I. Nombres entiers, rationnels et irrationnels

Qu'est-ce qu'un nombre ?
Définition selon le petit Larousse illustré de 1997.
Nombre : Notion fondamentale des mathématiques, qui permet de dénombrer, de classer les objets ou de mesurer les grandeurs mais **qui ne peut faire l'objet d'une définition stricte**.

I.1 Ensembles particuliers de nombres

1. L'ensemble des **nombres entiers positifs** : $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,5,...\}$

- Avec le zéro : $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,...\}$
- Opérations de base : L'addition (+), La multiplication (x) et La relation d'ordre ($\leq$)
  Opérations secondaires : La soustraction (-) et La division ($\div$)
  Défauts :
  i) La soustraction de deux nombres dans $\mathbb{N}$ ne donne pas toujours un résultat dans $\mathbb{N}$.
  ii) La division de deux nombres dans $\mathbb{N}$ ne donne pas toujours un résultat dans $\mathbb{N}$.

2. L'ensemble des **nombres entiers** : $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$
- Opérations de base : L'addition (+), La multiplication (x) et La relation d'ordre ($\leq$)
  Opérations secondaires : La soustraction (-) et La division ($\div$)
  Avantage : La soustraction de deux nombres dans $\mathbb{Z}$ donne toujours un résultat dans $\mathbb{Z}$.
  Défaut : La division de deux nombres dans $\mathbb{Z}$ ne donne pas toujours un résultat dans $\mathbb{Z}$.

3. L'ensemble des **nombres rationnels** :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ tel que } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\text{, avec la convention que } \frac{a}{b} = \frac{p}{q} \text{ si } a \cdot q = b \cdot p \right\}$$

- $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ tel que } p \cdot q \geq 0 \right\}$, $\mathbb{Q}_- = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ tel que } p \cdot q \leq 0 \right\}$
- Opérations de base : L'addition (+), La multiplication (x) et La relation d'ordre ($\leq$)
  Opérations secondaires : La soustraction (-) et La division ($\div$)
  Avantages :
  i) La soustraction de deux nombres dans $\mathbb{Q}$ donne toujours un résultat dans $\mathbb{Q}$.
  ii) La division d'un nombre de $\mathbb{Q}$ par un nombre de $\mathbb{Q}^*$ donne toujours un résultat dans $\mathbb{Q}$.
  Défauts :
  Beaucoup de problèmes ne possèdent pas de solution dans $\mathbb{Q}$, bien qu'il existe des nombres rationnels qui donnent une bonne approximation de la solution exacte.
  Exemples :

$x^2 = 2$ 1,414 n'est pas une solution exacte mais $\pm 1{,}414$ est une solution approchée car $1{,}414^2 \approx 2$

$x = 1 + \frac{1}{x}$ (à résoudre plus tard).

Un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ est tel que, lorsqu'on effectue la division $\frac{p}{q}$, le résultat est toujours un nombre dont la partie décimale est **illimitée périodique**.

4. L'ensemble des **nombres réels** : $\mathbb{R}$

   Une définition précise de cet ensemble a nécessité plus de 2000 ans d'histoire des mathématiques. On peut dire que l'ensemble des nombres réels correspond à tous les nombres à virgule, que la partie décimale soit illimitée périodique ou illimitée non périodique.

- ♦ $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq 0 \}$, $\mathbb{R}_- = \{ x \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq 0 \}$
- ♦ Opérations de base : L'addition (+), La multiplication (x) et La relation d'ordre ($\leq$)
  Opérations secondaires : La soustraction (-) et La division ($\div$)

<u>Avantages :</u>

i) La soustraction de deux nombres dans $\mathbb{R}$ donne toujours un résultat dans $\mathbb{R}$.

ii) La division d'un nombre de $\mathbb{R}$ par un nombre de $\mathbb{R}^*$ donne toujours un résultat dans $\mathbb{R}$.

iii) Presque tous les problèmes qui ne possèdent pas de solutions dans $\mathbb{Q}$, bien qu'il existe des nombres rationnels qui soient extrêmement proches d'une solution, ont une solution dans $\mathbb{R}$.
Exemple : $x^2 = 2$ admet pour <u>solution exacte</u> $\pm\sqrt{2}$

<u>Défauts :</u>

Certains problèmes ne possèdent pas de solution dans $\mathbb{R}$, bien qu'ils aient une solution dans de plus grands ensembles de nombres.
Exemples : $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ mais possède une solution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Nous ne définirons pas cet ensemble.

