Exercice ❶ :

a) $x^2+4x+3=(x+3)\cdot(x+1)=0$ Donc $x=-1$ et $x=-3$ sont les deux solutions : $\underline{\underline{S=\{-3\,;-1\}}}$

b) $x^2+8x+5=0;\quad a=1;\ b=8;\ c=5;\quad \Delta=8^2-4\cdot5=44;\quad x=\dfrac{-8\pm\sqrt{44}}{2}=-4\pm\sqrt{11}$

$x=\dfrac{-8\pm\sqrt{44}}{2}=\dfrac{-8}{2}\pm\dfrac{2\cdot\sqrt{11}}{2}=-4\pm\sqrt{11}.\quad \underline{\underline{S=\left\{-4-\sqrt{11}\,;-4+\sqrt{11}\right\}}}$

c) $x^2-x-1=0;\quad a=1;\ b=-1;\ c=-1;\quad \Delta=1^2+4=5;\quad x=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}.\quad \underline{\underline{S=\left\{\dfrac{1-\sqrt5}{2};\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right\}}}$

d) $x^2+7x+3=0;\quad a=1;\ b=7;\ c=3;\quad \Delta=7^2-4\cdot3=37$.

$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{37}}{2}.\quad \underline{\underline{S=\left\{\dfrac{-7-\sqrt{37}}{2};\dfrac{-7+\sqrt{37}}{2}\right\}}}$

e) $x^2-4x+6=0;\quad a=1;\ b=-4;\ c=6;\quad \Delta=4^2-4\cdot6=-8<0$ donc il n'y a pas de solution. $\underline{\underline{S=\varnothing}}$

f) $2x^2+5x+1=0;\quad a=2;\ b=5;\ c=1;\quad \Delta=5^2-4\cdot2=17$

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{4}.\quad \underline{\underline{S=\left\{\dfrac{-5-\sqrt{17}}{4};\dfrac{-5+\sqrt{17}}{4}\right\}}}$

g) $2x^2-5x+3=0;\quad a=2;\ b=5-;\ c=3;\quad \Delta=5^2-4\cdot2\cdot3=1$

$x=\dfrac{5\pm\sqrt1}{4}.\ ;\quad S=\left\{\dfrac{5-1}{4};\dfrac{5+1}{4}\right\}=\left\{\dfrac44;\dfrac64\right\}\ ;\quad \underline{\underline{S=\{1\,;1{,}5\}}}$

On aurait aussi pu factoriser : $2x^2-5x+3=(2x-3)\cdot(x-1)$.

h) $2x^2+4x+1=0;\quad a=2;\ b=4;\ c=1;\quad \Delta=4^2-4\cdot2=8$

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt8}{4}=\dfrac{-4}{4}\pm\dfrac{2\cdot\sqrt2}{4}=-1\pm\dfrac{\sqrt2}{2}.\quad \underline{\underline{S=\left\{-1-\dfrac{\sqrt2}{2};-1+\dfrac{\sqrt2}{2}\right\}}}$

i) $3x^2+5x+1=0;\quad a=3;\ b=5;\ c=1;\quad \Delta=5^2-4\cdot3=13$

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{6}.\quad \underline{\underline{S=\left\{\dfrac{-5-\sqrt{13}}{6};\dfrac{-5+\sqrt{13}}{6}\right\}}}$

j) $10x^2+7x-1=0;\quad a=10;\ b=7;\ c=-1;\quad \Delta=7^2+4\cdot10=89$

$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{89}}{20}.\quad \underline{\underline{S=\left\{\dfrac{-7-\sqrt{89}}{20};\dfrac{-7+\sqrt{89}}{20}\right\}}}$

k) $12x^2-11x+5=0;\quad a=12;\ b=-11;\ c=5;\quad \Delta=11^2-4\cdot12\cdot5=-119<0$

donc il n'y a pas de solution : $\underline{\underline{S=\varnothing.}}$

l) $30x^2+23x+4=0;\quad \Delta=23^2-4\cdot30\cdot4=49$

$x=\dfrac{-23\pm\sqrt{49}}{60}=\dfrac{-23\pm7}{60}=\begin{cases}-\dfrac12\\[4pt]-\dfrac{4}{15}\end{cases}.\quad \underline{\underline{S=\left\{-\dfrac12;-\dfrac{4}{15}\right\}}}$

On aurait aussi pu factoriser : $30x^2+23x+4=(15x+4)\cdot(2x+1)$. En 2ème année, vous verrez comment trouver une telle factorisation, même pour des polynômes de degré supérieur à 2. Pour ces polynômes, les formules de Viète ne sont pas applicables !

Exercice ❷:

a) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.h de la série 5.

