❶ Réduisez l'écriture sans calculatrice :

A) $7^3 \cdot 7^2 = 7^5$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
B) $\dfrac{7^5}{7^2} = 7^{5-2} = 7^3$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
C) $7^0 = 1$	$a^0 =$
D) $\dfrac{1}{7} =$ $\qquad \dfrac{1}{7^3} = 7^{-3}$	$\dfrac{1}{a} = a^{-1}$ $\qquad \dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$
E) $\left(7^3\right)^4 = 7^{3\cdot 4} = 7^{12}$	$\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$
F) $\left(7^2 \cdot 19^3\right)^4 = 7^8 \cdot 19^{12}$	$\left(a^m \cdot b^n\right)^p = \left(a^m\right)^p \cdot \left(b^n\right)^p = a^{m\cdot p} \cdot b^{n\cdot p}$
G) $7^5 \cdot 7^{-2} = 7^{5-2} = 7^3$	$\dfrac{7^5}{7^{-2}} = 7^{5-(-2)} = 7^7$
H) $7^{-4} \cdot 7^{-2} = 7^{-4-2} = 7^{-6}$	$\dfrac{7^{-2}}{7^5} = 7^{-2-5} = 7^{-7}$
I) $7^3 \cdot 7^{-8} = 7^{3-8} = 7^{-5}$	$\dfrac{7^{-5}}{7^{-2}} = 7^{-5-(-2)} = 7^{-3}$
J) $\dfrac{75}{405} = \dfrac{15\cdot 5}{15\cdot 27} = \dfrac{5}{27}$ K) $\dfrac{75}{205+200} = \dfrac{75}{405} = \dfrac{5}{27}$ c.f. J) L) $\dfrac{9^2 - 2^5}{4^2} = \dfrac{81-32}{16} = \dfrac{49}{16}$ M) $\dfrac{5a^3 - 6a}{15a^2} = \dfrac{a\cdot\left(5a^2 - 6\right)}{15a^2} = \dfrac{5a^2 - 6}{15a}$	**Règles :** 1. Pour pouvoir simplifier une fraction, **IL FAUT que le numérateur et le dénominateur soient des produits de facteurs.** S'ils ne sont pas tous deux des produits, **alors on ne peut pas simplifier** et il faut calculer chaque somme, au numérateur et au dénominateur. 2. Les règles sur les exposants s'appliquent sans exception, que les exposants soient des nombres entiers positifs ou négatifs, ou des fractions.

❷ Simplifiez au maximum les expressions suivantes:

a) $\frac{27\cdot5}{25\cdot3\cdot2}=\frac{9}{10}$	b) $\frac{4^2\cdot15}{6\cdot10}=\frac{(2^2)^2\cdot3\cdot5}{2\cdot3\cdot5\cdot2}=$ $\frac{2^4}{2^2}=2^{4-2}=4$	c) $\frac{20^4\cdot3^7}{8^3\cdot9^3\cdot15^2}=$ $\frac{(2^2\cdot5)^4\cdot3^7}{(2^3)^3\cdot(3^2)^3\cdot(3\cdot5)^2}=$ $\frac{2^8\cdot5^4\cdot3^7}{2^9\cdot3^6\cdot3^2\cdot5^2}=\frac{5^2}{2\cdot3}=\frac{25}{6}$
d) $\frac{12^5\cdot7^3}{6^5\cdot14^2}=$ $\frac{(2^2\cdot3)^5\cdot7^3}{(2\cdot3)^5\cdot(2\cdot7)^2}=$ $\frac{2^{10}\cdot3^5\cdot7^3}{2^5\cdot3^5\cdot2^2\cdot7^2}=\frac{2^3\cdot7}{1}=56$	e) $\frac{25^3\cdot4^3\cdot9^{-2}}{5^7\cdot8^2\cdot3^{-5}}=$ $\frac{(5^2)^3\cdot(2^2)^3\cdot(3^2)^{-2}}{5^7\cdot(2^3)^2\cdot3^{-5}}=$ $\frac{5^6\cdot2^6\cdot3^{-4}}{5^7\cdot2^6\cdot3^{-5}}=\frac{3}{5}=0,6$	f) $\frac{10^{-4}\cdot27^2\cdot5^8}{2^{-5}\cdot15^3}=$ $\frac{(2\cdot5)^{-4}\cdot(3^3)^2\cdot5^8}{2^{-5}\cdot(3\cdot5)^3}=$ $\frac{2^{-4}\cdot5^{-4}\cdot3^6\cdot5^8}{2^{-5}\cdot3^3\cdot5^3}=\frac{2\cdot3^3\cdot5}{1}=270$