<u>Définition :</u> Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**. Exemples : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π .
Autrement dit :

Un nombre irrationnel est un nombre dont la partie décimale est **illimitée non périodique** .

I.2 Intervalles fermés et ouverts

Certains sous-ensembles des nombres réels sont très souvent utilisés, ce sont les **intervalles**.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$

Intervalle fermé : $[a; b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$
= **l'ensemble des nombres réels "x" tels que le nombre "a" soit plus petit ou égal au nombre "x" et le nombre "x" soit plus petit ou égal au nombre "b".**

Intervalle ouvert : $]a; b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$
= **l'ensemble des "x" réels tels que "a" soit plus petit que "x" et "x" soit plus petit que "b".**

Intervalle **fermé à gauche**, **ouvert à droite** : $[a; b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$
Intervalle **ouvert à gauche**, **fermé à droite** : $]a; b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$

Intervalle allant jusqu'à **l'infini** :
$]a; \infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \}$
$[a; \infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \}$
$]-\infty; a[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$
$]-\infty; a] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \}$
$]-\infty; \infty[= \{ x \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$

Du côté de l'infini, l'intervalle est toujours ouvert, car l'infini n'est pas un nombre réel.
(L'infini n'est pas un point sur la droite des nombres réels.)

I.3 Propriétés des opérations dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$

Dans les quatre cas, l'addition (+) :

(1) est une **opération interne** : La somme de deux nombres reste dans le même ensemble.

(2) est **associative** : (a + b) + c = a + (b + c)   (les parenthèses ne sont donc pas nécessaires)

(3) est **commutative** : a + b = b + a

(4) possède un **élément neutre** : 0 + a = a   (0 est l'élément neutre de l'addition)

Dans les quatre cas, la multiplication (x) :

(1) est une **opération interne** : Le produit de deux nombres reste dans le même ensemble.

(2) est **associative** : (a · b) · c = a · (b · c)   (les parenthèses ne sont donc pas nécessaires)

(3) est **commutative** : a · b = b · a

(4) possède un **élément neutre** : 1 · a = a   (1 est l'élément neutre de la multiplication)

<u>Remarque :</u>
Ni la soustraction ni la division ne possèdent ces propriétés, c'est la raison pour laquelle ce sont des opérations secondaires.

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition : a · (b + c) = a · b + a · c

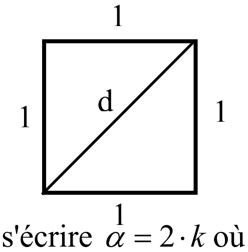
Dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$, chaque nombre possède un **opposé** : "- a" est l'opposé de "a" car a + (- a) = 0

Dans $\mathbb{Q}^*$, et $\mathbb{R}^*$, chaque nombre possède un **inverse** : $\frac{1}{a}$ est l'inverse de "a" car $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

<u>Règle des signes dans la multiplication :</u>

positif fois positif = positif
positif fois négatif = négatif
négatif fois positif = négatif
négatif fois négatif = positif

I.4 Montrons que le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel



Voici le problème de géométrie qui motive l'étude de ce nombre.
Dans un carré de côtés de longueurs 1, étudions la longueur de sa diagonale.

Par le théorème de Pythagore, on obtient : $d = \sqrt{2}$.

Avant de commencer la démonstration, précisons que tout nombre pair α peut s'écrire $\alpha = 2 \cdot k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Cette démonstration est une "démonstration par l'absurde" : on part d'une hypothèse que la conclusion de la démonstration finit par contredire. Or, **comme une assertion ne peut pas à la fois être vraie et fausse**, la contradiction obtenue signifie que l'hypothèse de départ était fausse.

Hypothèse : supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, donc on peut l'écrire sous forme de fraction :

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ **fraction que l'on a rendue irréductible**, c'est-à-dire **p et q premiers entre eux**.

