Exercice 1 :

A Mise en évidence de x, puis de $(1+a)$

$1+ax+a+x=1+a+x\cdot(1+a)=(1+a)\cdot(1+x)$

B Groupement par pairs, mise en évidence de $x+1$, puis identité remarquable.

$x^3-1+x^2-x=x^2\cdot(x+1)-(x+1)=(x+1)\cdot(x^2-1)=(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)=(x+1)^2\cdot(x-1)$

C Groupement par pairs, puis mise en évidence de $x+1$.

$x^3+1+x^2+x=x^2\cdot(x+1)+(x+1)=(x+1)\cdot(x^2+1)$

D Mise en évidence de ax, puis deux utilisation de l'id. rem. $A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$

$a^5\cdot x-a\cdot x^5=a\cdot x\cdot\left(a^4-x^4\right)=a\cdot x\cdot\left(a^2-x^2\right)\cdot\left(a^2+x^2\right)=a\cdot x\cdot\left(a-x\right)\cdot\left(a+x\right)\cdot\left(a^2+x^2\right)$

E Mise en évidence de b^2, puis de a^2+1

$a^2\cdot x^2+x^2-a^2-1=a^2\cdot(x^2-1)+(x^2-1)=(a^2+1)\cdot(x^2-1)=(a^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

F Mise en évidence de x^2 dans la première paire et de -4 dans la deuxième, puis de $(2x-3)$

$2x^3-3x^2-8x+12=x^2\cdot(2x-3)-4\cdot(2x-3)=(x^2-4)\cdot(2x-3)=(x+2)\cdot(x-2)\cdot(2x-3)$

G Mise en évidence de $(x-1)^2$, puis utilisation de l'identité remarquable : $A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$

$\left(x-1\right)^4-4\cdot\left(x-1\right)^2=(x-1)^2\cdot\left((x-1)^2-4\right)=(x-1)^2\cdot\left((x-1)+2\right)\cdot\left((x-1)-2\right)=$

$=(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot(x-3)$

H L'exception, développement, simplification, puis deuxième identité remarquable

$\left(x+a\right)^2-4ax=x^2+2ax+a^2-4ax=x^2-2ax+a^2=\left(x-a\right)^2$

I Mise en évidence de $(4x-3)$

$(4x-3)\cdot(x+1)+x\cdot(4x-3)=(4x-3)\cdot\left((x+1)+x\right)=(4x-3)\cdot(2x+1)$

J On se ramène à I avec $-x\cdot(3-4x)=x\cdot(4x-3)$, genre d'égalité que l'on utilisera souvent !

$(4x-3)\cdot(x+1)-x\cdot(3-4x)=(4x-3)\cdot(x+1)+x\cdot(4x-3)=(4x-3)\cdot\left((x+1)+x\right)=(4x-3)\cdot(2x+1)$

K Comme en J, on se ramène à pouvoir mettre $(7x-5)$ en évidence $x\cdot(5-7x)=-x\cdot(7x-5)$

$(7x-5)\cdot(3x+2)+x\cdot(5-7x)=(7x-5)\cdot(3x+2)-x\cdot(7x-5)=(7x-5)\cdot\left((3x+2)-x\right)=$

$(7x-5)\cdot\left(2x+2\right)=(7x-5)\cdot2\cdot(x+1)=2\cdot(7x-5)\cdot(x+1)$ La dernière expression est plus jolie !

L Remarque. On utilisera souvent l'identité : $-(y-x)=(x-y)$:

Mises en évidence de $(x-y)$

$(x-y)\cdot(a-2)-(y-x)\cdot(a+3)-(x-y)\cdot(1-a)=$

$(x-y)\cdot(a-2)+(x-y)\cdot(a+3)-(x-y)\cdot(1-a)\ =\ (x-y)\cdot(a-2+a+3-1+a)\ =\ (x-y)\cdot3a$

M Regroupement par pairs, mise en évidence de $2x$ et id. rem. puis mise en évidence de (x^2-1)

$x^4-2x^3+2x-1=(x^4-1)-(2x^3-2x)=(x^2-1)\cdot(x^2+1)-2x\cdot(x^2-1)=$

$=(x^2-1)\cdot(x^2+1-2x)=(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2-2x+1)=(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-1)^2=(x+1)\cdot(x-1)^3$

