❶ Notons x la longueur de la base, y la longueur de la hauteur et A l'aire du rectangle.
L'énoncé nous dit que :
$(x + 8) \cdot (y + 5) = A + 180$ [cm^2]
$(x + 3) \cdot (y - 4) = A - 30$ [cm^2]
$x \cdot y = A$
En développant et substituant A par $x \cdot y$ on obtient :
$x \cdot y + 8 \cdot y + 5 \cdot x + 40 = x \cdot y + 180$
$x \cdot y + 3 \cdot y - 4 \cdot x - 12 = x \cdot y - 30$
En simplifiant, on obtient le système : $\begin{cases} 5x + 8y = 140 \\ -4x + 3y = -18 \end{cases}$

En multipliant la première égalité par 4 et la deuxième par 5, on obtient : $\begin{cases} 20x + 32y = 560 \\ -20x + 15y = -90 \end{cases}$

En additionnant : $47\,y = 470$, donc
$y = 10$ [cm] et $5x + 8 \cdot 10 = 140$, $5x = 60$, $x = 12$ [cm]
Vérifiez votre solution !!! $(\mathit{12} + 8) \cdot (\mathit{10} + 5) = 300 = \mathit{120} + 180$ et $(\mathit{12} + 3) \cdot (\mathit{10} - 4) = 90 = \mathit{120} - 30$
Le rectangle mesure 12 centimètres de longueur et 10 centimètres de hauteur.

---

❷ Notons x le premier nombre, y le second nombre.
L'énoncé nous dit que :
$y = 2 \cdot x$ et
$x \cdot y = (x + y) / 2$
On substitue $y = 2 \cdot x$ dans la deuxième équation : $2 \cdot x^2 = (x + 2 \cdot x) / 2$
Donc $4 \cdot x^2 = 3 \cdot x$; $4 \cdot x^2 - 3 \cdot x = 0$
Par **factorisation** on obtient : $x \cdot (4\,x - 3) = 0$
Donc soit $x = 0$, soit $x = 3 / 4$.
Il y a deux solutions. Soit les deux nombres sont nuls, soit le premier vaut 3 / 4 et l'autre 3 / 2.
Vérifiez vos solutions !!!

---

❸ Notons x et y les longueurs deux cathètes et c la longueur de l'hypoténuse.
Pythagore => $x^2 + y^2 = c^2 = 1301$ [m^2]
$x \cdot y / 2 =$ aire $= 325$ [m^2]
On substitue $y = 650 / x$ dans la première équation : $x^2 + (650 / x)^2 = 1301$
On multiplie par x^2 des deux côtés : $x^4 + 650^2 = 1301\,x^2$
On obtient l'équation bicarrée : $x^4 - 1301\,x^2 + 650^2 = 0$
Elle peut se résoudre par Viète, en prenant x^2 comme inconnue.
$a = 1$; $b = -1301$; $c = 650^2$.
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1301^2 - 4 \cdot 1 \cdot 650^2 = 2601 = 51^2$
Donc $x^2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1301 \pm 51}{2} = \begin{cases} 676 \\ 625 \end{cases}$
Il y a quatre solutions, $x = -26$; $x = -25$; $x = 25$ $(y = 26)$; $x = 26$ $(y = 25)$
Mais les solutions négatives ne correspondent pas à des longueurs et les deux autres solutions sont symétriques. Donc il n'y a qu'une seule solution, les cathètes mesurent 25 et 26 mètres.
Vérifiez votre solution !!!

---

❹ Notons x le premier nombre, y le second nombre.
L'énoncé nous dit que :
$y = x + 1$ et
$x^2 + y^2 = 545$
On substitue $y = x + 1$ dans la deuxième équation : $x^2 + (x + 1)^2 = 545$.
On développe : $2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = 545$; $2x^2 + 2x - 544 = 0$
On simplifie par 2 : $x^2 + x - 272 = 0$
Par **factorisation** on obtient : $(x - 16) \cdot (x + 17) = 0$
On peut aussi utiliser Viète :
$a = 1$; $b = 1$; $c = -272$.
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1 + 4 \cdot 272 = 1089 = 33^2$
Donc $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 \pm 33}{2} = \begin{cases} -17 \\ 16 \end{cases}$ on retrouve les même solutions.
Il y a deux solutions :
Soit le premier nombre est -17 et le second est -16,
soit le premier nombre est 16 et le second est 17.
Vérifiez vos solutions !!!

