❶ Le mot caché

I) $\frac{3x-27}{9}=3 \quad \| \cdot 9$

$3x-27=27 \quad \| +27$

$3x=54 \quad \| \div 3$

$x=18$ correspond à la lettre "r".

II) $\sqrt{3x-17}=7 \quad \| (..)^2$

$3x-17=49 \quad \| +17$

$3x=66 \quad \| \div 3$

$x=22$ correspond à la lettre "v".

III) $\frac{\sqrt{3x-9}}{2}=3 \quad \| \cdot 2$

$\sqrt{3x-9}=6 \quad \| (..)^2$

$3x-9=36 \quad \| +9$

$3x=45 \quad \| \div 3$

$x=15$ correspond à la lettre "o".

IV) $\frac{\sqrt{4x}+4}{2}=3 \quad \| \cdot 2$

$\sqrt{4x}+4=6 \quad \| -4$

$\sqrt{4x}=2 \quad \| (..)^2$

$4x=4 \quad \| \div 4$

$x=1$ correspond à la lettre "a".

V) $\frac{\sqrt{3x+10}+4}{2}=3 \quad \| \cdot 2$

$\sqrt{3x+10}+4=6 \quad \| -4$

$\sqrt{3x+10}=2 \quad \| (..)^2$

$3x+10=4 \quad \| -10$

$3x=-6 \quad \| \div 3$

$x=-2$ correspond à la lettre "B".

Le mot caché est : "**Bravo**"

❷ L'aire de la couronne égale la différence des aires entre le grand disque et le petit disque, donc :
L'aire de la couronne égale : $\underline{\underline{A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2}}$.
Il est bon de mettre en évidence π pour faire apparaître la troisième identité remarquable.
$A = \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right)$ et donc $A = \pi \cdot (R + r) \cdot (R - r)$.

Selon les définitions de $R_{moy} = \dfrac{R + r}{2}$ et de $h = R - r$, on obtient une autre joli formule pour l'aire de la couronne : $\underline{\underline{A = 2\pi \cdot R_{moy} \cdot h}}$.

Il est intéressant de remarquer que c'est le périmètre du disque se trouvant entre le grand et le petit, multiplié par l'épaisseur de la couronne.

---

❸ I) Le volume d'une bulle de savon de forme sphérique de diamètre d = 1,5 mètres est celui d'une sphère de rayon r = 0,75 mètres. Volume = $V = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 0,75^3}{3} \approx \underline{\underline{1,767 \left[m^3\right]}}$.

II) Le volume du mélange eau + savon se trouvant dans une telle bulle correspond au volume se trouvant dans la petite épaisseur de la bulle. Le plus simple est de se rendre compte que se volume vaut quasiment Volume du mélange = surface de la sphère multiplié par l'épaisseur.
Mieux vaux convertir les longueur en centimètres. r = 75 cm et l'épaisseur $h = 10^{-4}$ cm.
$V_{mélange} = 4\pi r^2 \cdot h = 4 \cdot \pi \cdot (75\,[cm])^2 \cdot 10^{-4}\,[cm] \approx \underline{\underline{7,068 \left[cm^3\right]}}$.

Cela correspond à utiliser environ 7 millilitres de mixture pour une grosse bulle de savon.

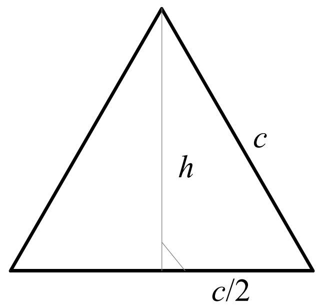
Une autre possibilité est de calculer la différence de volume entre deux sphères de rayons qui ne diffèrent que de l'épaisseur $h = 10^{-4}$ cm. Cela donne :
$$V_{mélange} = \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi(r-h)^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 75^3}{3} - \frac{4 \cdot \pi \cdot 74,9999^3}{3} \approx 1'767'145,868 - 1'767'138,799\,[cm^3]$$
On retrouve $V_{mélange} \underline{\underline{\approx 7,068 \left[cm^3\right]}}$.