Par élévation au carré :

$2 = \frac{p^2}{q^2}$ ce qui implique $2 \cdot q^2 = p^2$

Le premier membre $2 \cdot q^2$ étant pair, le second p^2 l'est aussi

Comme $p^2 = p \cdot p$ est un nombre pair, p est nécessairement un nombre pair : $p = 2 \cdot k$

La fraction de départ étant irréductible, puisque p est pair, q est impair **(sinon, on pourrait simplifier $\frac{p}{q}$)**

L'équation s'écrit maintenant $2 \cdot q^2 = 4 \cdot k^2$

Donc : $q^2 = 2 \cdot k^2$ ce qui signifie que q^2 est un nombre pair

Comme $q^2 = q \cdot q$ est un nombre pair, q est nécessairement un nombre pair .

La contradiction est soulignée : **un nombre ne peut pas être simultanément pair et impair.**

Notre hypothèse de départ nous a amené à une contradiction flagrante : elle est donc fausse.

Conclusion :

L'hypothèse $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux est fausse,

donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, de partie décimale illimitée non périodique $\sqrt{2} \approx 1,414.......$

Remarque :

On montre de la même manière que, si une racine d'un nombre entier ne donne pas un nombre entier, alors le résultat est un nombre irrationnel.

Exemples :

$\sqrt{25}$ est un nombre rationnel $\left(\sqrt{25} = 5\right)$ alors que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel $\left(\sqrt{3} \approx 1,732...\right)$

II. Puissances et radicaux

Définition : Soit **n** un entier strictement positif ($\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$) et **a** un nombre réel ($\mathbf{a} \in \mathbb{R}$).
La **n**$^{\text{ème}}$ **puissance** de **a** est le produit de **n** facteurs égaux au nombre **a**.
On la note $\mathbf{a^n}$ et on dit **"a puissance n".**
a s'appelle la **base** et **n** l'**exposant**.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fois}}$$

Exemples : 3^5 se lit "3 puissance 5" et est égale à : $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$
5^3 se lit "5 puissance 3" et est égale à : $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Les deux propriétés principales des puissances sont :
Pour **n, m** $\in \mathbb{N}^*$: $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ et $\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}}$
Elles sont facile à vérifier :

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fois}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m fois}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n+m fois}} = a^{n+m}$$

$$\left(a^n\right)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{\text{m fois}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n·m fois}} = a^{n \cdot m}$$

1) On désire étendre la définition de puissance pour des exposants qui appartiennent à des ensembles plus grands que $\mathbb{N}$, c.-à-d. pour des entiers relatifs, des fractions, des réels, etc.
Naturellement, les deux propriétés ci-dessus doivent rester valables.
Si on veut que $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$, il faut définir $\boxed{a^0 = 1}$ (c'est possible seulement si $a \neq 0$).

Si on veut que $a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$, il faut définir $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ (c'est possible seulement si $a \neq 0$).

Donc, on a étendu la définition de puissance d'un nombre pour tout exposant entier, qu'il soit positif, négatif ou nul.

2) Si la règle "puissance d'une puissance" doit s'appliquer : $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$,

il faut définir $a^{\frac{1}{n}}$ comme étant un nombre, qui mis à la puissance **n**, donne **a**.

Est-ce toujours possible ?
Dans l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$), la réponse dépend du signe de la base **a** et de la parité de l'exposant **n**.
Si l'*exposant* **n** est *impair*, alors
il existe toujours un unique nombre réel, qui mis à la puissance **n,** est égal à **a**.
Si l'*exposant* **n** est *pair* et que la *base* **a** est *négative*, alors
il **n'existe pas** de nombre réel qui mis à la puissance **n,** est égal à **a**.
Si l'*exposant* **n** est *pair* et que la *base* **a** est *positive*, alors
il **existe deux** nombres réels qui mis à la puissance **n,** sont égaux à **a**.
L'un des deux est négatif, l'autre est positif.
Nous ne montrerons pas ces affirmations.

<u>Définitions et notations :</u>

Pour **n** entier positif (**n** $\in \mathbb{N}^*$) et **a** réel (**a** $\in \mathbb{R}$),

Si **n** est *impair*, on note $\boxed{\sqrt[n]{a}}$ cet unique nombre réel, qui mis à la puissance **n**, donne **a**.

Si **n** est *pair* et **a** <u>positif</u>, on note $\boxed{\sqrt[n]{a}}$ le nombre réel <u>positif</u>, qui mis à la puissance **n**, donne **a**.

