Exercice 1 :

a) On développe : $\left(x^2+3\cdot x+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)=x^4+3\cdot x^3-3\cdot x-1$

b) On utilise l'identité remarquable : $A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$

$\left(a-1\right)^2-\left(a+1\right)^2=(a-1+a+1)\cdot(a-1-a-1)=2\cdot a\cdot(-2)=-4\cdot a$

b) Autre manière, on développe : $\left(a-1\right)^2-\left(a+1\right)^2=a^2-2\cdot a+1-a^2-2\cdot a-1=-4\cdot a$

c) On utilise les identités remarquables : $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$ et $A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$

$\left(a+b\right)^2-2\cdot\left(a^2-b^2\right)+\left(a-b\right)^2=\left(a+b\right)^2-2\cdot\left(a+b\right)\cdot\left(a-b\right)+\left(a-b\right)^2=\left((a+b)-(a-b)\right)^2=4\cdot b^2$

Il est possible mais plus compliqué de développer les carrés de l'expression de gauche, puis de simplifier

d) On utilise l'identité remarquable $(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$

$\left(3\cdot a-2\cdot b\right)\cdot\left(9\cdot a^2+6\cdot a\cdot b+4\cdot b^2\right)=\left(3\cdot a-2\cdot b\right)\cdot\left((3\cdot a)^2+3\cdot a\cdot 2\cdot b+(2\cdot b)^2\right)=$

$=(3\cdot a)^3-(2\cdot b)^3=27\cdot a^3-8\cdot b^3$

Il est possible mais plus compliqué de développer l'expression de gauche, puis de simplifier.

e) On utilise deux fois l'identité remarquable : $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$

$\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^4+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)=\left(x^4+1\right)\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)=\left(x^4+1\right)\cdot\left(x^4-1\right)=x^8-1$

f) $\left(2\cdot x+y\right)\cdot\left(4\cdot x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\right)=\left(2\cdot x\right)^3+y^3=8\cdot x^3+y^3$

Si on ne reconnaît pas une identité remarquable, on peut tout développer, et avoir de gros calculs, qui se simplifient par la suite.

g) $\left(a-1\right)\cdot\left(a^2+a+1\right)\cdot\left(a+1\right)\cdot\left(a^2-a+1\right)=(a^3-1)\cdot(a^3+1)=a^6-1$

Tout développer serait possible, mais fastidieux. Il est plus simple de remarquer que l'on a des identités remarquables.

h) $(m^3+1)\cdot(m^3-1)=(m^3)^2-1=m^6-1$

i) $\left(2\cdot a\cdot x-u\right)^2=4\cdot a^2\cdot x^2-4\cdot a\cdot x\cdot u+u^2$ Ici on a simplement développé avec une id. rem.

j) $\left(m+n\right)^2-\left(m-n\right)^2+\left(m+n\right)\cdot\left(m-n\right)=\left((m+n)+(m-n)\right)\cdot\left((m+n)-(m-n)\right)+m^2-n^2=$

$=\left(2\cdot m\right)\cdot\left(2\cdot n\right)+m^2-n^2=4\cdot m\cdot n+m^2-n^2=m^2+4\cdot m\cdot n-n^2$

On a utilisé l'identité remarquable : $A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$ sur la première paire et sur la seconde.

k) $\left(a\cdot x-b\cdot y\right)^2=a^2\cdot x^2-2\cdot a\cdot x\cdot b\cdot y+b^2\cdot y^2$

l) $\left(1-4\cdot a\cdot b\cdot c\right)^2=1-8\cdot a\cdot b\cdot c+16\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2$

m) $\left(-0.3\cdot a^2+0.2\cdot b^2\right)^2=0.09\cdot a^4-0.12\cdot a^2\cdot b^2+0.04\cdot b^4$

n) $\left(a+b-c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b-2\cdot a\cdot c-2\cdot b\cdot c$

o) $\left(-a-b-c\right)^2=\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c$

p) $\left(3\cdot x+2\cdot y\right)^3=27\cdot x^3+3\cdot 9\cdot x^2\cdot 2\cdot y+3\cdot 3\cdot x\cdot 4\cdot y^2+8\cdot y^3=27\cdot x^3+54\cdot x^2\cdot y+36\cdot x\cdot y^2+8\cdot y^3$

q) $\left(x^3-x^2+x-1\right)^2=\left((x^2+1)\cdot(x-1)\right)^2$ Pas utile comme développement initial.