❸Simplifiez au maximum les expressions suivantes :

a) $\frac{(2a)^3}{4a^2}=\frac{2^3\cdot a^3}{2^2\cdot a^2}=\frac{2a}{1}=2a$	b) $\frac{(6ab^2)^3}{(2a^2b)^2}=$ $\frac{(2\cdot3)^3\cdot a^3\cdot(b^2)^3}{2^2\cdot(a^2)^2\cdot b^2}=$ $\frac{2^3\cdot3^3\cdot a^3\cdot b^6}{2^2\cdot a^4\cdot b^2}=\frac{2\cdot3^3\cdot b^4}{a}=\frac{54b^4}{a}$	c) $\frac{45a^7(2c^4)^2}{(3c)^2\cdot(5a^2)^2}=$ $\frac{3^2\cdot5\cdot a^7\cdot2^2\cdot(c^4)^2}{3^2\cdot c^2\cdot5^2\cdot(a^2)^2}=$ $\frac{a^7\cdot2^2\cdot c^8}{c^2\cdot5\cdot a^4}=\frac{4a^3c^6}{5}$
d) $\frac{5a^{-1}(2c^{-3})^2}{10a^{-3}c^{-2}}=$ $\frac{5a^{-1}\cdot2^2(c^{-3})^2}{2\cdot5\cdot a^{-3}c^{-2}}=$ $\frac{a^2\cdot2c^{-6}}{c^{-2}}=\frac{2a^2}{c^4}$	e) $\frac{5(3ab^2c^{-1})^2}{(3a^2b)^3\cdot15c^{-2}}=$ $\frac{5\cdot3^2\cdot a^2\cdot(b^2)^2\cdot(c^{-1})^2}{3^3(a^2)^3b^3\cdot3\cdot5\cdot c^{-2}}=$ $\frac{b}{3^2a^4}=\frac{b}{9a^4}$	f) $\frac{2(ab^{-1})^{-1}}{7(a^{-2}b)^3}=$ $\frac{2\cdot a^{-1}\cdot(b^{-1})^{-1}}{7(a^{-2})^3\cdot b^3}=$ $\frac{2\cdot a^{-1}\cdot b^1}{7a^{-6}\cdot b^3}=\frac{2\cdot a^5}{7b^2}$

❹ Supposons $a \geq 0$

On sait que $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ Donc $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a$

D'autre part $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$ D'où l'équivalence d'écriture : $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

Et en généralisant : $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Ecrivez de <u>quatre</u> manières différentes $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Simplifiez les expressions suivantes :

a) $27^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{3\cdot\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

b) $16^{-\frac{1}{4}} = \left(2^4\right)^{-\frac{1}{4}} = 2^{4\cdot\frac{-1}{4}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$

c) $\left(\frac{1}{243^{-1}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(243^1\right)^{\frac{1}{5}} = \left(3^5\right)^{\frac{1}{5}} = 3$

d) $\frac{64^{\frac{2}{3}}}{25^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\left(2^6\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(5^2\right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4}{5^{-1}} = 80$

---

❺ VRAI ou FAUX ?

a) $\sqrt{16+9} = \sqrt{16}+\sqrt{9}$ FAUX ! $\sqrt{25} \neq 4+3$

b) $\sqrt{A^2+B^2} = A+B$ **Règle fausse puisqu'on a trouvé un contre-exemple**

La règle correcte est : $\boxed{\sqrt{A^2\cdot B^2} = A\cdot B}$ (A et B de même signe)

<u>Sans calculatrice</u>, effectuez les opérations :

c) $\sqrt{160'000} = \sqrt{16\cdot 10'000} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{10^4} = 4\cdot\left(10^4\right)^{\frac{1}{2}} = 4\cdot 100 = 400$

d) $\sqrt[3]{729'000'000} = \sqrt[3]{729}\cdot\sqrt[3]{1'000'000} = \left(3^6\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(10^6\right)^{\frac{1}{3}} = 3^2\cdot 10^2 = 900$

e) $\sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} = \underline{\underline{3\cdot\sqrt{2}}}$ ceci est un <u>nombre exact.</u>

Donnez la <u>valeur approchée</u>, arrondie au dix-millième, de ce nombre : $\sqrt{18} \approx 4,2426$

f) $\sqrt{18}+7\cdot\sqrt{50}-8\cdot\sqrt{72} = \sqrt{9\cdot 2}+7\cdot\sqrt{25\cdot 2}-8\cdot\sqrt{36\cdot 2} = 3\cdot\sqrt{2}+7\cdot 5\cdot\sqrt{2}-8\cdot 6\cdot\sqrt{2} =$
$= 3\cdot\sqrt{2}+35\cdot\sqrt{2}-48\cdot\sqrt{2} = \underline{\underline{-10\cdot\sqrt{2}}}$

g) $-4\cdot\sqrt{20}+3\cdot\sqrt{125}-2\cdot\sqrt{45} = -4\cdot\sqrt{4\cdot 5}+3\cdot\sqrt{25\cdot 5}-2\cdot\sqrt{9\cdot 5} = -4\cdot 2\cdot\sqrt{5}+3\cdot 5\cdot\sqrt{5}-2\cdot 3\cdot\sqrt{5} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$