$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \text{ si } \mathbf{n} \text{ est impair ou si } \mathbf{a} \text{ est positif}}$ et $\boxed{\sqrt[n]{0} = 0}$

<u>En symboles</u> :

Si on veut que $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$, il faut définir $\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$

et donc aussi $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$

mais cela n'est possible que si **a** est un nombre réel positif ou nul, ou si **n** est impair.

On a étendu la définition de puissance d'un nombre pour des exposants rationnels.
Il est possible d'étendre la définition de puissance pour des exposants réels, nous l'admettrons sans plus.

<u>En résumé, nous avons les définitions suivantes :</u>

Pour **n, m** $\in \mathbb{N}^*$, **p, q, r, s** $\in \mathbb{Q}$ et **a**, **b**, **c** $\in \mathbb{R}$, (parfois il faut se restreindre à **a**, **b**, **c** $\in \mathbb{R}_+^*$)

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fois}}$, $a^0 = 1$ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, ici, la base **a** peut être négative, mais pas nulle.

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ et $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ (Si **n** est *pair*, il faut se restreindre à une base **a** ≥ 0)

<u>Propriétés</u> :

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ et donc aussi $a^p \cdot a^q \cdot a^r = a^{p+q+r}$, $a^p \cdot a^q \cdot a^r \cdot a^s = a^{p+q+r+s}$ etc.

$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ et donc aussi $(a \cdot b \cdot c)^p = a^p \cdot b^p \cdot c^p$ etc.

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$ $a^0 = 1$ si $a \neq 0$ 0^0 n'est pas défini.

$\left(a^p\right)^q = \left(a^q\right)^p = a^{p \cdot q}$ $0^p = 0$ si $p > 0$ 0^p n'est pas défini si $p \leq 0$

$\dfrac{1}{a^q} = a^{-q}$ $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

Dans ce qui suit : (**n** et **m** *impairs*) <u>ou</u> (**a** ≥ 0 et **b** ≥ 0)

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ ici **a** doit être positif ou nul.

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$

$b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a}$ $\sqrt[m \cdot n]{a^{m \cdot p}} = a^{\frac{m \cdot p}{m \cdot n}} = a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$

VRAI ou FAUX ? : 1) si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt{a^2} = a$

III. Nombres décimaux et puissances de dix

Remarque :
Un même nombre peut s'écrire de beaucoup de manières différentes. Par exemple, voici plusieurs manières de représenter le même nombre :

$$\frac{4+3}{40'000} = \frac{7}{40'000} = \frac{7}{200^2} = \frac{7}{2^6 \cdot 5^4} = 0,000175 = 1,75 \cdot 10^{-4} = 175 \cdot 10^{-6} = 5^2 \cdot 7 \cdot 10^{-6}$$

Chaque écriture possède ses avantages et ses inconvénients, selon le contexte.
Il est important de savoir passer de l'une à l'autre.

Pour additionner et soustraire, l'écriture décimale est généralement la plus simple.
Pour multiplier et diviser, l'écriture fractionnaire est souvent la plus simple, surtout si on décompose le numérateur et le dénominateur en produit de nombres premiers.

La notation scientifique :
Une écriture souvent utilisée est la **notation scientifique**, qui consiste à écrire un nombre sous forme décimale multiplié par une puissance de dix (10).
La **notation scientifique** s'écrit sous la forme $\boldsymbol{a} \cdot 10^n$ où **a** est un nombre décimal compris entre 1 et 10 : $1 \le \mathbf{a} < 10$ et **n** un nombre entier relatif.
Exemples : $1,75 \cdot 10^{-4}$; $7,123 \cdot 10^{12}$; $9,99 \cdot 10^{-10}$; 10^8

Cette manière de faire est utile sur votre calculatrice, pour afficher un maximum de chiffres significatifs d'un nombre. Calculez par exemple $\frac{355}{113'000'000} \approx 0,000003142 \approx 3,1415922 \cdot 10^{-6}$. La dernière écriture donne plus d'information sur l'approximation décimale de la fraction.