$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = x^4 - 1 - 2x \cdot (x^2 - 1) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot (x^2 - 1) = \left(x^2 + 1 - 2x\right) \cdot (x^2 - 1) =$

$= (x-1)^2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) = (x-1)^3 \cdot (x+1)$

Cette expression s'annule pour $x = 1$, pour $x = -1$ et pour aucune autre valeur.

$\underline{\underline{S = \{ -1 ; 1 \}}}$

b) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.j de la série 5.

$2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = x^2 \cdot (2x - 3) - 4 \cdot (2x - 3) = \left(x^2 - 4\right) \cdot (2x - 3) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (2x - 3)$

Cette expression s'annule pour $x = -2$, pour $x = 2$, pour $x = 1{,}5$ et pour aucune autre valeur.

$\underline{\underline{S = \{ -2 ; 1{,}5 ; 2 \}}}$

c) $\left(x-1\right)^4 - 4 \cdot \left(x-1\right)^2 = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.c de la série 5.

$\left(x-1\right)^4 - 4 \cdot \left(x-1\right)^2 = (x-1)^2 \cdot ((x-1)^2 - 4) = (x-1)^2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 4) =$

$= (x-1)^2 \cdot (x^2 - 2x - 3) = (x-1)^2 \cdot (x-3) \cdot (x+1)$

Cette expression s'annule pour $x = -1$, pour $x = 1$, pour $x = 3$ et pour aucune autre valeur.

$\underline{\underline{S = \{ -1 ; 1 ; 3 \}}}$

d) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.t de la série 5.

$x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = (x^2 + x + 1) \cdot (x^3 - 1) = (x^2 + x + 1)^2 \cdot (x - 1)$

$x^2 + x + 1$ ne s'annule jamais, car son discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$ est négatif.

L'expression $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ s'annule pour $x = 1$ et pour aucune autre valeur.

$\underline{\underline{S = \{ 1 \}}}$

e) $x^3 - 1 + x^2 - x = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.f de la série 5.

$x^3 - 1 + x^2 - x = x^2 \cdot (x+1) - (x+1) = (x+1) \cdot (x^2 - 1) = (x+1)^2 \cdot (x-1)$

Cette expression s'annule pour $x = -1$, pour $x = 1$ et pour aucune autre valeur.

$\underline{\underline{S = \{ -1 ; 1 \}}}$

f) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ C'est une équation appelée bicarrée car elle s'écrit : $\left(x^2\right)^2 - 3\left(x^2\right) + 2 = 0$

Par factorisation : $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 1) = (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

Cette expression s'annule en exactement 4 valeurs.

$\underline{\underline{S = \left\{ -\sqrt{2} ; -1 ; 1 ; \sqrt{2} \right\}}}$

g) $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$ C'est une autre équation bicarrée.

Par factorisation : $2x^4 - 5x^2 + 3 = (2x^2 - 3) \cdot (x^2 - 1) = \left(\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3}\right) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

Cette expression s'annule en exactement 4 valeurs.

$\underline{\underline{S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} ; -1 ; 1 ; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right\}}}$ On préfère écrire : $\underline{\underline{S = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{2} ; -1 ; 1 ; \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}}}$

h) $2x^4+x^2-3=0$ C'est une autre équation bicarrée.
Par factorisation : $2x^4+x^2-3=(2x^2+3)\cdot(x^2-1)=(2x^2+3)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$
Le facteur $(2x^2+3)$ ne s'annule jamais.
Cette expression s'annule en exactement 2 valeurs.
$\underline{\underline{S=\{\,-1\,;1\,\}}}$

i) $2x^4+7x^2-15=0$ C'est une autre équation bicarrée.
Par factorisation : $2x^4+7x^2-15=(2x^2-3)\cdot(x^2+5)=\left(\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{3}\right)\cdot(x^5+5)$
Le facteur (x^2+5) ne s'annule jamais.
Cette expression s'annule en exactement 2 valeurs.
$\underline{\underline{S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,;\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right\}}}$ On préfère écrire : $\underline{\underline{S=\left\{-\frac{\sqrt{6}}{2}\,;\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}}}$

j) $2x^4+6x^2+5=0$ C'est une autre équation bicarrée.
En posant $y=x^2$, on obtient l'équation du second degré : $2y^2+6y+5=0$.
a = 2 ; b = 6 ; c = 5 ; $\Delta=b^2-4ac=6^2-4\cdot2\cdot5=36-40=-4$
Le discriminant Δ étant négatif, cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. $\underline{\underline{S=\varnothing}}$

