Exercice 1 :

Tous les exercices sont basés sur une factorisation du numérateur et du dénominateur, puis simplification :

a) $\dfrac{4a^2+12a+9}{4a^2-9}=\dfrac{(2a+3)^2}{(2a+3)\cdot(2a-3)}=\dfrac{(2a+3)}{(2a-3)}$

b) $\dfrac{(a+b)^2\cdot(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)^2}=\dfrac{(a+b)^2\cdot(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)}{(a+b)^2\cdot(a-b)^2}=\dfrac{(a^2+ab+b^2)}{a-b}$

c) $\dfrac{xy-x^4y^4}{x^4y-xy^4}=\dfrac{xy\cdot(1-x^3y^3)}{xy\cdot(x^3-y^3)}=\dfrac{1-x^3y^3}{x^3-y^3}=\dfrac{(1-xy)\cdot(1+xy+x^2y^2)}{(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)}$

La deuxième expression n'apporte rien de plus, car on ne peut plus rien simplifier.

d) $\dfrac{a^3+a^2-4a-4}{2-a}=\dfrac{a^2\cdot(a+1)-4\cdot(a+1)}{2-a}=\dfrac{(a^2-4)\cdot(a+1)}{-(a-2)}=\dfrac{(a+2)\cdot(a-2)\cdot(a+1)}{-(a-2)}=-(a+2)\cdot(a+1)$

On a utilisé la relation : $2-a=-(a-2)$. Le signe "-" du dénominateur, peut être mis au numérateur.

e) $\dfrac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}=\dfrac{(1+a)\cdot(1-a)}{(1+ax+a+x)\cdot(1+ax-a-x)}=\dfrac{(1+a)\cdot(1-a)}{(1+a)\cdot(1+x)\cdot(1-a)\cdot(1-x)}=\dfrac{1}{(1+x)\cdot(1-x)}$

Il faut remarquer que au dénominateur on a une id. rem. du type : $A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$

On aurait pu développer le dénominateur, mais sa factorisation aurait été compliquée.

$(1+ax)^2-(a+x)^2=1+(ax)^2-a^2-x^2$

f) $\dfrac{x^2-4x^2y^2}{3xy+3x}\cdot\dfrac{2y^2-2}{2y^2-y-1}=\dfrac{x^2\cdot(1-4y^2)}{3x\cdot(y+1)}\cdot\dfrac{2\cdot(y^2-1)}{2y^2-y-1}=\dfrac{x\cdot(1+2y)\cdot(1-2y)\cdot2\cdot(y+1)\cdot(y-1)}{3\cdot(y+1)\cdot(2y+1)\cdot(y-1)}=$

$=\dfrac{x\cdot(1-2y)\cdot2}{3}=\dfrac{2}{3}\cdot x\cdot(1-2y)$

On a mis en évidence x^2, x et 2. On a utiliser le fait que un produit de deux fractions égale la fraction formée du produit des numérateurs, sur le produit des dénominateurs. Ensuite on a factorisé, puis simplifié les facteurs identiques au numérateur et au dénominateur.

g) $\dfrac{12}{9-a^2}-\dfrac{2}{3+a}-\dfrac{1}{3-a}=\dfrac{12-2\cdot(3-a)-(3+a)}{9-a^2}=\dfrac{12-6+2a-3-a}{9-a^2}=\dfrac{3+a}{(3+a)\cdot(3-a)}=\dfrac{1}{3-a}$

On a mis au dénominateur commun, développé, factorisé le dénominateur et simplifié.

h) $\dfrac{6}{1-x}-\dfrac{4}{1+x}+\dfrac{10x}{x^2-1}=\dfrac{-6}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{10x}{x^2-1}=\dfrac{-6\cdot(x+1)-4\cdot(x-1)+10x}{x^2-1}=$

$=\dfrac{-6x-6-4x+4+10x}{x^2-1}=\dfrac{-2}{x^2-1}$

On a utilisé : $(1-x)=-(x-1)$, mis au dénominateur commun, développé et simplifié.

i) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2b-ab^2}{a^2+ab}=\dfrac{(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)}{(a-b)\cdot(a+b)}-\dfrac{ab\cdot(a-b)}{a\cdot(a+b)}=\dfrac{(a^2+ab+b^2)}{(a+b)}-\dfrac{b\cdot(a-b)}{(a+b)}=$

