Exercice 1 :

a) On développe et simplifie : $(x-a)\cdot(x^2+ax+a^2)=x^3+ax^2+a^2x-ax^2-a^2x-a^3=x^3-a^3$

b) On développe et simplifie : $(x+a)\cdot(x^2-ax+a^2)=x^3-ax^2+a^2x+ax^2-a^2x+a^3=x^3+a^3$

Ces deux égalités sont des identités remarquables, cubiques.

c) On développe et simplifie :

$(x-a)^2-(x+a)^2=x^2-2ax+a^2-(x^2+2ax+a^2)=x^2-2ax+a^2-x^2-2ax-a^2\underline{\underline{=-4ax}}$

c) Plus simple est d'utiliser l'identité remarquable : $A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$

$(x-a)^2-(x+a)^2=(x-a+x+a)\cdot(x-a-x-a)=2x\cdot(-2a)\underline{\underline{=-4ax}}$

d) On développe et simplifie :

$(a+b)^2-2\cdot(a^2+b^2)+(a-b)^2=a^2+2ab+b^2-2a^2-2b^2+a^2-2ab+b^2\underline{\underline{=0}}$

e) On peut développer, mais il est plus simple d'utiliser la 3ème identité remarquable, deux fois.

$(x^2+1)\cdot(x^2-1)\cdot(x^4+1)=(x^4-1)\cdot(x^4+1)=x^8-1$

On a utilisé : $(x^2)^2=x^4$ et $(x^4)^2=x^8$.

f) On utilise de nouveau la 3ème l'identité remarquable : $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$

$(x^3+1)\cdot(x^3-1)=\left((x^3)^2-1\right)=x^6-1$

g) $(2ax-u)^2=4a^2x^2-4ax\cdot u+u^2$ Ici on a simplement développé avec une identité remarquable.

h) $(ax-by)^2=a^2x^2-2ax\cdot by+b^2y^2$

i) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c$

j) $(-a-b-c)^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c$ même résultat que précédemment.

k) $(x+a)^3=(x+a)\cdot(x+a)^2=(x+a)\cdot(x^2+2ax+a^2)=x^3+2ax^2+a^2x+ax^2+2a^2x+a^3=$

$x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$. C'est une identité remarquable cubique.

l) $(x+a)^3-(x^3+a^3)-3ax\cdot(x+a)=(x+a)^3-x^3-a^3-3ax^2-3a^2x\underline{\underline{=0}}$,

On utilise le résultat du développement précédent.

m) $(x-a)^3=(x-a)\cdot(x-a)^2=(x-a)\cdot(x^2-2ax+a^2)=x^3-2ax^2+a^2x-ax^2+2a^2x-a^3=$

$x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$. C'est une identité remarquable cubique.

n) Tout développer est long, il faut remarquer la troisième identité remarquable, ainsi qu'une identité remarquable cubique, vue précédemment.

$(x-1)^3\cdot(x+1)^3=\left((x-1)\cdot(x+1)\right)^3=(x^2-1)^3=x^6-3x^4+3x^2-1$.

On a utilisé : $(x^2)^3=x^6$ et $(x^2)^2=x^4$.

o) $(x+a)^4=(x+a)\cdot(x+a)^3=(x+a)\cdot(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)=$

$x^4+3ax^3+3a^2x^2+a^3x+ax^3+3a^2x^2+3a^3x+a^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$

C'est une identité remarquable de degré 4.

p*) $(x+a)^5=(x+a)\cdot(x+a)^4=\ldots=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$

C'est une identité remarquable de degré 5.

Il existe une formule générale pour développer : $(x+a)^n$.

Exercice 2 :

a) $x^2 + 2ax + \underline{\underline{a^2}} = \underline{\underline{(x+a)^2}}$

b) $x^2 + 14x + \ldots = x^2 + 2 \cdot 7 \cdot x + \underline{\underline{7^2}} = \underline{\underline{(x+7)^2}}$

c) $x^2 + p \cdot x + \ldots = \ x^2 + 2 \cdot \dfrac{p}{2} \cdot x + \underline{\underline{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2}} = \underline{\underline{\left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2}}$

d) $x^2 + 13 \cdot x + \ldots = \ x^2 + 2 \cdot \dfrac{13}{2} \cdot x + \underline{\underline{\left(\dfrac{13}{2}\right)^2}} = \underline{\underline{\left(x + \dfrac{13}{2}\right)^2}}$

e) $9x^2 + 12x + \ldots = (3x)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3x + \underline{\underline{2^2}} = \underline{\underline{(3x+2)^2}}$

f) $16x^2 - 24x + \ldots = (4x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4x + \underline{\underline{3^2}} = \underline{\underline{(4x-3)^2}}$

g) $16x^2 + 1 - \ldots = (4x)^2 - \underline{\underline{2 \cdot 1 \cdot 4x}} + 1^2 = (4x)^2 - \underline{\underline{8x}} + 1^2 = \underline{\underline{(4x-1)^2}}$

h) $2x^2 - 4x + \ldots = 2 \cdot \left(x^2 - 2x + \underline{\underline{1^2}}\right) = \underline{\underline{2 \cdot (x-1)^2}}$

i) $3x^2 + 30x + \ldots = 3 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + \underline{\underline{5^2}}\right) = \underline{\underline{3 \cdot (x+5)^2}}$

j) $\dfrac{x^2}{4} + x + \ldots = \ \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + 2 \cdot 1 \cdot \dfrac{x}{2} \ \underline{\underline{+1^2}} = \underline{\underline{\left(\dfrac{x}{2} + 1\right)^2}}$