k) $8x^6+65x^3+8=0$ C'est une équation similaire à une bicarrée.
En posant $y=x^3$, on obtient l'équation du second degré : $8y^2+65y+8=0$.
a = 8 ; b = 65 ; c = 8 ; $\Delta=b^2-4ac=65^2-4\cdot8\cdot8=4225-256=3969=63^2$
L'équation en y possède deux solutions : $y_1=\frac{-65-63}{16}=-8$ et $y_2=\frac{-65+63}{16}=-\frac{1}{8}$
Donc l'équation en x possède les deux solutions :
$x_1=\sqrt[3]{y_1}=\sqrt[3]{-8}=-2$ et $x_2=\sqrt[3]{y_2}=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$
l'équation possède exactement 2 solutions : $\underline{\underline{S=\left\{-2\,;-\frac{1}{2}\right\}}}$

l) $\sqrt{x^2+6}=\sqrt{5\cdot x}$ Pour éliminer les racines, élevons au carré les deux membres de l'équation.
$x^2+6=5\cdot x \;\Rightarrow\; x^2-5\cdot x+6=0 \;\Rightarrow\; (x-2)\cdot(x-3)=0$
On trouve deux solutions. Il faut **vérifier** qu'elles satisfont l'équation de départ ! : $\underline{\underline{S=\{\,2\,;3\,\}}}$

m) $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{2x^2-4x+1}$ Pour éliminer les racines, élevons les deux membres au carré.
$x^2-2=2x^2-4x+1 \;\Rightarrow\; 0=x^2-4x+3 \;\Rightarrow\; (x-3)\cdot(x-1)=0$
On trouve deux solutions : $x=1$ et $x=3$.
En **vérifiant** pour $x=1$, on trouve : $\sqrt{1^2-2}=\sqrt{2\cdot1^2-4\cdot1+1} \;\Rightarrow\; \sqrt{-1}=\sqrt{-1}$.
$\sqrt{-1}$ n'étant pas un nombre réel, cette solution n'est pas acceptable.
La seule la solution acceptable est $x=3$, qui donne : $\sqrt{3^2-2}=\sqrt{2\cdot3^2-4\cdot3+1} \;\Rightarrow\; \sqrt{7}=\sqrt{7}$.
Il n'y a donc qu'une seule solution : $\underline{\underline{S=\{\,3\,\}}}$

n) $\sqrt{x\cdot(x-3)}=\sqrt{8x-x^2}$ Pour éliminer les racines, élevons au carré les deux membres.

$x\cdot(x-3)=8x-x^2 \;\Rightarrow\; x\cdot(x-3)+x^2-8x=0 \;\Rightarrow\; x\cdot(x-3)+x\cdot(x-8)=0 \;\Rightarrow\; x\cdot(2x-11)=0$

On trouve deux solutions : $x=0$ et $x=\dfrac{11}{2}=5{,}5$.

Il faut **vérifier** qu'elles satisfont l'équation de départ ! : $S=\{\,0\,;5{,}5\,\}$

o) $2+\sqrt{2x+4}=x \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2x+4}=x-2$ Pour éliminer le racine, élevons au carré les deux membres.

$2x+4=x^2-4x+4 \;\Rightarrow\; 0=x^2-6x \;\Rightarrow\; x\cdot(x-6)=0$

On trouve deux solutions : $x=0$ et $x=6$.

En **vérifiant** pour $x=0$, on trouve : $\sqrt{2\cdot 0+4}=0-2 \;\Rightarrow\; 2=-2$, l'égalité est fausse !

En élevant au carré on perd le signe des deux membres, ce qui introduit des solutions supplémentaires.

La seule la solution acceptable est $x=6$, qui donne : $\sqrt{2\cdot 6+4}=6-2 \;\Rightarrow\; \sqrt{16}=4$.

Il n'y a donc qu'une seule solution : $S=\{\,6\,\}$

p) $x+\sqrt{x+5}=7 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x+5}=7-x$ Pour éliminer le racine, élevons au carré les deux membres.

$x+5=x^2-14x+49 \;\Rightarrow\; 0=x^2-15x+44 \;\Rightarrow\; (x-11)\cdot(x-4)=0$

On trouve deux solutions : $x=4$ et $x=11$.

En **vérifiant** pour $x=11$, on trouve : $\sqrt{11+5}=7-11 \;\Rightarrow\; 4=-4$, l'égalité est fausse !

En élevant au carré on perd le signe des deux membres, ce qui introduit des solutions supplémentaires.

La seule la solution acceptable est $x=4$, qui donne : $\sqrt{4+5}=7-4 \;\Rightarrow\; \sqrt{9}=3$.

Il n'y a donc qu'une seule solution : $S=\{\,4\,\}$

q) $\dfrac{1}{x+3}=x-3$ Multiplions les deux membres par : $(\,x+3\,)$

$1=(x-3)\cdot(x+3) \;\Leftrightarrow\; 1=x^2-9 \;\Leftrightarrow\; x^2=10$

On trouve deux solutions : $x=\sqrt{10}$ et $x=-\sqrt{10}$.

