Exercice 1 :
Tous les exercices sont basés sur une factorisation du numérateur et du dénominateur, puis simplification :

$$A = \frac{4x^2+12x+9}{4x^2-9} = \frac{(2x+3)^2}{(2x+3)\cdot(2x-3)} = \underline{\underline{\frac{(2x+3)}{(2x-3)}}}$$

$$B = \frac{(x+a)^2\cdot(x^3-a^3)}{(x^2-a^2)^2} = \frac{(x+a)^2\cdot(x-a)\cdot(x^2+ax+a^2)}{(x+a)^2\cdot(x-a)^2} = \underline{\underline{\frac{(x^2+ax+a^2)}{x-a}}}$$

$$C = \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3-x^2-6x} = \frac{x\cdot\left(x^2+5x+6\right)}{x\cdot\left(x^2-x-6\right)} = \frac{(x+2)\cdot(x+3)}{(x+2)\cdot(x-3)} = \underline{\underline{\frac{(x+3)}{(x-3)}}}$$

$$D = \frac{x^3+x^2-4x-4}{2-x} = \frac{x^2\cdot(x+1)-4\cdot(x+1)}{2-x} = \frac{(x^2-4)\cdot(x+1)}{-(x-2)} = \frac{(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}{-(x-2)} = \underline{\underline{-(x+2)\cdot(x+1)}}$$

On a utilisé la relation : $2-x=-(x-2)$. Le signe "$-$" du dénominateur, peut être mis au numérateur.

$$E = \frac{(1+ax)^2-(a+x)^2}{1-a^2} = \frac{(1+ax+a+x)\cdot(1+ax-a-x)}{(1+a)\cdot(1-a)} = \frac{(1+a)\cdot(1+x)\cdot(1-a)\cdot(1-x)}{(1+a)\cdot(1-a)} = \underline{\underline{(1+x)\cdot(1-x)}}$$

Il faut remarquer que au dénominateur on a une id. rem. du type : $A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$
On aurait pu développer le dénominateur, mais sa factorisation aurait été compliquée.
$(1+ax)^2-(a+x)^2=1+(ax)^2-a^2-x^2$
Il est remarquable que cette expression ne dépende pas du nombre $a$ !

$$F = \frac{x^2-4x^2y^2}{3xy+3x}\cdot\frac{2y^2-2}{2y^2-y-1} = \frac{x^2\cdot(1-4y^2)}{3x\cdot(y+1)}\cdot\frac{2\cdot(y^2-1)}{2y^2-y-1} = \frac{x\cdot(1+2y)\cdot(1-2y)\cdot2\cdot(y+1)\cdot(y-1)}{3\cdot(y+1)\cdot(2y+1)\cdot(y-1)} =$$

$$= \frac{x\cdot(1-2y)\cdot2}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\cdot x\cdot(1-2y)}}$$

On a mis en évidence $x^2$, $x$ et 2. On a utiliser le fait que un produit de deux fractions égale la fraction formée du produit des numérateurs, sur le produit des dénominateurs. Ensuite on a factorisé, puis simplifié les facteurs identiques au numérateur et au dénominateur.

$$G = \frac{12}{9-a^2}-\frac{2}{3+a}-\frac{1}{3-a} = \frac{12-2\cdot(3-a)-(3+a)}{9-a^2} = \frac{12-6+2a-3-a}{9-a^2} = \frac{3+a}{(3+a)\cdot(3-a)} = \underline{\underline{\frac{1}{3-a}}}$$

On a mis au dénominateur commun, développé, factorisé le dénominateur et simplifié.

$$H = \frac{6}{1-x}-\frac{4}{1+x}+\frac{10x}{x^2-1} = \frac{-6}{x-1}-\frac{4}{x+1}+\frac{10x}{x^2-1} = \frac{-6\cdot(x+1)-4\cdot(x-1)+10x}{x^2-1} =$$

$$= \frac{-6x-6-4x+4+10x}{x^2-1} = \underline{\underline{\frac{-2}{x^2-1}}}$$

On a utilisé : $(1-x)=-(x-1)$, mis au dénominateur commun, développé et simplifié.

$$I = \frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-x-2}+\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{(x-2)\cdot(x-1)}+\frac{1}{(x-2)\cdot(x+1)}+\frac{2}{(x+1)\cdot(x-1)} =$$

$$= \frac{(x+1)+(x-1)+2\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{4x-4}{(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{4\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \underline{\underline{\frac{4}{(x-2)\cdot(x+1)}}}$$

On a factorisé les dénominateurs, puis mis au dénominateur commun et simplifié.