---

❺ Notons x le premier nombre, $x + 1 =$ le second nombre et $x + 2 =$ le troisième nombre.
L'énoncé nous dit que :
$x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) = 21 \cdot (x + (x + 1) + (x + 2)) = 21 \cdot (3x + 3) = 63x + 63$
Développer est une très mauvaise idée : $x^3 + 3x^2 + 2x = 63x + 63$
On regroupe : $x^3 + 3x^2 - 61x - 63 = 0$ Ici, il est difficile de trouver le résultat.

Factoriser permet de résoudre le problème : $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) = 63 \cdot (x + 1)$
Soit $x = -1$, soit on simplifie pour obtenir : $x \cdot (x + 2) = 63$, donc $x^2 + 2x - 63 = 0$ etc.

Il est plus futé de rendre le problème symétrique :
Notons $y - 1$ le premier nombre, $y =$ le second nombre et $y + 1 =$ le troisième nombre.
L'énoncé nous dit que :
$(y - 1) \cdot y \cdot (y + 1) = 21 \cdot ((y - 1) + y + (y + 1)) = 21 \cdot (3y) = 63y$
On développe : $y \cdot (y^2 - 1) = 63y$
Cette équation est beaucoup plus simple à résoudre.
Soit $y = 0$, soit on simplifie par y.
$y^2 - 1 = 63$; $y^2 = 64$; donc $y = 8$ ou $y = -8$
Il y a trois solutions : les trois nombres sont soit $(-9 ; -8 ; -7)$ soit $(-1 ; 0 ; 1)$ soit $(7 ; 8 ; 9)$
Vérifiez vos solutions !!!

---

❻ Notons x le nombre cherché.
L'énoncé nous dit que :
$x + 2 \cdot \sqrt{x} = 48$
Il y a deux manières de résoudre ce problème.
Première résolution : $2 \cdot \sqrt{x} = 48 - x$ mis au carré : $4 \cdot x = 48^2 - 2 \cdot 48 \cdot x + x^2$
Ceci mène à l'équation du second degré : $x^2 - 100 \cdot x + 48^2 = 0$ $\Delta = 100^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48^2 = 784 = 28^2$
$x = (100 \pm 28) / 2$, $x = 36$ ou $x = 64$. En vérifiant, on voit que $x = 64$ n'est pas une bonne solution.
Deuxième résolution, plus simple : On pose $y = \sqrt{x}$
L'équation devient : $y^2 + 2y - 48 = 0$ $\Delta = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 48 = 196 = 14^2$
$y = (-2 \pm 14) / 2$, $y = 6$ ou $y = -8$, qui n'est pas une bonne solution car $y = \sqrt{x}$ doit être ≥ 0.
Il y a une seule solution. Le nombre cherché égale $x = y^2 = 36$.

En mettant les deux côtés d'une égalité au carré, on rajoute parfois des fausses solutions. Ceci montre l'importance de : "**Vérifiez vos solutions !!! "**

---

❼ Notons x le nombre cherché.

L'énoncé nous dit que : $\frac{5x-24}{6}+13=x$

On multiplie par 6 des deux côtés de l'égalité : $5x-24+78=6x$

On réduit : $54=x$

Il y a une seule solution. Le nombre x cherché égale 54.

Vérifiez votre solution

---

❽ Notons x/y le quotient cherché.

L'énoncé nous dit que : $\frac{x}{y}=\frac{x+15}{y+18}$ et $3\cdot\frac{x}{y}=\frac{x+55}{y+6}$

On multiplie la première égalité par $y\cdot(y+18)$ pour éliminer les dénominateurs.

Elle devient : $x\cdot(y+18)=y\cdot(x+15)$

On multiplie la deuxième égalité par $y\cdot(y+6)$ pour éliminer les dénominateurs.

Elle devient : $3x\cdot(y+6)=y\cdot(x+55)$

On développe les deux égalités : $x\cdot y+x\cdot 18=y\cdot x+y\cdot 15$ et $3x\cdot y+3x\cdot 6=y\cdot x+y\cdot 55$

On réduit : $18x=15y$ et $2xy+18x=55y$

On substitue les $x=15y/18=5y/6$ de la première égalité dans la deuxième : $\frac{10y^2}{6}+15y=55y$

On réduit cette nouvelle équation : $\frac{10y^2}{6}=40y$, donc $10y^2-240y=0$

On simplifie et factorise : $y\cdot(y-24)=0$

La solution $y=0$ doit être exclue, car y est le dénominateur d'un quotient.