Autre solution : $\dfrac{x^2}{4} + x + \ldots = \ \dfrac{1}{4} \cdot \left(x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x \underline{\underline{+ 2^2}}\right) = \underline{\underline{\dfrac{1}{4} \cdot (x+2)^2}}$

Exercice 3 :

a) $x^2 + 14x + 49 = 4 \iff (x+7)^2 = 2^2 \iff x + 7 = \pm 2 \iff x = -7 \pm 2 \quad S = \{-9\,;-5\}$

Autre résolution : $x^2 + 14x + 45 = 0 \iff (x+9) \cdot (x+5) = 0 \quad S = \{-9\,;-5\}$

b) C'est la même équation qu'en a) !

c) $x^2 + 14x + 49 = 2 \iff (x+7)^2 = 2 \iff x + 7 = \pm\sqrt{2} \iff x = -7 \pm \sqrt{2} \quad S = \{-7+\sqrt{2}\,;-7-\sqrt{2}\}$

Ceci montre un intérêt de compléter des binômes pour obtenir des carrés.

d) C'est la même équation qu'en b) !

e) $x^2 + 6x + 7 = 0 \iff x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = 2 \iff (x+3)^2 = 2 \iff x + 3 = \pm\sqrt{2} \iff$
$x = -3 \pm \sqrt{2} \quad S = \{-3+\sqrt{2}\,;-3-\sqrt{2}\}$

Sans compléter les binômes, la factorisation est compliquée.
Une méthode générale pour résoudre des équations du second degré sera vue plus tard.

f) $x^2 - 6x + 7 = 0 \iff x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = 2 \iff (x-3)^2 = 2 \iff x - 3 = \pm\sqrt{2} \iff$
$x = 3 \pm \sqrt{2} \quad S = \{3+\sqrt{2}\,;3-\sqrt{2}\}$

g) $x^2 + 5x + \dfrac{25}{4} = 36 \iff \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 = 6^2 \iff x + \dfrac{5}{2} = \pm 6 \iff x = -\dfrac{5}{2} \pm 6 \quad S = \left\{-\dfrac{17}{2}\,;\dfrac{7}{2}\right\}$

h) $x^2 + 5x = 36 \iff x^2 + 5x + \dfrac{25}{4} = 36 + \dfrac{25}{4} \iff \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{169}{4} \iff x + \dfrac{5}{2} = \pm\dfrac{13}{2} \iff$
$x = -\dfrac{5}{2} \pm \dfrac{13}{2} \quad S = \{-9\,;4\}$

Autre résolution : $x^2 + 5x - 36 = 0 \iff (x+9) \cdot (x-4) = 0 \quad S = \{-9\,;4\}$.

i) $x^2 + 2 \cdot x + 1 = -1 \iff (x+1)^2 = -1$ Cette équation n'a pas de solution, on écrit : $S = \varnothing$.

j*) $x^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot x + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4} \iff \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4} \iff x - \dfrac{1}{2} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \iff x = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2} \quad S = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Exercice 4 :

a) Notons x le premier nombre et $2x$ le double. L'énoncé indique que :

$x \cdot 2x = \dfrac{x+2x}{2}$ donc $4x^2 = 3x$ ce qui revient à résoudre : $4x^2 - 3x = 0$.

On factorise : $(4x-3)\cdot x = 0$.

Soit $x = 0$, c'est-à-dire que les deux nombres sont nuls,

soit $x = \dfrac{3}{4}$, c'est-à-dire que le premier nombre vaut 0,75 et le deuxième 1,5.

b) Notons x la longueur d'un côté du plus petit carré et y la longueur d'un côté du plus grand carré.

L'énoncé indique que $y^2 = 2\cdot x^2$, donc $y = \sqrt{2}\cdot x$.

Le rapport des longueurs des côtés est donc de : $\dfrac{y}{x} = \sqrt{2}$.

c) Notons x la longueur d'un côté du carré et y la longueur d'un côté du triangle équilatéral.

Dans une série précédente (n° 2), nous avons vu que l'aire d'un triangle équilatéral vaut : $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot y^2$.

L'énoncé indique que $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot y^2 = x^2$, donc $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}}}{2}\cdot y = x$, c'est-à-dire. $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}\cdot y = x$

Le rapport des longueurs des côtés est donc de : $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{\sqrt[4]{3}} \approx 1,51967$.

d*) Notons x le nombre d'or. L'énoncé indique que $x^2 = x + 1$.

C'est exactement l'équation j) de l'exercice 3.

Donc $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

Un rectangle ayant un rapport de ses côtés égale au nombre d'or est considéré comme étant particulièrement esthétique.

La construction suivante donne des rectangles de plus en plus proches du rectangle d'or.