Exercice 1, suite.

$$J = \frac{3x}{x^2-x-2}-\frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{6}{2x+4}=\frac{3x}{(x-2)\cdot(x+1)}-\frac{1}{(x+2)\cdot(x+1)}-\frac{\cancel{2}\cdot 3}{\cancel{2}\cdot(x+2)}=$$

$$=\frac{3x\cdot(x+2)-(x-2)-3\cdot(x-2)\cdot(x+1)}{(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}=\frac{3x^2+6x-x+2-3\cdot(x^2-x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}=$$

$$\frac{3x^2+5x+2-3x^2+3x+6}{(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}=\frac{8x+8}{(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}=\frac{8\cdot(x+1)}{(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}=\frac{8}{(x+2)\cdot(x-2)}$$

On a factorisé les dénominateurs, mis au dénominateur commun, développé les numérateurs et simplifié.

$$K = \frac{x+5}{x-1}-\frac{6}{x^2+x+1}-\frac{6\cdot\left(x^2+2\right)}{x^3-1}=\frac{x+5}{x-1}-\frac{6}{x^2+x+1}-\frac{6\cdot\left(x^2+2\right)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{(x+5)\cdot(x^2+x+1)-6\cdot(x-1)-6\cdot\left(x^2+2\right)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{x^3+6x^2+6x+5-6x+6-6x^2-12}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{x^3-1}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=1$$

Même remarque que ci-dessus.

$$L = \frac{x-x^2}{1-x^2}+\frac{1+x}{1+2x+x^2}-\frac{1-2x}{1-x}=\frac{x\cdot(1-x)}{(1+x)\cdot(1-x)}+\frac{1+x}{(1+x)^2}-\frac{1-2x}{1-x}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1-2x}{1-x}=$$

$$=\frac{x\cdot(1-x)+(1-x)-(1-2x)\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(1-x)}=\frac{x-x^2+1-x-1-x+2x+2x^2}{(1+x)\cdot(1-x)}=\frac{x^2+x}{(1+x)\cdot(1-x)}=$$

$$=\frac{x\cdot(x+1)}{(1+x)\cdot(1-x)}=\frac{x}{1-x}$$

$$M = \left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{1}{x}-1\right)^2=\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}:\left(\frac{1-x}{x}\right)^2=\frac{(x^2-1)^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{(1-x)^2}=\frac{\left((x+1)\cdot(x-1)\right)^2}{(x-1)^2}=(x+1)^2$$

Idem. On simplifie et on factorise un peut plus, pour simplifier encore.
On a utilisé le fait que $(1-x)^2=(x-1)^2$. Mettre au carré élimine le signe.

$$N = \left(x+\frac{xy}{x-y}\right):\left(y+\frac{y^2}{x-y}\right)=\frac{x\cdot(x-y)+xy}{x-y}:\frac{y\cdot(x-y)+y^2}{x-y}=\frac{x^2}{x-y}\cdot\frac{x-y}{xy}=\frac{x^2}{xy}=\frac{x}{y}$$

$$O = \frac{6}{1-x}-\frac{6}{1+x}+\frac{12x}{x^2-1}=\frac{-6}{x-1}-\frac{6}{x+1}+\frac{12x}{x^2-1}=\frac{-6\cdot(x+1)-6\cdot(x-1)+12x}{x^2-1}=$$

$$=\frac{-6x-6-6x+6+12x}{x^2-1}=\frac{0}{x^2-1}=0$$

$$P = \left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{1-x+2x}{(1+x)\cdot(1-x)}\cdot\frac{1-x}{x}=\frac{(1+x)\cdot(1-x)}{(1+x)\cdot(1-x)\cdot x}=\frac{1}{x}$$