N id. rem. $(4x^2-1)=(2x+1)\cdot(2x-1)$, puis mise en évidence de $(2x-1)$

$(2x-3)\cdot(4x^2-1)-2\cdot(2x-1)^2+5\cdot(2x-1)=(2x-1)\cdot\left((2x+1)\cdot(2x-3)-2\cdot(2x-1)+5\right)=$

$=(2x-1)\cdot(4x^2-4x-3-4x+2+5)=(2x-1)\cdot(4x^2-8x+4)=$

$=4\cdot(2x-1)\cdot(x^2-2x+1)=4\cdot(2x-1)\cdot(x-1)^2$

O Remarque. On utilisera souvent l'identité : $-(y-x)=(x-y)$:

Mises en évidence de $(x-y)$

$(x-y)\cdot a-(y-x)\cdot7-(x-y)\cdot(7+a)=(x-y)\cdot a+(x-y)\cdot7-(x-y)\cdot(7+a)=$

$(x-y)\cdot\left(a+7-(7+a)\right)=0$

P Mise en évidence de $a^2\cdot x^2$ et de -4, puis de $(ax+1)$, puis id. rem. $A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$

$a^3\cdot x^3+a^2\cdot x^2-4ax-4=a^2\cdot x^2\cdot(ax+1)-4\cdot(ax+1)=(ax+1)\cdot\left((a\cdot x)^2-4\right)=(ax+1)\cdot(ax+2)\cdot(ax-2)$

Q Mise en évidence de $4x$, puis de $(5a+1)$
$20ax+4x-5a-1=4x\cdot(5a+1)-(5a+1)=(4x-1)\cdot(5a+1)$

R Identité remarquable $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ sur les trois premiers termes, puis id. rem.
$A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$
$x^2+2x+1-a^2=(x^2+2x+1)-a^2=(x+1)^2-a^2=(x+1-a)\cdot(x+1+a)$

S Mise en évidence de $-2ax$ dans les deux derniers termes, mise en évidence de $(x+2a)$,
puis utilisation de l'identité remarquable : $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
$(x+2a)\cdot(x^2+a^2)-2ax^2-4a^2x=(x+2a)\cdot(x^2+a^2)-2ax\cdot(x+2a)=(x+2a)\cdot(x^2+a^2-2ax)=$
$=(x+2a)\cdot(x-a)^2$

T Identité remarquable sur des cubes : $A^3+B^3=(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)$
$125+216x^3=5^3+(6x)^3=(5+6x)\cdot(5^2-5\cdot6x+(6x)^2)=(5+6x)\cdot(25-30x+36x^2)$

U Mise en évidence de x^3 dans les trois premiers termes, mise en évidence de (x^2+x+1), puis
utilisation de l'identité remarquable : $x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$
$x^5+x^4+x^3-x^2-x-1=x^3\cdot(x^2+x+1)-(x^2+x+1)=(x^2+x+1)\cdot(x^3-1)=$
$=(x^2+x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)=(x-1)\cdot(x^2+x+1)^2$

V On applique l'égalité souvent utilisée : $-x\cdot(3-4x)=x\cdot(4x-3)$, puis mise en évidence.
$(4x-3)\cdot(x+1)-x\cdot(3-4x)+(4x-3)\cdot(7-2x)=(4x-3)\cdot(x+1)+x\cdot(4x-3)+(4x-3)\cdot(7-2x)=$
$(4x-3)\cdot\big((x+1)+x+(7-2x)\big)=8\cdot(4x-3)$

Exercice 2 :

a = $25^2-5^2=(25+5)\cdot(25-5)=30\cdot20=600$
b = $25^2=(25+5)\cdot(25-5)+25=30\cdot20+25=625$
c = $35^2=(35+5)\cdot(35-5)+25=40\cdot30+25=1225$
d = $65^2=(65+5)\cdot(65-5)+25=70\cdot60+25=4225$
e = $85^2=(85+5)\cdot(85-5)+25=90\cdot80+25=7225$
f = $(20-2)\cdot(20+2)=20^2-2^2=400-4=396$
g = $18\cdot22=f$ c.f. ci-dessus
h = $17\cdot23=(20-3)\cdot(20+3)=20^2-3^2=400-9=391$
i = $15^2=(15+5)\cdot(15-5)+25=20\cdot10+25=225$
j = $14\cdot16=(15-1)\cdot(15+1)=15^2-1^2=225-1=224$
k = $13\cdot17=(15-2)\cdot(15+2)=15^2-2^2=225-4=221$

Dans chaque produit, vous pouvez vérifiez que le chiffre des unités du résultat est égale au chiffre des unités du produit des chiffres des unités des nombres de départ.
Par exemple, pour h et pour k, $3\cdot7=2\underline{\mathbf{1}}$ qui donne bien le "1" des unités du résultat.