Simplification de fractions :
Dans des fractions faisant intervenir des nombres décimaux avec beaucoup de zéros, les simplifications sont plus aisées si l'on utilise l'écriture comportant des puissances de dix et si l'on décompose les nombres en facteurs premiers.
Exemple :

$$\frac{0,000006 \cdot 105'000 \cdot 0,0081}{21'000 \cdot 0,00027} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 3^4 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 3^3 \cdot 10^{-5}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 10^3}{1} \cdot 10^{-6+3-4-3+5} = 10 \cdot 3^2 \cdot 10^{-5} = 9 \cdot 10^{-4}$$

Cette écriture permet de n'avoir que des nombres entiers et des puissances de dix. Ensuite, on décompose les nombres entiers en facteurs premiers, pour mieux identifier les simplifications possibles.
En additionnant les puissances de dix du numérateur et en soustrayant les puissances de dix du dénominateur, on obtient une unique puissance de dix, ce qui réduit le résultat final.

Remarque :
De nos jours, les machines à calculer permettent généralement d'effectuer ces calculs simplement, mais il faut faire attention à leurs limites :
1) Demandez $(0,009)^3 \cdot 0,12$ et notez le résultat : ....
2) Puis divisez 0,2187 par ce résultat, vous obtenez ....
3) Maintenant, demandez . $\frac{0,2187}{(0,009)^3 \cdot 0,12}$, vous obtenez .... Explication ???
La notation scientifique vous permet d'éviter ce genre d'erreur.

Un autre avantage de la notation scientifique est une simplification du calcul des puissances.
$(0,03)^4 = 0,00000081 = (3 \cdot 10^{-2})^4 = 81 \cdot 10^{-8}$ La dernière notation du résultat est plus agréable que la deuxième.

IV. Les identités remarquables

Définitions :
On appelle **identité** l'égalité de deux expressions algébriques équivalentes, c'est-à-dire qui prennent la même valeur numérique **quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables**.

Voici quelques identités particulières, que l'on appelle **identités remarquables**.
Elles servent particulièrement à la factorisation et la simplification d'expressions.

Carré de la somme de deux termes : $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2}$

Carré de la différence de deux termes : $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2}$

Produit de la somme de deux termes par leur différence : $\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$

Voici la quatrième identité remarquable : $\boxed{(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + (a+b)\cdot x + a\cdot b}$

Exercices :
Vérifiez que :
a) Somme de deux cubes : $\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - a\cdot b + b^2)}$

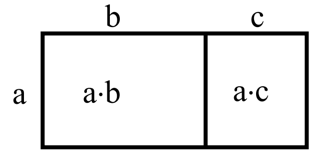
b) Différence de deux cubes : $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + a\cdot b + b^2)}$

Développez :
c) Cube de la somme de deux termes : $(a+b)^3 =$

d) Cube de la différence de deux termes : $(a-b)^3 =$

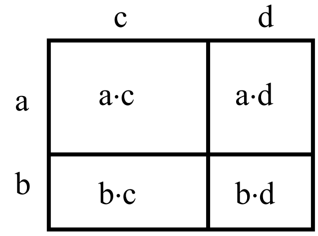
e) VRAI ou FAUX ? : $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Voici, pour ceux qui ont une vision géométrique, quelques identités remarquables vues de manière géométrique.



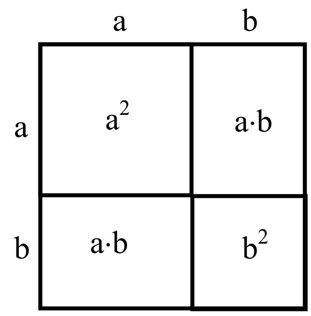
Commençons par **la distributivité** :
Aire du grand rectangle = somme des aires des deux rectangles.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$



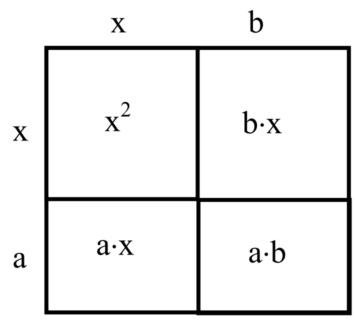
La double distributivité :
Aire du grand rectangle = somme des aires des quatre rectangles.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$



Carré de la somme de deux termes :
Aire du grand carré = somme des aires des deux carrés
plus les aires des deux rectangles.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



La quatrième identité remarquable :

$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b) \cdot x + a \cdot b$$

V. Factorisation

Développer est un processus qui transforme un *produit de facteurs* en une *somme de termes*. C'est simple à faire. Les calculs peuvent être longs.