Exercice 2.

a*) $x^6-1=\left(x^3\right)^2-1^2=\left(x^3+1\right)\cdot\left(x^3-1\right)=(x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$ et aussi

$x^6-1=\left(x^2\right)^3-1^3=\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^4+x^2+1\right)=(x+1)\cdot(x-1)\cdot\left(x^4+x^2+1\right)$ et aussi

Toutes les expressions ci-dessus sont identiques, donc :

$(x+1)\cdot(x-1)\cdot\left(x^4+x^2+1\right)=(x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$

Après simplification, on a la factorisation demandée :

$x^4+x^2+1=\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)$

b) $\left(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1\right)=x^4-\sqrt{2}\cdot x^3+x^2+\sqrt{2}\cdot x^3-2\cdot x^2+\sqrt{2}\cdot x+x^2-\sqrt{2}\cdot x+1=$

$x^4+1$. Presque tous les termes se simplifient.

En résumé : $x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1\right)$.

C'est une factorisation, mais pas très utile.

---

Exercice 3.

Ecrivons le nombre proche de 50 sous la forme $50 + a$.

On a : $(50 + a)^2 = 2500 + 100\cdot a + a^2 = (25 + a)\cdot 100 + a^2$. $a$ peut être positif ou négatif.

Donc les milliers et centaines se calculent par $25 + a$,

les dizaines et unités se calculent par $a^2$, ici, le signe de $a$ n'a pas d'importance, vu le carré.

---

Exercice 4.

Soit $n = 123456789^2$

a) Pour obtenir le chiffre des unités, il suffit de calculer le chiffre des unités de $9^2$. Le chiffre des unités est donc 1. Justifions l'affirmation précédente.

$n = (12345678\cdot 10 + 9)^2 = 12345678^2\cdot 100 + 2\cdot 12345678\cdot 9\cdot 10 + 9^2$.

Les deux premiers termes étant des multiples de 10, ils ne vont pas influencer le chiffre des unités.

b,c) De la même manière que précédemment, on peut écrire :

$n = (123456\cdot 1000 + 789)^2 = 12345^2\cdot 10^6 + 2\cdot 123456\cdot 789\cdot 1'000 + 789^2$.

Les deux premiers termes étant des multiples de 1'000, ils ne vont pas influencer le chiffre des unités, ni celui des dizaines ni celui des centaines. Donc $789^2$ donne les trois derniers chiffres de $n$, qui sont donc : 521, car $789^2 = 622'521$.

d) Puisque $n \approx 1{,}524157875\cdot 10^{16}$, il est formé de 17 chiffres, un de plus que la puissance de dix.

e) $n = (1234\cdot 10^5 + 56789)^2 = 12345^2\cdot 10^{10} + 2\cdot 1234\cdot 56789\cdot 10^5 + 56789^2$.

$n = 1522756\cdot 10^{10} + 140155252\cdot 10^5 + 3224990521$. Il est facile d'effectuer cette addition.

```
n = 15227560000000000
    +  14015525200000
    +      3224990521
    -----------------
    15241578750190521
```

Il y en a bien 17, le début correspond à ce que donne la calculatrice, ainsi que la fin.

Ce sont les chiffes du milieu qui sont les plus difficiles à obtenir !

*BONUS*

Savez-vous que la calculatrice permet d'obtenir les 12 premiers chiffres, et à 1 près le 13ème ?

Tapez : 123456789 $x^2$ = STO = 2nd_RCL =

Vous verrez apparaître les derniers chiffres de la mémoire de la calculatrice. En faisant défiler avec les flèches, vous obtenez : $n = 123456789^2 \approx 1{,}524157875019\cdot 10^{16}$, qui est plus précis!

Le "9" peut être un "8" qui a été arrondi vers le haut !

---