$\left(x^3-x^2+x-1\right)^2=x^6+x^4+x^2+1+2\cdot x^4+2\cdot x^2-2\cdot x^5-4\cdot x^3-2\cdot x=$

$=x^6-2\cdot x^5+3\cdot x^4-4\cdot x^3+3\cdot x^2-2\cdot x+1$ On développe.

r) $\left(a+b\right)^3-\left(a^3+b^3\right)-3\cdot a\cdot b\cdot(a+b)=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3-a^3-b^3-3\cdot a^2\cdot b-3\cdot a\cdot b^2=0$

s) $\left(\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{4}\cdot y\right)^3=\frac{1}{8}\cdot x^3+3\cdot\frac{1}{4}\cdot x^2\cdot\frac{3}{4}\cdot y+3\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{9}{16}\cdot y^2+\frac{27}{64}\cdot y^3=\frac{1}{8}\cdot x^3+\frac{9}{16}\cdot x^2\cdot y+\frac{27}{32}\cdot x\cdot y^2+\frac{27}{64}\cdot y^3$

t) $\left(2\cdot a\cdot b^2\cdot c^3-5\right)^3=8\cdot a^3\cdot b^6\cdot c^9-60\cdot a^2\cdot b^4\cdot c^6+150\cdot a\cdot b^2\cdot c^3-125$

u) $\left(1-z\right)^3\cdot\left(1+z\right)^3=\left((1-z)\cdot(1+z)\right)^3=\left(1-z^2\right)^3=1-3\cdot z^2+3\cdot z^4-z^6$

Exercice 2 :

a) $25\cdot x^2-40\cdot x\cdot y+\ldots=\ (5x)^2-2\cdot 5x\cdot 4y\underline{\underline{+(4y)^2}}=\underline{\underline{\left(5\cdot x-4\cdot y\right)^2}}$

$A^2\ -2\cdot A\cdot B\ +\ B^2\ =(A-B)^2$

b) $x^2+p\cdot x+\ldots=\ (x)^2+2\cdot x\cdot\frac{p}{2}\underline{\underline{+\left(\frac{p}{2}\right)^2}}=\underline{\underline{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}}$

$A^2\ +2\cdot A\cdot B\ +\ B^2\ =(A+B)^2$

c) $4\cdot c^2+a^2+\ldots=(2c)^2+a^2\underline{\underline{+2\cdot 2c\cdot a}}=\underline{\underline{(a+2c)^2}}$ Autre solution : $(2c)^2+a^2\underline{\underline{-4\,c\cdot a}}=\underline{\underline{(a-2c)^2}}$

$A^2\ +B^2+2\cdot A\cdot B=(A+B)^2$ $\qquad A^2\ +B^2-2\cdot A\cdot B=(A-B)^2$

d) $4+4\cdot a^2\cdot b^2+\ldots=\ 2^2+(2ab)^2\underline{\underline{+2\cdot 2\cdot 2ab}}=\underline{\underline{(2+2ab)^2}}$ Autre sol. : $2^2+(2ab)^2\underline{\underline{-8ab}}=\underline{\underline{(2-2ab)^2}}$

$A^2\ +B^2+\ 2\cdot A\cdot\ B\ =(A+B)^2$ $\qquad A^2+B^2-2\cdot A\cdot B=(A-B)^2$

Autre solution : $4+4\cdot a^2\cdot b^2+\ldots=2^2+2\cdot 2\cdot a^2b^2\underline{\underline{+(a^2b^2)^2}}=\underline{\underline{(2+a^2b^2)^2}}$

$A^2\ +2\cdot A\cdot B\ +\ B^2\ =(A+B)^2$

e) $9\cdot x^2+4+\ldots=\ (3x)^2+2^2\underline{\underline{\pm 2\cdot 3x\cdot 2}}=\underline{\underline{(3x\pm 2)^2}}$ Le "±" indique deux solutions.

$A^2\ +B^2\pm 2\cdot A\cdot B=(A\pm B)^2$

f) $1-2\cdot x\underline{\underline{+x^2}}=\underline{\underline{(x-1)^2}}$

g) $1+16\cdot x^2+\ldots=\ 1^2+(4x)^2\underline{\underline{\pm 2\cdot 1\cdot 4x}}=\underline{\underline{(1\pm 4x)^2}}$ Le "±" indique deux solutions.

$A^2\ +B^2\pm 2\cdot A\cdot B=(A\pm B)^2$

Autre solution : $1+16\cdot x^2+\ldots=\ 1^2+2\cdot 1\cdot 8x^2\underline{\underline{+(8x^2)^2}}=\underline{\underline{(1+8x^2)^2}}$

$A^2+2\cdot A\cdot B+B^2\ =(A+B)^2$

h) $4\cdot z^2-20\cdot z+..=\ (2z)^2-2\cdot 2z\cdot 5\underline{\underline{+5^2}}=\underline{\underline{(2z-5)^2}}$

$A^2\ -2\cdot A\cdot B+B^2=(A-B)^2$

i) $49\cdot a^4\cdot c^6-7\cdot a^2\cdot c^3+\ldots=\ \left(7a^2c^3\right)^2-2\cdot 7a^2c^3\cdot\frac{1}{2}\underline{\underline{+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\underline{\underline{\left(7a^2c^3-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$A^2\ -2\cdot\ A\ \cdot B+\ B^2\ =(\ A\ -B)^2$

j) $\frac{x^2}{4}+x+\ldots=\ \left(\frac{x}{2}\right)^2+2\cdot\frac{x}{2}\cdot 1\ \underline{\underline{+1^2}}=\underline{\underline{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}}$

$A^2\ +2\cdot A\cdot B+B^2=(A+B)^2$