$=\dfrac{a^2+ab+b^2-ab+b^2}{a+b}=\dfrac{a^2+2b^2}{a+b}$

On a factorisé, simplifié, vu que le dénominateur est le même, développé, puis simplifié.

j) $$\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-x-2}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{(x-2)\cdot(x-1)}+\frac{1}{(x-2)\cdot(x+1)}+\frac{2}{(x+1)\cdot(x-1)}=$$
$$=\frac{(x+1)+(x-1)+2\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{4x-4}{(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{4\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\underline{\underline{\frac{4}{(x-2)\cdot(x+1)}}}$$
On a factorisé les dénominateurs, puis mis au dénominateur commun et simplifié.

k) $$\frac{5}{2x+4}-\frac{3}{x^2+3x+2}+\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{5}{2\cdot(x+2)}-\frac{3}{(x+2)\cdot(x+1)}+\frac{x}{(x-2)\cdot(x+1)}=$$
$$=\frac{5\cdot(x-2)\cdot(x+1)-3\cdot2\cdot(x-2)+x\cdot2\cdot(x+2)}{2\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}=\frac{5x^2-5x-10-6x+12+2x^2+4x}{2\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}=$$
$$=\underline{\underline{\frac{7x^2-7x+2}{2\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}}}$$
On a factorisé les dénominateurs, mis au dénominateur commun, développé les numérateurs et simplifié.

l) $$\frac{x+5}{x-1}-\frac{6}{x^2+x+1}-\frac{6\cdot\left(x^2+2\right)}{x^3-1}=\frac{x+5}{x-1}-\frac{6}{x^2+x+1}-\frac{6\cdot\left(x^2+2\right)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=$$
$$=\frac{(x+5)\cdot(x^2+x+1)-6\cdot(x-1)-6\cdot\left(x^2+2\right)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{x^3+6x^2+6x+5-6x+6-6x^2-12}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=$$
$$=\frac{x^3-1}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}\underline{\underline{=1}}$$
Même remarque que ci-dessus.

m) $$\frac{x-x^2}{1-x^2}+\frac{1+x}{1+2x+x^2}-\frac{1-2x}{1-x}=\frac{x\cdot(1-x)}{(1+x)\cdot(1-x)}+\frac{1+x}{(1+x)^2}-\frac{1-2x}{1-x}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1-2x}{1-x}=$$
$$=\frac{x\cdot(1-x)+(1-x)-(1-2x)\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(1-x)}=\frac{x-x^2+1-x-1-x+2x+2x^2}{(1+x)\cdot(1-x)}=\frac{x^2+x}{(1+x)\cdot(1-x)}=$$
$$=\frac{x\cdot(x+1)}{(1+x)\cdot(1-x)}=\underline{\underline{\frac{x}{1-x}}}$$

n) $$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{b^2-a^2}{a^2\cdot b^2}:\left(\frac{b+a}{a\cdot b}\right)=\frac{b^2-a^2}{a^2\cdot b^2}\cdot\frac{a\cdot b}{b+a}=\frac{(b+a)\cdot(b-a)\cdot a\cdot b}{a^2\cdot b^2\cdot(b+a)}=\underline{\underline{\frac{b-a}{a\cdot b}}}$$
On met au dénominateur commun les deux fractions des deux parenthèses.
On se rappelle que diviser par une fraction correspond à multiplier par l'inverse de la fraction.

o) $$\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{1}{x}-1\right)^2=\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}:\left(\frac{1-x}{x}\right)^2=\frac{(x^2-1)^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{(1-x)^2}=\frac{\left((x+1)\cdot(x-1)\right)^2}{(x-1)^2}\underline{\underline{=(x+1)^2}}$$
Idem. On simplifie et on factorise un peut plus, pour simplifier encore.
On a utilisé le fait que $(1-x)^2=(x-1)^2$. Mettre au carré élimine le signe.

p) $$\left(x+\frac{xy}{x-y}\right):\left(y+\frac{y^2}{x-y}\right)=\frac{x\cdot(x-y)+xy}{x-y}:\frac{y\cdot(x-y)+y^2}{x-y}=\frac{x^2}{x-y}\cdot\frac{x-y}{xy}=\frac{x^2}{xy}=\underline{\underline{\frac{x}{y}}}$$

q) $$\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{1-x+2x}{(1+x)\cdot(1-x)}\cdot\frac{1-x}{x}=\frac{(1+x)\cdot(1-x)}{(1+x)\cdot(1-x)\cdot x}=\underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$