❻ Réduisez au maximum les expressions suivantes (réponse avec dénominateur entier) :

a) $5\cdot\sqrt{8}-3\cdot\sqrt{18}=5\cdot\sqrt{4\cdot 2}-3\cdot\sqrt{9\cdot 2}=5\cdot 2\sqrt{2}-3\cdot 3\sqrt{2}=\sqrt{2}$

b) $\sqrt{6}-\sqrt{96}+3\cdot\sqrt{150}=\sqrt{6}-\sqrt{16\cdot 6}+3\cdot\sqrt{25\cdot 6}=\sqrt{6}-4\cdot\sqrt{6}+3\cdot 5\cdot\sqrt{6}=12\cdot\sqrt{6}$

c) $\sqrt{50}-2\cdot\sqrt{8}+3\cdot\sqrt{32}-7\cdot\sqrt{2}=$
$\sqrt{25\cdot 2}-2\cdot\sqrt{4\cdot 2}+3\cdot\sqrt{16\cdot 2}-7\cdot\sqrt{2}=5\cdot\sqrt{2}-2\cdot 2\cdot\sqrt{2}+3\cdot 4\cdot\sqrt{2}-7\cdot\sqrt{2}=6\cdot\sqrt{2}$

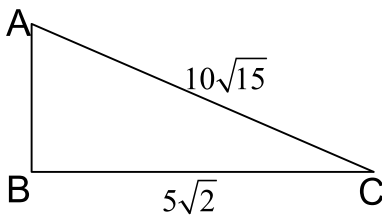
d) $\dfrac{\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{300}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{25\cdot 3}-\sqrt{16\cdot 3}+\sqrt{100\cdot 3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\cdot\sqrt{3}-4\cdot\sqrt{3}+10\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{11\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=11$

e) $\dfrac{12}{\sqrt{6}}-2\cdot\sqrt{96}+3\cdot\sqrt{150}=\dfrac{12\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}-2\cdot\sqrt{16\cdot 6}+3\cdot\sqrt{25\cdot 6}=\dfrac{12\cdot\sqrt{6}}{6}-2\cdot 4\cdot\sqrt{6}+3\cdot 5\cdot\sqrt{6}=9\cdot\sqrt{6}$

f) $\dfrac{5}{2}\cdot\sqrt{32}+\dfrac{\sqrt{18}}{10}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{5}{2}\cdot\sqrt{16\cdot 2}+\dfrac{\sqrt{9\cdot 2}}{10}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{4}{1}\sqrt{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{10}-\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=10\sqrt{2}+0,3\sqrt{2}-0,5\sqrt{2}=9,8\sqrt{2}$

g) $\sqrt{180}-\sqrt{\dfrac{144}{5}}+\sqrt{\dfrac{49}{125}}=\sqrt{36\cdot 5}-\dfrac{12}{\sqrt{5}}+\dfrac{7}{\sqrt{25\cdot 5}}=6\cdot\sqrt{5}-\dfrac{12}{\sqrt{5}}+\dfrac{7}{5\cdot\sqrt{5}}=6\cdot\sqrt{5}-\dfrac{12\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}+\dfrac{7\cdot\sqrt{5}}{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=$
$6\cdot\sqrt{5}-\dfrac{12\cdot\sqrt{5}}{5}+\dfrac{7\cdot\sqrt{5}}{25}=\dfrac{150\cdot\sqrt{5}-60\cdot\sqrt{5}+7\cdot\sqrt{5}}{25}=\dfrac{97\cdot\sqrt{5}}{25}$

❼



a) réponse sous forme exacte
Théorème de Pythagore :

$$BA^2+BC^2=AC^2\Rightarrow BA^2+\left(5\cdot\sqrt{2}\right)^2=\left(10\cdot\sqrt{15}\right)^2\Rightarrow$$

$$BA^2=-\left(5\cdot\sqrt{2}\right)^2+\left(10\cdot\sqrt{15}\right)^2=-5^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+10^2\cdot\left(\sqrt{15}\right)^2=$$

$$-25\cdot 2+100\cdot 15=1'450$$

Donc $BA=\sqrt{1'450}=\sqrt{25\cdot 58}=5\cdot\sqrt{58}$

b) réponse en valeur approchée, au dixième
$BA\approx 38,1$ $(38,07...)$

c) théorème de Pythagore appliqué aux valeurs approchées des côtés du triangle :

$10\cdot\sqrt{15}\approx 38,7$ $5\cdot\sqrt{2}\approx 7,1$

Il faut donc vérifier l'égalité : $38,7^2$???? $7,1^2+38,1^2$????????
$1'497,69 \neq 1'502,02$

Il n'y a pas égalité dès que l'on fait des approximations !
Les théorèmes ne concernent que les valeurs exactes.