Cet exercice montre qu'il faut parfois garder une grande précision lors des calculs !

---

❹ L'aire du triangle.

a) Trouvez une formule exprimant l'aire d'un triangle équilatéral, en fonction de la longueur c de ses côtés.



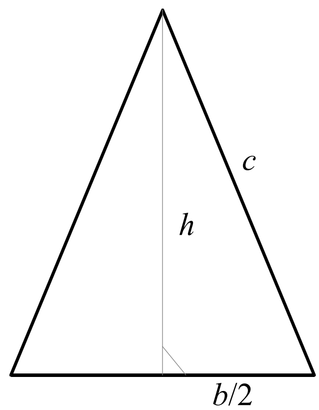
Par le théorème de Pythagore, on trouve la hauteur h grâce à : $c^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$.

Donc $h^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3}{4}\cdot c^2$ et finalement $\boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c}$.

L'aire du triangle vaut donc : $A = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h = \frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot c^2$.

On a une nouvelle formule qui permet de calculer l'aire d'un triangle équilatéral : $\boxed{A = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot c^2}$.

b) Trouvez une formule exprimant l'aire d'un triangle isocèle, en fonction des longueurs b et c de ses côtés.
La méthode est similaire à la précédente.



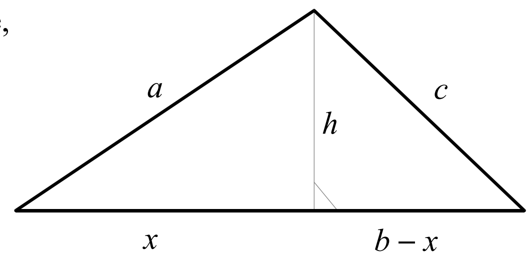
Par le théorème de Pythagore, on trouve la hauteur h grâce à : $c^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Donc $h^2 = c^2 - \frac{b^2}{4}$ et donc $h = \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

L'aire du triangle vaut donc : $A = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$.

On a une nouvelle formule qui permet de calculer l'aire d'un triangle isocèle, mais elle n'est pas très jolie, car elle n'est pas symétrique en les paramètres a et b.

c*) C'est un challenge réalisé par le grec Héron au premier siècle après Jésus Christ.
Trouvez une jolie formule exprimant l'aire d'un triangle quelconque, en fonction des trois longueurs a , b et c de ses côtés.



Par le théorème de Pythagore, on a :
$h^2 = a^2 - x^2$ et $h^2 = c^2 - (b-x)^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$
Les membres de droite étant égaux à h^2, on peut écrire :
$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$ qui se simplifie en $2bx = a^2 - c^2 + b^2$
Donc l'aire du triangle vaut :

$$A = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2\cdot a^2 - \frac{1}{4}\cdot(2bx)^2} \quad \text{donc :} \quad \boxed{A = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2\cdot a^2 - \frac{1}{4}\cdot(a^2 - c^2 + b^2)^2}}.$$

C'est une formule exprimant l'aire en fonction des côtés, mais elle n'est pas jolie.

$A = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{(2ba)^2 - (a^2 - c^2 + b^2)^2}$ c'est une différence de 2 carrés, on utilise la 3ème identité remarquable.

$$A = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{(2ba + a^2 - c^2 + b^2)\cdot(2ba - a^2 + c^2 - b^2)} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{((a+b)^2 - c^2)\cdot(c^2 - (a-b)^2)}$$

On a utilisé la première identité remarquable et on réutilise la 3ème identité remarquable.

$$\boxed{A = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c)}}$$

Cette formule est un peu compliqué à obtenir et n'est pas importantes pour nous, mais elle est jolie, car elle est entièrement symétrique en les trois paramètres a, b et c.