$y=24$ et $x=5\cdot 24/6=20$.

Le quotient cherché est : $x/y=20/24$

---

❾ Notons x le chiffre des unités et y le chiffre des dizaines. Donc le nombre cherché s'écrit : $x+10y$.

L'énoncé nous dit que :

$x+y=12$

$(x+10y)^2+48=(y+10x)^2/3$ (le nombre renversé égale : $y+10x$)

On substitue $y=12-x$ dans la deuxième équation : $(x+10\cdot(12-x))^2+48=(12-x+10x)^2/3$.

On développe : $(120-9x)^2+48=(12+9x)^2/3$.

On développe plus : $120^2-2160x+81x^2+48=(144+216x+81x^2)/3$.

On simplifie : $120^2-2160x+81x^2+48=48+72x+27x^2$.

On simplifie : $54x^2-2232x+120^2=0$.

On simplifie par 18 : $3x^2-124x+800=0$. (cette étape n'est pas indispensable, mais simplifie un peu)

On peut aussi utiliser Viète :

$a=3$; $b=-124$; $c=800$.

$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=124^2-4\cdot 3\cdot 800=5776=76^2$

Donc $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{124\pm 76}{6}=\begin{cases}100/3\\8\end{cases}$ Comme x doit être un chiffre, seule la solution $x=8$ est valable. $y=12-x=4$. Le nombre cherché est : $\underline{\underline{48.}}$

Vérifiez votre solution, c'est particulièrement facile !!!

---

❿ Notons x la somme partagée, y la somme reçue par chacun.
L'énoncé nous dit que :
L'aîné reçoit : $y = x / 10 + 100$
Le second reçoit : $y = (x - y) / 10 + 200$
Le troisième reçoit : $y = (x - 2y) / 10 + 300$
Le quatrième reçoit : $y = (x - 3y) / 10 + 400$
etc.
On déduit des équations précédentes que :
$10y = x + 1000$
$11y = x + 2000$
$12y = x + 3000$
etc.
En faisant la différence de deux équations, on obtient : $y = 1000$. Donc $x = 9000$
Chacun reçoit une somme de 1000 francs, la somme partagée est de 9000 francs.
Il y a 9 enfants.
D'autres méthodes de résolution existent, mais elles demandent plus de calculs.

---

11) Notons x le chiffre des unités, y le chiffre des dizaines et z le chiffre des centaines.
Donc le nombre cherché s'écrit : $x + 10y + 100z$.
L'énoncé nous dit que :
1) $x + y + z = 18$
2) $y = (4/5) \cdot (x + z)$
3) $x + 10y + 100z = 100x + 10y + z + 396$

De 1), on tire que : $x + z = 18 - y$, substitué dans 2) donne : $y = (4/5) \cdot (18 - y)$, donc $y = 8$
De 3), on tire que : 3) $-99x + 99z = 396$, donc $-x + z = 4$.
Additionné à 1), on obtient : $2z = 18 - y + 4 = 14$, donc $z = 7$.
Finalement : $x = 18 - z - y = 18 - 7 - 8 = 3$.
Le nombre est donc 783.
On vérifie facilement que c'est la bonne réponse.

---

12) Notons x le chiffre des unités, y le chiffre des dizaines et z le chiffre des centaines.
Donc le nombre cherché s'écrit : $x + 10y + 100z$.
L'énoncé nous dit que :
1) $x + y + z = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x + z = 16 - y$
2) $100x + 10y + z + x + 10y + 100z = 1211 \quad \Leftrightarrow \quad 101(x + z) + 20y = 1211$
3) $100x + 10y + z - x - 10y - 100z = 297 \quad \Leftrightarrow \quad 99x - 99z = 297 \quad \Leftrightarrow \quad x - z = 3$

De 1), on tire que : $x + z = 16 - y$, substitué dans 2) donne : $101 \cdot (16 - y) + 20y = 1211$, donc $y = 5$
De 3), on tire que : 3) $x - z = 3$.
Additionné à 1), on obtient : $2x = 16 - y + 3 = 14$, donc $x = 7$.
Finalement : $z = 16 - x - y = 16 - 7 - 5 = 4$.
Le nombre est donc 457.
On vérifie facilement que c'est la bonne réponse.