Exemple : Développez l'expression : $(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)$

Quelle propriété de la multiplication avez-vous utilisée ?

Factoriser est le processus inverse, qui transforme une *somme de termes* en un *produit de facteurs*. C'est généralement plus compliqué à faire que de développer, mais plus utile.

Exemple : Factorisez l'expression : x^2+5x+6

Voici deux utilisations fréquentes de la factorisation :

1) **Factoriser peut servir à résoudre des équations.**

Résolvez l'équation : $x^3+5x^2+6x=0$

2) **Factoriser peut servir à simplifier des fractions.**

Simplifiez la fraction : $\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x+3}$

De manière générale, on cherche **toujours** à obtenir le **nombre maximum de facteurs possible**.

$x^4-y^4=(x^2+y^2)\cdot(x^2-y^2)$ est une factorisation incomplète **car il n'y a que deux facteurs,**
alors que :
$x^4-y^4=(x^2+y^2)\cdot(x+y)\cdot(x-y)$ est une factorisation complète, **car trois facteurs est le nombre maximum possible.**

Techniques de factorisation :
Il n'existe pas de recette pour factoriser à coup sûr une expression, mais uniquement divers moyens que l'on doit essayer successivement.
Voici ces principaux moyens :
1) Factorisation par mise en évidence.
C'est le processus inverse de la distributivité : $A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$

Factorisez : $x^3 y + xy^3$

Factorisez : $(x - y) \cdot (3a + 5b) + (x - y) \cdot (a - 2b)$

2) Factorisation par groupement de termes.
C'est le processus inverse de la double distributivité :
$$\underbrace{A \cdot C + A \cdot D}_{1er\ groupe} + \underbrace{B \cdot C + B \cdot D}_{2ème\ groupe} = A \cdot (C + D) + B \cdot (C + D) = \underbrace{(A + B) \cdot (C + D)}_{Produit\ de\ deux\ facteurs}$$

Remarquons que deux factorisations successives par mise en évidence ont été effectuées.
Aurions-nous pu grouper les termes autrement ?

Factorisez : $ax - by + ay - bx$

Factorisez : $x^3 + x^2 + x + 1$

3) Factorisation à l'aide des identités remarquables.
Factorisez :

a) $4x^2 + 12x + 9$

b) $x^2 - \frac{10}{6}x + \frac{25}{36}$

c) $x^3 y - xy^3$

d) $x^2 - 3x - 70$

Souvent, il faut combiner les trois méthodes pour factoriser toute l'expression algébrique.
Factorisez :
a) $(x + 1)^3 - 4 \cdot (x + 1)$

b) $4x^2 - 9 + (x + 5) \cdot (2x - 3)$

VI. Histoire : Origine de l'algèbre

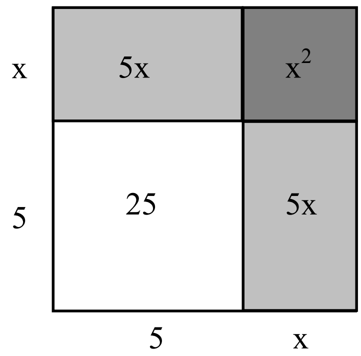
Les nombres rationnels et réels ont été définis plus de mille ans après que les premiers problèmes d'algèbre ont été résolus. C'est la civilisation grecque qui connaît la première grande floraison de talents mathématiques. A partir de l'époque d'Euclide (~300 ans av. J.-C.), **Alexandrie** devient le centre mondial des sciences. La ville est dévastée à trois reprises (par les Romains en 47 av. J.-C., par les Chrétiens en 392 après J.-C. et finalement par les Musulmans en 640), ce qui entraîna le déclin de cette civilisation.
A la suite du perfectionnement de l'écriture arabe (nécessaire à la rédaction du Coran), des écrivains arabes traduisent avidement les fragments des œuvres grecques (Euclide, Aristote, Platon, Archimède, Apollonius, Ptolémée), ainsi que l'arithmétique indienne, et lancent une nouvelle recherche en mathématiques.
Enfin, au temps des croisades (1100-1300), les Européens découvrent cette civilisation; Gherardo Cremonese (1114-11187), Robertus Castrensis (XII^{e} siècle), Leonardo da Pisa ("Fibonacci", vers 1200) et Regiomontanus (136-1476) sont les principaux traducteurs et les premiers scientifiques de la nouvelle ère.
A cette époque, les mathématiques sont nettement séparées : d'un côté *l'algèbre*, de l'autre la *géométrie*.

