distance ? (n°25)

- Un jour, un chat partit de chez lui, à une vitesse de trois milles à l'heure. Se rendant soudain compte qu'il était temps de manger, il revint en trottinant deux fois plus vite. En tout, il s'était absenté un quart d'heure.

Quelle distance avait-il parcouru ?

Combien y a-t-il de souris ? (n°26)
Une autre, demanda le roi.

- Fort bien. Ce même chat était un très bon chasseur de souris. Le premier jour, il attrapa le tiers des souris. Le lendemain, il mit la patte sur le tiers des souris restantes et fit de même le troisième jour. Le quatrième jour, il coinça les huit dernières souris.

Combien de souris avait-il au départ ?

Quel âge ont-ils ? (n°63)

- Deux frères ont onze ans à eux deux. L'un a dix ans de plus que l'autre. Quel âge ont-ils chacun ?
- Allons, dit le roi, Je ne t'ai pas demandé une énigme aussi simple !

Quels sont leurs âges ?

Tout le monde n'est pas honnête ! (n°65)
Un groupe d'amis prend un repas dans une auberge. Ils décident de partager équitablement l'addition qui s'élève à vingt-quatre pièces de même valeur. Or ils s'aperçoivent que deux d'entre eux se sont éclipsés sans payer leur part. Chacun de ceux qui restent doit payer une pièce de plus.
A l'origine, combien d'amis y avait-il dans ce groupe ?