Savez-vous qu'il est très facile d'effectuer de tête en 3 secondes les calculs suivants :
$97\cdot96$; $94\cdot91$; $93\cdot98$; $92\cdot96$ ... et bien d'autres produits similaires !
Voici l'astuce : écrivez le complément à 100 de vos deux nombres.

3 4
$97\cdot96=93\,12$ $93=97-4$ et aussi $93=96-3$, cela donne les milliers et centaines. $12=3\cdot4$
6 9
$94\cdot91=85\,54$ $85=94-9$ et aussi $85=91-6$, cela donne les milliers et centaines. $54=6\cdot9$
7 2
$93\cdot98=91\,14$ $91=93-2$ et aussi $91=98-7$, cela donne les milliers et centaines. $14=7\cdot2$
8 4
$92\cdot96=88\,32$ $88=92-4$ et aussi $92=96-8$, cela donne les milliers et centaines. $32=8\cdot4$

Exercice 3 :

Pour factorisez $x^2 + d \cdot x + e$ en $(x+a)\cdot(x+b)$ on doit chercher 2 nombres a, b tels que : $a \cdot b = e$ et $a + b = d$. Les nombres a et b peuvent être négatifs !

a) $x^2 + 5x + 6 = (x+2)\cdot(x+3)$

b) $x^2 - 7x + 10 = (x-5)\cdot(x-2)$

c) $x^2 - 11x + 24 = (x-3)\cdot(x-8)$

d) $x^2 + 2x - 8 = (x+4)\cdot(x-2)$

e) $x^2 + 4x - 21 = (x+7)\cdot(x-3)$

f) $x^2 - 6x - 7 = (x+1)\cdot(x-7)$

g) $x^2 - x - 6 = (x-3)\cdot(x+2)$

Ici, il faut généraliser la $4^{\text{ème}}$ identité remarquable !

h) $3x^2 + 4x + 1 = (3x+1)\cdot(x+1)$

i) $3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)\cdot(x+1)$

j) $3x^2 + x - 2 = (x+1)\cdot(3x-2)$

k) $2x^2 - x - 10 = (x+2)\cdot(2x-5)$

l) $2x^2 + 5x - 7 = (2x+7)\cdot(x-1)$

m) $6x^2 - 11x + 4 = (3x-4)\cdot(2x-1)$

n) $12x^2 - 25x + 12 = (4x-3)\cdot(3x-4)$

Exercice 4 :

a) $(6-x)\cdot(7-x) = -(x-6)\cdot(7-x)$ C'est une identité, car $-(x-6) = (6-x)$.

b) $(6-x)\cdot(7-x) = -(6-x)\cdot(x-7)$

C'est une identité, car $-(6-x)\cdot(x-7) = (6-x)\cdot\big(-(x-7)\big)$ et $-(x-7) = (7-x)$.

c) $(6-x)\cdot(7-x) = (x-6)\cdot(x-7)$ C'est une identité, car on change le signe de deux facteurs.

d) $7x^2 - 3x + 2 = 7\cdot(x-1)\cdot(x-2)$ Ce n'est pas une identité, cela se remarque en développant, on constate que le 7 multiplie chaque terme du membre développé de droite.

$7\cdot(x-1)\cdot(x-2) = 7x^2 - 21x + 14$

Exercice 5 :

a) Notons x un nombre et $2x$ son double.

L'énoncé indique que : $x \cdot 2x = \dfrac{x+2x}{2}$.

C'est une équation qui se ramène à : $4x^2 = 3x$. Donc $4x^2 - 3x = 0$

Factorisation : $x\cdot(4x-3) = 0$.

Soit $x = 0$, soit $x = 3 / 4 = 0{,}75$.

Il y a deux réponses, soit les deux nombres sont nuls, soit l'un vaut 0,75 et l'autre 1,5.

b*) Notons x le plus petit chiffre de la suite de 4 chiffre. Les suivants sont : x+1 ; x+2 et x+3.