L'algèbre est un héritage culturel de l'Antiquité grecque et orientale. Le célèbre ouvrage "Al-jabr w'al muqâbala" (origine du mot "Algèbre") a été écrit vers 830 par Mahammed ben musa Al-Khowârizmî (origine du mot "Algorithme"). Il commence par la résolution d'une équation du second degré.

En écriture moderne, le travail d'Al-Khowârizmî est le suivant :
On cherche pour quel nombre x l'égalité suivante est réalisée : $x^2 + 10 \cdot x = 39$

Al-Khowârizmî résout ce problème géométriquement.

Il dessine la figure



Il cherche une valeur de x pour que la somme des aires "gris clair" plus "gris foncé" égale 39.
L'aire du carré de côté (x+5) vaut donc 39 + 25, mais aussi $(x + 5)^2$.
Al-Khowârizmî en déduit que $(x + 5)^2 = 64$ et donc que x = 3.

Les nombres négatifs n'existaient pas à cette époque, donc x = -13 n'était pas considéré comme solution.

Pour vous, il est maintenant simple de résoudre la deuxième équation Al-Khowârizmî : $x^2 + 21 = 10 \cdot x$,
que nous pouvons écrire de la manière suivante : $x^2 - 10 \cdot x = -21$
Il suffit d'ajouter 25 des deux côtés de l'égalité pour obtenir l'équation : $x^2 - 10 \cdot x + 25 = 4$
c.-à-d. l'équation : $(x-5)^2 = 4$
d'où on déduit facilement les deux solutions x = 3 et x = 7.

Al-Khowârizmî ne connaissait pas les nombres négatifs, donc pour lui l'équation s'écrivait : $x^2 + 21 = 10 \cdot x$
Il ne pouvait donc pas utiliser votre méthode de résolution.

La création des nombres négatifs a représenté un immense progrès puisqu'elle a permis d'appliquer une méthode de résolution identique à des problèmes apparemment différents.

VII. Equations à une inconnue

VII.1 Qu'est-ce qu'une équation ?

Dans une **équation à une inconnue**, on a deux expressions qui dépendent chacune d'un nombre inconnu représenté par une lettre, généralement x.
On se demande pour quelle(s) valeur(s) de ce nombre x, les deux expressions donnent le même résultat.
Dans une équation, ces deux expressions à égaliser sont appelés **les deux membres de l'équation.**

Exemples :

1) $5 \cdot x - 7 = 2 \cdot x + 2$
2) $9 \cdot (7 + 3 \cdot x) = 5 \cdot (2 \cdot x + 11 + 3 \cdot x)$
3) $x^{17} + 45 \cdot x^{11} - 12 \cdot x^3 + 3 = \sqrt{x^3 - 9 \cdot x + 2}$

Les deux premières équations sont simples à résoudre. La troisième ne peut être résolue que par approximation numérique.

Règles de résolution :
Chaque équation peut être transformée en une **équation équivalente** par l'une des actions suivantes :
1) En développant et réduisant chacune des deux membres.
2) En additionnant ou soustrayant le même nombre à chacune des deux membres.
3) En multipliant ou divisant par le même nombre différent de zéro chacune des deux membres.

Exemple :

$9 \cdot (7 + 3 \cdot x) = 5 \cdot (2 \cdot x + 11 + 3 \cdot x)$	peut être transformée par la règle (1) en :
$63 + 27 \cdot x = 25 \cdot x + 55$	qui peut être transformée par la règle (2) en soustrayant 63 - 25 $\cdot x$ des deux côtés :
$2 \cdot x = -12$	qui peut être être transformée par la règle (3) en divisant par 2 des deux côtés.
$x = -6$	Ceci nous montre quelle valeur doit prendre le nombre inconnu x pour satisfaire l'équation initiale.

Une équation ("visible") cache les solutions x ("invisibles"), de la même manière que la forme d'un arbre (visible) laisse deviner la forme (invisible) de ses racines. Pour cette raison les Arabes appellent **racines** les solutions x d'une équation, vocabulaire encore utilisé de nos jours.