Il faut **vérifier** qu'elles satisfont l'équation de départ ! : $S=\left\{\,-\sqrt{10}\,;\sqrt{10}\,\right\}$

r) $\dfrac{x-3}{x-1}-\dfrac{x-1}{x-3}=0$ Multiplions les deux membres par : $(\,x-1\,)\cdot(\,x-3\,)$

$(x-3)^2-(x-1)^2=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-6x+9-(x^2-2x+1)=0 \;\Leftrightarrow\; -4x+8=0 \;\Leftrightarrow\; x=2$

Il faut **vérifier** que la solution satisfait l'équation de départ ! : $S=\{\,2\,\}$

s) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{35}$ Multiplions les deux membres par : $35\cdot(\,x-2\,)\cdot(\,x+2\,)$

$35\cdot(x+2)-35\cdot(x-2)=(x-2)\cdot(x+2) \;\Leftrightarrow\; 35\cdot 4=x^2-4 \;\Leftrightarrow\; x^2-4-35\cdot 4=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-144=0$

Il faut **vérifier** que les solutions satisfont l'équation de départ ! : $S=\{\,-12\,;12\,\}$

t) $\dfrac{x+5}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1}$ Multiplions les deux membres par : $(x-1)\cdot(x+1)$

$(x+5)\cdot(x+1)-2\cdot(x-1)=4 \;\Leftrightarrow\; x^2+6x+5-2x+2-4=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+4x+3=0 \;\Leftrightarrow\; (x+3)\cdot(x+1)=0$

On trouve deux solutions : $x=-1$ et $x=-3$.

$x=-1$ n'est pas une solution, car elle fait intervenir une division par 0 !

Il n'y a donc qu'une seule solution : $S=\{-3\}$

u) $\dfrac{x-7}{x^2-5x+6}+\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{1}{x-2}=0$ Remarquons que x^2-5x+6 se factorise en $(x-3)\cdot(x-2)$

Multiplions les deux membres par : $(x-3)\cdot(x-2)$

$x-7+2\cdot(x-2)+(x-3)=0 \;\Leftrightarrow\; x-7+2x-4+x-3=0 \;\Leftrightarrow\; 4x-14=0 \;\Leftrightarrow\; x=\dfrac{7}{2}=3{,}5$

Il faut **vérifier** que la solution satisfait l'équation de départ ! : $S=\{3{,}5\}$

v) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{2}{x^2-1}$ Multiplions les deux membres par : $x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

$(x-1)+x^2\cdot(x+1)=x\cdot(x+1)\cdot(x-1)+2x \;\Leftrightarrow\; x-1+x^3+x^2=x^3-x+2x \;\Leftrightarrow$

$x^2-1=0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)\cdot(x+1)=0$

On trouve deux solutions : $x=-1$ et $x=1$.

On voit qu'aucune des deux solutions n'est acceptable, car elles font intervenir des divisions par 0.

L'ensemble des solutions est : $S=\varnothing$. On peut aussi noter : $S=\{\ \}$

Comment des solutions non valides peuvent-elles apparaître ?

Il *semble* pourtant qu'on n'utilise que les trois règles de simplifications énoncées en VII.1.

En multipliant au point par $x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$, on multiplie par zéro si $x=0$, si $x=1$ ou si $x=-1$.

Or multiplier par zéro n'est pas une règle de simplification valide et peut amener de nouvelles solutions !

Cela peut ajouter des solutions non valides. (Cela n'enlève pas de solutions correctes).

Voici un autre exemple plus simple :

$\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x$ En multipliant par x les deux membres, on obtient : $\sqrt{x}=x^2$.

$x=0$ est une solution de $\sqrt{x}=x^2$, mais pas de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x$. C'est en multipliant par x que la solution $x=0$ est apparue.

Par contre $x=1$ est l'unique solution correcte de l'équation.

Exercice ❸:

a) $x=7$ simple et directe. b) $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=0$

c) $\left(x-1-\sqrt{7}\right)\cdot\left(x-1+\sqrt{7}\right)=0$ ou $x^2+2x=6$ qui ne fait intervenir que des nombre entiers positifs.

d) $x^2=-1$ ou $\dfrac{1}{x}=0$

e) $x\cdot(x+1)=x^2+x$ ou n'importe quelle identité, qui est donc vérifiée pour tout nombre réel.

f) $(x+3)\cdot(x+2)\cdot x\cdot(2x-1)\cdot(3x-1)=0$

g) $x\cdot\left(x+2\cdot\sqrt{3}\right)=0$, n'est pas trop original. Autre : $\left(x^2-12\right)\cdot\sqrt{-x}=0$