On veux que $10\cdot x + (x+1) = (x+2)\cdot(x+3)$. Cette équation se ramène à : $11x + 1 = x^2 + 5x + 6$

Donc $x^2 - 6x + 5 = 0$ qui se factorise en : $(x-1)\cdot(x-5) = 0$.

Il y a deux solutions, qui sont celles données dans l'exercice. Il n'existe pas d'autres exemples similaires à ceux de l'énoncé.

Exercice 5, suite.

c) Première remarque, le nombre a, ainsi que les autres sont tous positifs, car soit une somme de nombre positifs, soit la racine de gauche est plus grande que celle de droite.
L'astuce est de mettre le nombre a au carré et de vérifier qu'on obtient 4.

$$a^2 = \left(\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}\right) = 3+\sqrt{8}+3-\sqrt{8}-2\cdot\sqrt{3+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{8}} = 6-2\cdot\sqrt{\left(3+\sqrt{8}\right)\cdot\left(3-\sqrt{8}\right)}$$

On utilise ensuite la 3ème identité remarquable sur le produit sous la racine carré.
$a^2 = 6-2\cdot\sqrt{9-8} = 6-2 = 4$. a étant positif, a vaut bien 2.
Pour les autres nombres, l'astuce est la même.

$$b^2 = \left(\sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}\right)^2 = 4+\sqrt{12}+4-\sqrt{12}-2\cdot\sqrt{4+\sqrt{12}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{12}} =$$

$b^2 = 8-2\cdot\sqrt{\left(\sqrt{4+\sqrt{12}}\right)\cdot\left(\sqrt{4-\sqrt{12}}\right)} = 8-2\cdot\sqrt{16-12} = 4$ et $b > 0$, donc b vaut aussi 2.

$$c^2 = \left(\sqrt{9+\sqrt{80}} - \sqrt{9-\sqrt{80}}\right)^2 = 9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}-2\cdot\sqrt{9+\sqrt{80}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{80}} =$$

$c^2 = 18-2\cdot\sqrt{\left(9+\sqrt{80}\right)\cdot\left(9-\sqrt{80}\right)} = 18-2\cdot\sqrt{81-80} = 16$ et $c > 0$, donc c vaut 4.

$$d^2 = \left(\sqrt{19+\sqrt{360}} - \sqrt{19-\sqrt{360}}\right)^2 = 38-2\cdot\sqrt{\left(19+\sqrt{360}\right).\left(19-\sqrt{360}\right)} = 38-2\cdot\sqrt{19^2-360} =$$

$d^2 = = 38-2\cdot\sqrt{361-360} = 36$ et $d > 0$, donc d vaut 6.

$$e^2 = \left(\sqrt{6+\sqrt{32}} + \sqrt{6-\sqrt{32}}\right)^2 = 12+2\cdot\sqrt{\left(6+\sqrt{32}\right)\cdot\left(6-\sqrt{32}\right)} = 12+2\cdot\sqrt{36-32} = 12+4 = 16$$

et $e > 0$, donc e vaut 4.

$$f^2 = \left(\sqrt{7+\sqrt{48}} + \sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^2 = 14+2\cdot\sqrt{\left(7+\sqrt{48}\right)\cdot\left(7-\sqrt{48}\right)} = 14+2\cdot\sqrt{49-48} = 16$$

et $f > 0$, donc f vaut 4.

$$g^2 = \left(\sqrt{11+\sqrt{72}} + \sqrt{11-\sqrt{72}}\right)^2 = 22+2\cdot\sqrt{\left(11+\sqrt{72}\right)\cdot\left(11-\sqrt{72}\right)} = 22+2\cdot\sqrt{121-72} = 36$$

et $g > 0$, donc g vaut 6.

Exercice 6 :

Il faut remarquer que $7\cdot 11\cdot 13 = 1'001$ et multiplier un nombre de trois chiffres par 1'001 revient à répéter les 3 chiffres. Autrement dit, 1'001 · *cdu* = *cdu'cdu*.
En conséquence tous les nombres de la forme *cdu'cdu* sont divisibles par 1'001, et donc par 7, 11 et 13.

Exercice 7 :
Cela a-t-il un sens d'additionner les 27 francs payés par les bidasses avec les 2 euros de la serveuse ?
Pourquoi cela devrait-il donner 30.
Il faut remarquer que $25 + 2 = 27 = 3 \cdot 9$, qui est le calcul correct à effectuer.