VII.2 Equations du premier degré (à une inconnue)

Une **équation du premier degré à une inconnue** est une équation dans laquelle le nombre inconnu x n'apparaît ni sous une racine, ni au dénominateur, ni à une puissance autre que 1, etc.
Plus précisément, c'est une équation que l'on peut transformer en appliquant les trois règles ci-dessus en une **équation équivalente** du style : $a \cdot x + b = 0$ où a et b sont deux nombres réels !

Les exemples (1) et (2) ci-dessus sont des exemples d'équation du premier degré à une inconnue.

VII.3 Equations du deuxième degré (à une inconnue)

Une **équation du deuxième degré à une inconnue** est une équation que l'on peut transformer, en appliquant les trois règles ci-dessus, en une **équation équivalente** du style : $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ où a, b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$, x étant le nombre recherché.

Remarque : $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ est appelé un trinôme du deuxième degré.

Avant de chercher à résoudre de manière générale une équation du 2ème degré, examinons trois cas numériquement :

$3x^2+10x-8=0$	$25x^2-10x+1=0$	$9x^2+42x+59=0$

Exploitons ces trois exemples numériques pour en tirer une règle générale, afin de résoudre **l'équation littérale** $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ de paramètres $a\neq 0$; b et c :

$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ Division des deux membres de l'équation par $a\neq 0$

$\swarrow$

$x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}=0$ Astuce : Additionner $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}$ c'est-à-dire 0 au premier membre

$\swarrow$

$x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}+\underbrace{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}}_{0}=0$ Mise au dénominateur commun de termes choisis

$\swarrow$

$x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\underbrace{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}}_{0}+\frac{4ac}{4a^2}=0$ Identité remarquable + Regroupement des deux derniers termes

$\swarrow$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$ **Question :** peut-on utiliser la 3ème identité remarquable ?

Remarquons que le dénominateur $4a^2$ du deuxième terme est toujours positif, et de ce fait, tout dépend de l'expression b^2-4ac appelée **discriminant** et désignée par Δ : $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ est maintenant l'équation à discuter selon le signe du discriminant Δ.

Δ se lit "delta".

Premier cas : si $\Delta > 0$, on peut écrire

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$ Troisième identité remarquable

$\swarrow$

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$ Regroupement des fractions

$\swarrow$

$$\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$ Un produit de facteurs est nul $\Leftrightarrow$ ....

On doit donc avoir $\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$ ou $\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$

et chacune de ces équations du premier degré fournit une solution (racine) :

$\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$ fournit $x_1 = -\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

"Delta"

$\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$ fournit $x_2 = -\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ implique **DEUX RACINES DISTINCTES** données par la formule condensée $x_{1;2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Deuxième cas : si $\Delta = 0$, on peut écrire

$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ d'où $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)\cdot\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)=0$ qui fournit $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

$\Delta = 0$ implique **UNE RACINE DOUBLE** donnée par la formule condensée $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$

Troisième cas : si $\Delta < 0$, on peut écrire

$$\underbrace{\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0}\underbrace{-\frac{\Delta}{4a^2}}_{>0}}_{>0}=0$$

Il est évident que le premier membre ne peut pas être nul et que cette équation ne possède aucune solution.

$\Delta < 0$ implique **AUCUNE RACINE**

François Viète
(1540-1603)

C'est au juriste François Viète que l'on doit cette méthode générale de résolution des équations du deuxième degré.
Il imagina une *« logistique spécieuse »*, dont les principes font de lui un créateur des mathématiques modernes : il utilise des lettres majuscules latines pour représenter les grandeurs, les voyelles désignant les inconnues, les consonnes les données.

Exercice 1:

Déterminez les racines des équations suivantes, après avoir soigneusement identifié les paramètres $a\ ;\ b\ ;\ c$:

a) $5x^2 - 13x + 20 = 0$

b) $-15x^2 + 14x + 7 = 0$

c) $169 - 26x + x^2 = 0$

Exercice 2:

Supposons qu'un trinôme $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ possède un discriminant $\Delta \geq 0$ et donc deux racines, distinctes ou confondues : $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

1) Calculez $x_1 + x_2$ et $x_1 \cdot x_2$.

2) Développez et réduisez au maximum l'expression $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ en utilisant les formules ci-dessus et la définition du discriminant.

3) A quel résultat vous conduit le processus suivi en 1) ?

Index